目　录

前言 …………………………………………………………………… 辛厚文(Ⅰ)

概　论

分形研究的若干问题及动向 …………………………………………… 李后强(1)

关于分形理论研究中若干基本问题的思考 ………… 赵　辉　孙博文　王德伟　张本祥(5)

分形数学

分形插值的理论及应用 …………………………………………… 沙　震　陈　刚(8)

分形插值函数与分形平移曲面 …………………………………… 杨润生(15)

迭代函数系(IBF)吸引子盒子维数求解初探 …………………… 杨海涛(19)

迭代函数系(IFS)吸引子的逼近算法 …………………………… 杨海涛(24)

Fractal 逼近的斜量法 …………………………………………… 崔振文(30)

分形集上的布朗运动 ……………………………………………… 周先银(34)

分形函数的微积分 ………………………………………………… 张永平(37)

广义自相似集的维数研究 ………………………………………… 华　苏(41)

关于一类随机数的 α 截集的 Hausdorff 维数 ………………… 吴　敏(47)

关于 MINKOWSI 容度的若干例子 ……………………………… 陈世荣(50)

一类集合的 Packing 维数 ……………………………………… 李文侠(52)

Stable 分量过程的图集的 Packing 测度 ……………………… 赵兴球(56)

一类广义的 MW 函数图象的 BOX 维数 ……………………… 华宇明(59)

平面上的不可求积曲线及其分维 ……………… 李崇靖　安肇瑛　杨多立(62)

Lauwerier 吸引子的 Hausdorff 维数和分形维数 ……………… 卢钦和　谢惠民(65)

分形的计算机产生、模拟和图像处理

分形及其计算机生成 ……………………………………………… 齐东旭(68)

点集序列与分形结构的计算机生成 …………………………… 齐东旭　戈建涛(72)

复平面上曲线族极限特征的机算机探索 ……………………… 齐东旭　迟宝山(75)

自相似结构与幻方 ………………………………………………… 齐东旭　史　元(77)

Dehlinger 线画艺术的分形结构探讨 …………………………… 徐迎庆　黄心渊(80)

分形纹理映射的应用 ……………………………………………… 古　梅　张　方(83)

Koch 曲线的艺术构图 …………………………………………… 陶志穗　蔡秀云(86)

L系统在分形中的应用 …………………………………………………………………… 王方石(90)
迭代函数系统在自然景物仿真中的应用…………………………… 周光辉 周克绳(94)
植物形态的分形重构……………………………………………… 常 杰 陈 刚 葛 滢(97)
产生新一类 Julia Set 和 Mandelbrot Set ……………………………… 童红卫 金以文(101)
随机分形模拟欧氏平面纹理………………………………………… 邓 昀 周克绳(104)
分形理论用于图象分割研究……………………………… 朱光喜 张 平 朱耀庭(106)
分形布朗子波场及其在图象处理中的应用………… 罗会国 朱耀庭 朱光喜 万发贯(109)
基于分形的纹理描述与分割………………………………………………………… 赵乃良(112)
气—液—固三相流态化中分形的研究………………………………… 胡宗定 段一然(115)

分 形 物 理

拉普拉斯方程与分形集………………………………………………… 罗春荣 赵晓鹏(119)
局部维数及其动力学演化方程……………………………………………………… 周文臣(122)
多重分形参量和热力学函数………………………………………………………… 康承华(125)
分形子与无序系统的物理性能………………………………… 沈中城 华人炎 邓乘风(129)
Cantor 集分形结构上的振动态和电子态特征……… 辛厚文 廖结楼 周 沛 谭 强(132)
一种 Diamond 阶梯分形结构上含两体和四体互作用伊辛模型临界行为研究
……………………………………………………………… 顾宗华 张宏光 辛厚文(142)
分形与声振动……………………………………………………………………… 敖力布(146)
Hopping 电导的分形行为特征 ………………………………… 廖结楼 杨灵法 辛厚文(149)
磁性超微粒的斑图形成…………………………………………… 杜伟亭 赵明华 黄 昀(151)
相互作用对分形聚集的影响………………………………………… 孙 强 王 前(154)
气固相变时碘的分形凝聚…………………………………… 张济忠 阳晓军 李恒德(157)
分维度对单畴粒子聚集体矫顽力的影响………………………………… 王 前 孙 强(160)
分形气溶胶聚合体的光学特性及其遥感的有关问题………… 王志恩 胡欢陵 周 军(163)
DLA 模型的扩展及其分形聚集体的各向异性 …… 蒋建生 张 萌 李渭清 范传光(167)

* * *

耗散孤立波的长期行为及分形维估计……………………………… 储志俊 田立新(170)
中高能重离子碰撞中的阵发混沌…………………………… 葛凌霄 张晓东 朱全伶(174)
圆形紊动射流的分维测量和分析………………………………………………… 黄真理(178)
湍流混沌和涡旋混沌形成负熵过程……………………………………………… 毛法根(183)
Monte Carlo 模拟固体中原子电离的分布及其分形描述 ……………… 丁泽军 吴自勤(186)
电子在固体中运动轨迹的分维计算…………………………… 李 华 丁泽军 吴自勤(189)
用恒相角阻抗法研究导电聚合物聚苯胺的分形结构
……………………………………………………… 袁仁宽 王永宾 袁 宏 陈忠辉(192)
分形结构材料的介电谱…………………………………………… 姚合宝 贺庆丽(197)
一种研究滤饼结构的新方法…………………………… 徐新阳 邓常烈 罗 倩 康 雁(200)
烧结金属粉末的超声衰减机制研究……………………………………………… 沈中城(204)

* * *

再入飞行器烧蚀问题分形研究…………………………………… 伍小平　全　华(207)
分形表面及其近场散斑的奇异吸引子………………………………… 李江伟　伍小平(212)
溅射法制备银超微粒的粒径分布分析………………………… 邓昭镜　李　建　孙　强(215)
金属及其氧化物超微粒自相变特性………………… 刘存业　邓昭镜　任洪湘　李　建(221)

分形在化学、生物学中的应用

电化学沉积金属铜过程中的枝晶及分形形态……………………………… 骆桂蓬　韦　钰(225)
基于电化学方法在单分子层界面下生长金属膜过程中的分形现象
……………………………………………………………… 骆桂蓬　艾竹铭　韦　钰(228)
氯化铵不规则结晶的形态与分形研究……………………………………………… 毛法根(231)
薄层氯化钾无规结晶与分形研究…………………………………………………… 毛法根(234)

* * *

BZ 化学振荡反应中的分维 ………………………… 唐宇虹　刘铨良　侯印兰　胡熙林(238)
非线性化学吸引子维数……………………………………………………………… 高庆宇(241)
表面分形的生成过程及其吸附行为的计算机模拟…………… 郭向云　李永旺　钟　炳(244)

* * *

酶催化动力学的分形行为…………………………………………………………… 李后强(247)
分子结构的相关熵和相关分维……………………………………… 张宏光　辛厚文(249)
缠结高分子链解缠时间的分形模型…………………………………… 徐英武　王存新(251)

* * *

东北羊草草原主要环境因子的分形分析…………… 张喜军　马克明　陈继红　祖元刚(252)
东北羊草原群落格局的分数维理论研究…………… 马克明　张喜军　陈继红　祖元刚(258)

分形在材料科学中的应用

金属非晶态半导体层膜的分形晶化………………………………… 吴自勤　张人佶(265)
非晶态硅薄膜中分形结构的密度相关函数方法处理
…………………………………………………… 林鸿溢　杨能平　武旭辉　李映雪(268)
α-Si/Al 复合膜的晶化分形 ………………………………………… 蔡　伟　万德锐(271)
薄膜淀积初期的分形研究…………………………………………… 王　兵　吴自勤(274)
逾渗阈值附近 Pd 薄膜电阻率特性研究 ……………… 王晓平　王　兵　赵特秀　吴自勤(277)
Pd/α-Ge 双层膜中金属诱导晶化引起的分形 …………… 陈志文　李凡庆　张逸元　等(279)

* * *

材料中的多度域分形…………………………………………………………… 龙期威(283)
马氏体相变的分形描述………………………… 龙起易　朱祖铭　穆在勤　龙期威(291)
分形粒度分布模型及颗粒过程的统一性………………………………… 黄　道　柯家骏(294)
分形布朗增量随机场模型(DFBIR)及其在材料断口定量分析中的应用

…………………………………………………………………… 李建明　朱光喜　朱耀庭　等(298)
断层与裂缝系统的分形结构研究…………………………………………………………… 汪富泉(307)
关于岩石材料断口的分形分析……………………… 胡事民　金以文　陈智纯　黄　平(310)

*　　*　　*

溶胶-凝胶过程及多孔材料的分形研究 ……………………… 郭国霖　桂琳琳　唐有祺(313)
黄铜在粘着磨损形成过程中的分形结构…………………… 张志军　贾春德　吴希平(314)
先进耐磨陶瓷的冲蚀表面的分维特性……………………… 徐利华　陈　刚　丁子上(317)
Cu-Zn-Al 合金表面振荡化样的分形动力学过程研究 …… 高后秀　赵燕平　杨敢宇等(320)

分形在地质、水文和气象科学中的应用

地质学运用分形理论需要考虑的问题……………………………………………………… 毕先梅(323)
沉积岩孔隙空间的分形结构………………………………… 王域辉　廖淑华　郝锦云(327)
岩石-孔隙界面上的规整体分形岛 ………………… 王域辉　廖淑华　陈传仁　毛治超(337)
地壳内部剪切带阵列的分形几何学………………………………………………………… 索书田(341)
分形结构因子的提出及其理论意义………………………………………………………… 沈步明(345)
变形条件下黄土微结构分形特征及其工程意义…… 胡瑞林　李向全　官国琳　叶　浩(348)
JRC 尺寸效应分形的特征 …………………………………………………… 杜时贵　章仁友(356)
油藏岩石孔隙结构的分形描述及其应用……………………… 李克文　沈平平　贾芬淑(362)
用分形理论和小波变换相结合的方法来选择油气田的勘探井位
…………………………………………………………… 段虞荣　高如曾　何光明(366)
土壤水分渗透的相变模型…………………………………………………………………… 孙爱萍(370)
泥沙淤积物颗粒排列结构的分形模式研究……………………………… 杨铁笙　张正红(373)
随机水系的计算机模型及其分维…………………………………………… 孙博文　洪时中(377)
甘肃中部及邻区水系分维值与滑坡灾害…………………………………… 邹谨敞　邵顺妹(380)
大气大型涡旋的自组织临界态……………………… 曹鸿兴　封国林　卢志恒　景海荣(384)

分形在地震科学中的应用

自仿射分形应用于地震前兆资料处理………………… 陈棋福　马　丽　陈建民　李志雄(387)
分形与浑沌理论在地震学中的应用与探讨………………………………………………… 安镇文(392)
分形几何学在地震综合预报中的应用……………………………………………………… 平建军(397)
地震活动性的模糊时空分维分析及其应用………………………………… 刘喜兰　冯德益(402)
地震强度分形结构的谱值分析法……………………… 冯德益　蒋　淳　田　山等(405)
模糊分维与模糊自相似性在地震前兆常识和分析中的应用
………………………………………………………… 郑熙铭　冯德益　朱桂兰(408)
阔克沙勒一吉萨尔地震活动时间的多重分形研究……………………… 朱令人　周仕勇(413)
唐山 1976 年大地震震中分布多重分形维数谱的变化特征 … 汪秉宏　李东升　郑兆必(416)
地震蕴震过程中地壳形变场的分形研究……………… 周硕愚　吴　云　王若柏　杨国华(418)

时间序列的空间相关分维与时间分维遍历问题…………………………………… 王文均(423)
不等间距地震序列的分维计算…………………………………………………… 陈子林(426)
GP法计算关联指数的误差分析 ……………………… 吴　云　周硕愚　孙建中　施顺英(429)
分维测算中“无标度区”的客观判定与检验……………………………… 洪时中　洪时明(434)
地震能量分布的自仿射分形特点及其物理机制的初步讨论……………… 张晓东　马文静(437)

分形在地理、人文和社会科学中的应用

曼德布罗特景观和赫斯特现象…………………………………………………… 艾南山(444)
地理过程中弹性系的分形研究………………………………………… 陈　嵘　刘　斌(447)
再生产过程的分形特征及其对经济波动的反映………………………… 张本祥　牛　健(450)
产品信息含量分布的康托集合质量分布特征…………………………………… 王德伟(454)

分形研究的若干问题及动向

李 后 强

（四川大学物理系，成都 610064）

近年来，分形理论在国内外发展很快。自然科学领域（如物理、化学、地学及生物学等）中的分形学术论文有指数增长趋势，哲学社会科学领域涉及分形的论文和书籍也不断增加。有关分形的专题讨论会有增无减。"国际学术讨论会自然科学中的分形——关于自然界复杂几何的国际会议"（Fractals in Natural Sciences：International Conference on the Complex Geometry in Nature）今年 8 月 30 日至 9 月 2 日在匈牙利布达佩斯召开。国际学术刊物《混沌、孤子和分形》（Chaos、Solitons and Fractals）（Pergamon Press、1991）和《分形学》（Fractals— An interdisciplinary Journal on the Complex Geometry of Nature（World Scientific，1993）已先后问世，从而使分形理论有了属于自己的阵地。

在我国的攀登计划《非线性科学》项目中，列出了"分形的数学理论"、"分形的物理机理"（分形上统计模型的相变、多分形结构、动力学集团生长等）两个大方向，国家自然科学基金申请指南中已列出"分形论及其应用"（A01020405）内容，这表明我国对分形理论也持肯定和欢迎态度。

但是，这些年来关于分形的争论也很多。特别是 1988 年以来，B. B. Mandelbrot 与 S. Krantz 一直在为分形的价值而争吵不休[1]。Krantz 认为，"对分形一词没有明确的定义，作为一个数学家，我觉得这不是一个好兆头""分形几何同微积分的显著差别是，分形几何还没有解决任何问题"，"分形几何学家不证明定理"，"他们产生图形是为了得到更多的图形，而不是为了得到更深刻的思想"。Mandelbrot 则认为，分形工作是充满想象力，具有挑战性的。这方面的研究加深了我们对自然的理解。"如果我只是证明了少数几个定理的话，那么用这些定理很难发现现在还没有创立的或潜在的研究领域"，"我的一个定理回答了自从 Poincaré 定义了克莱因群的极限集后一直处于未解决状态的一个问题"。"如何定义现代的数学，以及是否把我看成是数学家，这些不是重要的。相反，重要的是，我在不同的领域中'追求美好的问题'而得到的结果"。Mandelbrot 与 Krantz 的争论是最具有代表性的，有人称[2]"这是一场关于数学灵魂的战斗"。

虽然，Karntz 的言论偏激了一些，但他提出的问题是值得认真思考的。就我的认识水平而言，下列问题值得我们花精力和时间。

（一）如何判断一个对象是分形或多分形的问题

Mandelbrot 曾（1982）指出，Hausdorff Besicovitch 维数严格大于拓扑维数的集合称为分形（A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly

国家自然科学基金资助项目

exceeds the topological dimension)。但这仅是试验性定义(tentative definition of a fractal),很不严格,也无可操作性。1986年,Mandelbrot修改了这个尝试性定义,提出[3]"其组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形"(A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way)。这是Mandelbrot在给Feder的私人通信(1987)中提出的。Mandelbrot还说(1986)[4],"分形是非线性变换下的不变性,但我首先研究的是在线性变换下不变的自相似性。"这也算是对分形的一种表述。然而,他自己也认为,目前仍然没有关于分形的完整而精确的定义。

许多学者认为,分形是"看"出来的,而无法严格证明"什么"是"分形"。因此,给分形一个好定义,还需努力。没有公认的定义之前,要判断分形与非分形是有困难的。当然,也有学者(如Falconer)认为,无需给分形一个严格定义,只要都理解其含义就行了,正如"生命"一词一样,虽然目前尚无一致公认的定义,但人们照用不误。

我们认为,自仿射性应是分形的本质特征,因此首先要研究的是自仿射性(包括统计意义上的)与定义之间的关系。对于实际问题中出现的分形图案的判断,仍是一个尚待解决的问题。

(二)分维的物理意义问题

分维是描述分形特征的定量参数。但分维有什么用?这是经常听到的议论。Hausdorff维数的意义似乎明确一些,它定量地描述一个点集规则或不规则的几何尺度,同时其整数部分反映出图形的空间规模。对动力系统而言,Hausdorff维数大体上表示独立变量的数目。广义维数Dq或奇异谱f(α),主要表征多分形的非均衡性和奇异性。在材料科学中,发现分维与材料的某些性质参数有关;在化学领域,发现分维同催化剂的催化性和选择性有关。但是,分维能否作为一个独立参数存在,现在还不太清楚。在时间序列分析中,关联维数D_2或广义维数Dq,似乎有其独特的作用。寻找分维的更深刻的意义和实际的用途,应是值得高度重视的工作,否则分形理论就失去了其优势和存在的价值。

(三)分形的动力学机制问题

分形理论主要致力于形态的描述,对动力学机制(包括分形产生的充要条件)几乎没有涉及,这不是一个好事。为改变这种"知其然而不知其所以然"的状况,有必要引入非平衡态物理学、协同学等学科中一些概念和方法,还要把时间参量纳入研究之中。同时,应对分数阶微分方程、非线性发展方程、辛几何等方面的进展给予关注。目前,在化学动力学及酶动力学领域已有进展,主要是通过分形子维数d_s(谱维数)沟通时间与概率之间的关系。但远远不能说明分形的生长动力学。今后的研究应从以下三方面展开:①通过专门的仪器设备(如高速摄影机)详细记录DLA生长过程,根据观测资料建立其生长动力学模型(不能只滞留于Laplace方程)。换言之,我们必须研究集团生长的时间演化规律和集团的结构标度行为。国外已有这方面的报道。②应当考虑耗散结构及自组织临界(SOC)理论,进行有效的解析和数值研究。同时,要重视随机力和噪声对系统的影响。③从细胞自动机CA和神经网络NN方面对生长问题进行模拟研究。

总之,分形动力学是需要努力开拓的领域。

(四)分形重构问题

分形集有多种方式形成,但基本上都与迭代和递归过程有关。所形成的分形集都表现出某种自相似性或拟自相似性(quasi—selfsimilar)。分形重构问题广义而言是任给一个几何上

认为是分形的图形.能否以某个指定的方式生成它?狭义而言则是指能否通过映射迭代来实现这一分形图形? 这是动力系统研究的逆问题。

问　题：给定一个分形集.找出一动力系统其吸引集是此分形集；或者.更广泛地说,给出一测度,找出一动力系统其不变测度等于或接近于给定集合。

对于自相似的分形.目前已有"拼贴定理",即任意分形集总可以用一系列自相似分形来逼近。

若把分形重构问题更加扩大,则是"如何由分维重构分形"。即已知一个分形的维数,如何重新构建(还原)这个分形? 目前关于时间序列的动力学重构,已有一些进展,但还限于已知系统。显然,由于存在"一因多果"或"一果多因",由分维重构分形还必须加入另外的辅助参数,仅靠一个分维是不够的。

(五) 关于 Julia 集和 Mandelbrot 集的问题。

动力系统中的 Julia 集(记 J 集)和 Mandelbrot(记 M 集)是复多项式[5,6]如二次多项式 $f_c(Z)=Z^2+C$(C 为给定的复数)迭代的结果(Riemann 球面)。二者密切相关。迭代序列保持有界的复数 Z_0 的集合叫 Julia 填充集,记为 K_c。J 集是闭子集且有界。J 集有完全不连通的 Cantor 型和拟圆周形状的连通型两类,取决于二次多项式的系数。M 集定义为由复平面的使 Julia 填充集 K_c 成为连通集的复数 C 构成的集合。它本身是一个平面紧致集,又是连通的。但其内部似乎是不连通的,由众多的块片组成。当 C 是 M 集的一点,则它也是 Julia 填充集 K_c 的一点。M 集是否是局部连通的及其边界维数的计算,是值得研究的问题。最近有人[7](如 J. C. Yccoz 及 B. Branner)证明 M 集几乎是局部连通的,而 M. Shishikura 提出 M 集边界的分维是 2,这些都是还需进一步研究的问题。

对任一 d 次复多项式

$$P(Z)=Z^d+a_{d-2}Z^{d-2}+\cdots+a_0$$

其参数空间是$(a_{d-2},a_{d-3},\cdots,a_0)\in C^{d-1}$,Mandelbrot 集可推广为下述轨迹连通

$$L_d=\{\lambda\in C^{d-1}\,|\,K_{p_\lambda}\text{是连通集}\}$$

其中$K_p=\{Z\,|\,P^n(Z)\not\to\infty\}$称为多项式的 Julia 填充集。已证明 Mandelbrot 集 L_2,L_3 是连通的。

问　题：Mandelbrot 集 L_d 也是连通的吗?

P. Moussa 等人研究了整系数多项式和代数整系数多项式的填充 Julia 集内准周期点的代数特性,发现准周期点与代数整数有关。

问　题：对于 d 次多项式族的 Mandelbrot 集、其中所含有的代数数有何特点?

对于临界有限的整超越函数族的 Julia 集,当参数变化时,其 Julia 集可能发生"爆炸"。在复指数函数族和复正弦函数族中都发现这种现象。

问　题：设 E_λ 是一整超越函数族,每一 E_λ 是临界有限的。参数平面上什么样的分歧点可能产生 Julia 集爆炸?

关于整数函数,有理函数的迭代问题可参阅杨路、张景中、曾振柄的文章[8]。

除了以上五个大问题外,以下十个方面也应当有所突破。

1、随机多分形的数学问题;

2、分形曲线的导数问题(如 Gibbs 导数);

3、分维计算的方法特别是由混沌时序计算分维的可信度问题;

4、多分形的热力学、相变实质及相变普适性划分判据问题；

5、分形的小波分析及小波变换产生分形的问题[9]；

6、生物膜的分形结构及其与细胞膜病变的关系问题；

7、原子、分子的分形问题(包括量子混沌)；

8、胖分形(fat fractal)及重正化混沌(renormchaos)问题[10]；

9、自组织临界现象(SOC)及负幂律问题；

10、图象的分形压缩问题；

今年秋季在布达佩斯举行的国际分形会议上，列出了如下议题：

生 物 学：Growth morphologies (bacteria colonies, neurons, plants, etc.,), complex signals;

化　学：Polymers, corrosion, absorption;

地球科学：Geomorphology(river networks, transect profiles), fractures, nonlinear ocean waves;

物 理 学：Percolation and Aggregation phenomena, turbulence, self — organized criticality, rough surfaces, granular materials。

这些议题在一定程度上代表了当前分形研究的热点。此外，在哲学社会科学领域也可能获得新进展。总之，分形理论作为非线性科学的一个组成部分，它必将在发展中不断完善和走向成熟。

参 考 文 献

[1] Krantz, S. G; Mandelbrot. B. B. 数学译林，1992；11(4)，337—345

[2] Bown, W; New—Wave mathematics, New. Scientist, 1991；3, August, 33—37

[3] Feder, J; Fractals. Plenum Press, 1988, 11

[4] Mandelbrot, B. B; Fractals and the Rebirth of Iteration Theory, in The Beauty of Fractals——Images of Complex Dynamical Systems, Springer—Verlag, 1986；151—160

[5] Keen, L, The Julia set, in Chaos and Fractals: The mathematics behind the Computer Graphics Lecture Notes, 1988；1—35

[6] Branner, B. The Mandelbort set. in Introductory Survey Lectures on Chaos and Fractals. The Mathematics behind the Computer graphics, Providence Rhole Island, August, 6—71988, K

[7] Douady, A; Boudine J. P. Mandelbrot 集的秘密，数学译林，1993，12(1). 79—84

[8] 杨路、张景中、曾振柄，动力系统中的分形集，数学进展，1990；19(2). 137—188

[9] 李后强、汪富泉，《分形理论及其在分子科学中的应用》，科学出版社，1993

[10] Chirikov. B. V. Patterns in Chaos, Chaos, Solitons & Fractals 1991；1(1), 79—103

关于分形理论研究中若干基本问题的思考

赵　辉　　　　　　孙博文　　　　　　王德伟　张本祥
（哈尔滨工业大学）（哈尔滨机电专科学校）（黑龙江社会科学院）

"分形"一词传入我国后，在各行各业中引起了广泛的传播，研究分形的队伍日益壮大。从发表的文献上来看，多数研究工作者侧重于分形理论的发展和分形理论应用方面的研究。我们黑龙江省 CFS 学会的同志们在学习和研究分形理论的过程中，感到分形理论中的许多基本问题，例如：维数的含义，分数维时空观，分形的定义，以及分形方法论等都处在含混和不确定状态。本文把我们对分形理论中几个基本问题的认识提出来和大家商榷。

1. 维数的本质

众所周知，分形集的 Hausdorff 维数一般不是整数。分形理论的创始人 Mandelbrot 在给出分形的定义时，把 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合称为分形集，这引起人们对分数维集合研究的新浪潮。根据 Mandelbrot 定义，人们已把分数维集合和分形等同看待。由于 Hausdorff 维数和拓扑维数都是严格的数学概念，且分数维集合对于我们来说具有复杂性。因此有必要从更高的层次上探索维数的本质，进而达到认识分数维集合乃至分形的目的。

我们认为被考察的集合若其中的元素相对于考察的角度来说具有差异性，那么总可以对该集合赋予某种"层次结构"，集合中的元素按照这种"层次结构"进行分组，每个组内的元素属于同一"层次"。这种可划分性是客观的，而具体层次的划分是受考察的角度和层次划分方法的制约由人们在主观上进行的。正确的层次划分方法应使得不同层次中的元素相对于考察的内容具有"质"的区别，这表现在不同层次的元素性质绝对不同，或按照某种序关系比较产生绝对化的结果。不同层次元素比较结果的绝对化对应着观测的奇异性；在确定的层次里考察（注意要按照划分层次时的考察角度进行考察）不属于该层次的元素，考察结果与确定层次中的元素相比较具有"奇异性"。例如，可以按照 Hausdorff 测度定义给集合从测度角度划分层次，而 Hausdorff 维数则成为层次的标号。在 1 维的层次里（即使用该层次下的考察尺度—1—测度）观测有界直线的测度（长度），我们得到一个确定的有界实数；而若在该层次下用 1—测度考察尺度观测三次 koch 曲线的测度时，我们得到了数学上称为"无穷大"的结果。"无穷大"与有界实数相比较结果是绝对化的。反之在 Koch 曲线的层次里（即使用考察尺度—log4/log3—测度）进行观测，观测直线的结果是"无穷小"，而三次 Koch 曲线却是一个确定的有界实数（按 Hausdorff 测度定义大于零），二者相比仍产生了绝对化的结果。

从本质上来说，维数是集合层次的一种量值标号。例如，拓扑维数和 Hausdorff 维数都是集合划分层次的层次标号，他们之间的重要区别是从不同的考察角度给集合划分层次。

给集合划分层次的结果可以有多种表现形式，并不一定都要用到"维数"一词，例如，物理学中常用的"相"的概念来区分物质的层次，而社会科学和日常生活中的层次区分方法更加庞杂。

即使是同样的考察角度，由于层次划分方法的多样性，集合的层次结构在不同划分方法下可能产生不同的结果。例如，Hausdorff 维数定义方法可以加以改造而变得更加精细。从层次结构划分的意义上来看分数维集合，分数维数集合和整数维数集合一样，只不过各自属于一个层

次罢了。但是由于我们传统的数学方法是在整数维的层次里建立的，因此我们用传统的方法（即用整数维中的观测工具）去考察不属于整数维层次的分数维集合时，当然考察的结果与传统经验相比是“奇异的”；因此人们说分数维集合是复杂集合，乃至被称为“怪兽”。假如我们建立了分数维层次中的数学方法，用于考察自身，则观测结果一定是平凡的、简单的；而若用于考察整数维集合，则整数维集合成为了复杂集合。复杂性的产生只是我们跨越层次考察事物的结果。那么分形与分数维是什么样的关系呢？我们留待第3个问题中来谈。

集合存在着层次结构告诫我们，一旦对集合中的元素划分了层次，那么考察该集合中的元素时，既要考察集合中的元素的量，又要注意到该元素所在的层次（维数、量纲等等）。当某个元素的考察结果是“奇异”的时候，要追究一下该元素所在的层次与考察工具所在的层次是否一致。

一个集合其元素之间的关系是错综复杂的，无论按何种划分层次的方法，不同层次下的元素总要放在一个体系下一起考察，这时层次标号（“维数”、“量纲”、“相”等）也是一个重要的考察内容，而层次之间的关系是我们整体考察一个集合的重要保证。下面我们利用这种思考方法给出“分数维时空观”的理论依据。

2. 分数维时空观

物理学家们发现了奇异性态物理量和发散过程之后，开始怀疑某些物理量的量纲数可能是介于整数之间的某一分数。“分形”的提出使人们从新开始认识分数维，这使得许多人确信存在量纲数不是整数的物理量，更有人提出我们生活的时空本身就不是整数维的。下面我们根据层次结构理论和维数的本质来说明“分数维时空观”的合理性。

传统的时空概念和时空维数全部源于欧氏空间理论。欧氏空间的建立是通过集合的笛卡尔（Cartesian）乘积实现的，而传统的欧氏空间维数是指参与乘积的集合的元素个数。这样时空维数就成了决定时空的物理量的个数，当然它是个整数。有的研究工作者为了说明时空的分维性，把物理量的个数推广成非整数的分数。我们认为这种作法欠妥。给元素计数的方法完全可由集合论的公理体系建立起来，计数的结果是无关重要的，关键是计数系统的规则。现行的自然数计数体系是由集合论公理体系建立起来的符号体系，也是人们千百年来感知自然的结晶。以分数给元素计数严重地破坏了计数系统的规则，与集合论公理体系相抵触。那么怎样说明时空可能是分数维的呢？问题的关键在于欧氏维数的定义。事实上，欧氏空间的维数应定义为决定欧氏空间的乘积空间维数。根据乘积空间维数理论，乘积空间的维数由参与乘积的各集合的维数和集合之间的关系确定，若乘积空间由若干个独立元素通过笛卡尔乘积获得时，乘积空间的维数等于各元素的维数之和。当按某些划分层次方法使得参与乘积的各集合元素的维数参差不齐时，那么乘积空间的维数就不一定是整数，即可能存在分数维时空。这里的关键是时空的维数由各物理量的维数通过运算获得，而不是通过数物理量的个数获得，这与我们的层次结构理论是一致的。物理量的层次差异被引入到时空中，这样即可很好地理解分数维时空的存在性，同时也可以正确解释奇异性态物理量和发散过程。

乘积空间方法或多或少地在数学领域解决了层次结构之间的关系。当我们观察时空的工具是确立在某一层次上时，若其他层次的物理量参入进该时空，则其被观测到的性态必然是奇异的，乃至引起整个时空维数的分数化。

3. 分形的定义

Mandelbrot 在他早期的论文中，定义了分形集是满足 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合。“分形”一词源于拉丁文 fractus，本意是指“破碎的”，用传统的几何观点来看即是不规则

的和复杂的。Mandelbrot 这个定义的目的在于刻划不规则集合，这个定义本身虽然还没有完全作到这一点，但是 Mandelbrot 的思想是十分清楚的，他用分形一词来描述分数维集合。这导致许多研究分形的人实际上是在研究分数维。然而大多数经典分形的例子给人们留下的十分深刻的印象是分形是局部和整体以某种方式相似的集合，这也是 1986 年 Mandelbrot 给出的分形的另一个定义。尽管这个定义含有不确定因素，以至于难于用于演绎，重要的是它与早期的定义出发点完全不同，分形已不在从复杂性角度进行刻划，而致力于从局部和整体的关系上来描述。对这两个定义的选择可以表明我们认识和研究分形的目的。

从集合的层次结构观点来看，复杂集合的存在是一种平凡的、自然的现象。现时我们认识到的分数维集合的复杂性只不过是利用了整数维层次中的观测工具考察不属于整数维层次的集合时产生的认识结果。Mandelbrot 利用 Hausdorff 维数和拓扑维数的差异表征分数维集合只是看到两种维数定义方法相关时而产生的现象，许多实例反馈出这类定义方法存在的缺点。Falconer 指出，分形不存在确切简明的定义，只能罗列出分形的大部分特点，他的目的也是想把所有复杂集合包括进分形中。我们认为从复杂性角度定义分形只存在现时数学上的意义，不具有普适性和深刻的哲学意义。

局部和整体以某种方式相似的集合则极具特殊性。对这类集合的研究可以为我们认识自然、控制自然提供新的工具。从局部看整体乃至控制整体是人类认识史上的一个飞跃，具有深远的哲学意义。这类集合摆脱了复杂性和维数对它的约束，而仅仅把它们作为一个特征，因此具有普适性。

我们认为局部和整体以某种方式相似的集合应该从分数维集合中脱离出来进行定义和研究，这时分数维只是该类集合的一个特性。这类集合可以用一种新的名称来命名，以避免沿用分形一词引起的一系列混淆。

4. 分形方法论

我们在各类有关分形的书刊和文献中看到的被描述为分形的自然体一云层边缘、海岸线、地球表面、断口表面、以及液体湍流等等，其中没有一个是真正的分形。这些自然体在局部和整体的某种相似性上并不是在任何尺度上都成立的，通常只是在某些特定的尺度范围内才成立。这些尺度范围被人们称为"无标度区"。在实际问题中为了考察一个事物是否存在局部和整体的相似性，只要检测该事物是否存在"无标度区"即可。检测"无标度区"区的方法如下：以尺度 r 把事物划分成 N 个相似的部分，对变化的 r 画出 logr－logN 曲线，然后检查曲线上是否有明显的直线段，直线段对应的 r 的区域即是无标度区。这种方法的理论依据是自相似集的相似维数（－logN/logr）是不依赖于尺度 r 的一个常数。

从我们普遍使用的分形方法论上来看，我们实际上总是默认分形是局部和整体存在相似性的事物，而对于分数维集合，我们实际工作中缺乏方法论工具。

参考文献

(1). Mandelbrot B. B. , The Fractal Geometry of Nature, Freeman, SanFrancisco, (1982).

(2). Feder J. , Fractals, Plenum Press, New York, (1983).

(3) Falconer K. J. , Fractal Geomtry: Mathematical Foundation andapplications, Wiley, New York, (1990).

(4). Peitgen H. －O. and Saupe D. , The Science of Fractal Images, Springer, New York, (1988).

(5). 文志英，分形几何与维数，大自然探索，第二期(1989)。

(6). 张一方，数学物理中分维的发展和分维时空观，大自然探索，第二期(1991)。

分形插值的理论及应用
（摘要）

沙震　陈刚
浙江大学应用数学系

§1 引言

给定平面上一组点列$\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^N$,求一个多项式$p(x)$,通过给定的点(x_i,y_i),或给定一连续函数$f(x)$,求一多项式$p(x)$,使在给定的$\{x_i\}_{i=0}^N$上插值于$f(x)$,即有$p(x_i)=f(x_i)$,$(0\leqslant i\leqslant N)$,这就是著名的拉格朗日插值法。插值多项式在数据拟合、数值分析以及逼近论的研究中都占有重要的地位。

样条函数是另一种强有力的插值工具,它具有优良的逼近性和稳定性,因而被广泛应用。设$x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N$,是$I=[x_0,x_N]$的一个分划。记$P_k$是次数不超过$k$的多项式全体。定义$I$上的连续函数$s(x)$:

$$\begin{cases} s(x)=p_i(x)\in P_k, & x_{i-1}<x<x_i \\ p_i(x_i)=y_i \\ p_{i+1}(x_i)=y_i \end{cases} \tag{1.1}$$

显然$s(x)$是连续的分段k次多项式,且通过给定的点组$\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^N$,称为多项式插值样条。

现在我们将上述的的$s(x)$用另一种形式来表述:

记$I_i=[x_{i-1},x_i]$,令$L_i(x)=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_N-x_0}(x-x_0)+x_{i-1}$,显然$L_i(x):I\to I_i$,又记

$$W_i(x,y)=(L_i(x),p_{i-1}(L_i(x))),\quad i\in\{1,2,\cdots,N\} \tag{1.2}$$

这样$\{W_i;i=1,\cdots,N\}$构成了一个迭代函数系(Iterated Function System)。若A是平面上的任意子集,记$W(A)=\bigcup_{i=1}^N W_i(A)$,此时$W$将有一个不动点$G$,即有$W(G)=G$,且$G$是连续函数$s(x)$的图像,$G=\{(x,s(x))|x\in I\}$,可以证明这个$s(x)$与(1.1)所定义的函数是重合的。

现在如果将(1.2)修改成如下的形式:

$$W_i(x,y)=(L_i(x),a_iy+q_i(x)),1\leqslant i\leqslant N$$

这个迭代函数系就可以产生本文所要阐述的对象——分形插值函数。因此可以说,分形插值是样条插值的一种推广,并且更为复杂。

分形插值是美国数学家M. F. Barnsley于1986年在[1]中首先提出的。它给出了拟合数据的一种新思想,不仅为函数逼近论开辟了崭新的研究领域,而且为计算机图形学提供了有力的工具。目前已充分显示出其强大的生命力。

§2 迭代函数系(IFS)

分形插值函数是由迭代函数系产生的,为此我们先介绍这方面的内容。本节的内容可以在[2]、[9]、[10]及[13]中找到。

设(K,d)为某紧度量空间,设$x\in K$,$A\subset K$,$B\subset K$定义$d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)$,$A$、$B$之间的Hausdorff距离为:

$$h(A,B)=\max[\sup_{x\in A}d(x,B),\sup_{y\in B}d(A,y)]$$

记$w=\{w_i;i=1,2,\cdots,N\}$其中$w_i:K\to K$是Borel可测函数,这样w是K上的集值映射,定义为

$w(x)=\{w_i(x);i=1,2,\cdots,N\}$,$x\in K$,对$K$的非空子集$S$,定义$w(S)=\{w(x);x\in S\}$。由此产生集值迭代函数系:$\{w^n(x)\}_{n=0}^\infty$,这里$w^0(x)=x$,$w^n(x)=w(w^{n-1}(x))$,$n=1,2,3,\cdots$,显然$w^n(x)$含有$N^n$个点(其中可能有重复)。

定义 2.1 给定 $x\in K$，称集 $A(x)$ 是迭代函数系 $\{K, w_i, i=1,\cdots,N\}$ 关于 x 的吸引子，如果点 $a\in A(x)$ 当且仅当对于 a 的任意邻域 O，存在无穷多个 n 满足 $O\cap w^n(x)\neq\varnothing$，并记为 $A(x)=\lim_{n\to\infty} w^n(x)$。

当 $w=\{w_i, i=1,\cdots,N\}$ 是由 N 个连续压缩映射组成，即 $w_i:K\to K$ 满足

$$d(w_i(x), w_i(y)) \le s_i d(x,y), \quad \forall\, x,y\in K, 0\le s_i<1, i=1,\cdots,N \tag{2.1}$$

记 $s=\max_{1\le i\le N} s_i<1$，称 s 为迭代函数系的压缩因子。这种迭代函数系称为双曲的(hyperbolic)，其吸引子 A 与初值 x 无关。事实上我们有下面的定理。

定理 2.2 对于双曲迭代函数系 $\{K, w\}$，存在唯一的紧集 A，有 $A=w(A)=\bigcup_{i=1}^{N} w_i(A)$，且对 K 的任意紧子集 S 均有 $h(w^n(S), A)\to 0, n\to\infty$。

不难看出，当 n 足够大时，$w^n(S)$ 给出了吸引子 A 的一个良好近似。这也给我们提供了可以在计算机上求吸引子 A 的一个算法。

另外，吸引子 A 上的不变测度也是研究 IFS 的重要工具。我们称 $\{K, w_1,\cdots,w_N; p_1,\cdots,p_N\}$ 为带有概率的 IFS，其中 $p_1+p_2+\cdots+p_N=1$，且每个 $p_i>0$，是与 w_i 相关的概率。记 $B(K)$ 为 K 的正规 Borel 测度全体。我们定义与 IFS 相关的 Markov 算子 M 如下，$M:B(K)\to B(K)$；

$$M(v)=\sum_{i=1}^{N} p_i v\circ w_i^{-1} \qquad \forall\, v\in B(K) \tag{2.2}$$

定理 2.3 设 $\{K, w_1,\cdots,w_N, p_1,\cdots,p_N\}$ 是带概率的双曲 IFS，又 $s\in(0,1)$ 是其压缩因子。$M:B(K)\to B(K)$ 是对应的 Markov 算子，则存在唯一的测度(称为不变测度) $\mu\in B(K)$，得 $M\mu=\mu$，且 $\operatorname{supp}\mu=A$，这里 A 是 IFS 的吸引子。

利用带概率的 IFS 可以得到易于在计算机上实现的随机迭代算法：首先选取 $x_0\in K$，然后定义迭代序列：

$$x_{n+1}=w_{\sigma_n}(x_n), n=0,1,2,3,\cdots \tag{2.3}$$

其中 σ_n 的选择满足 $P(\sigma_n=i)=p_i$。

Elton[13]证明了对于任意连续函数 $f:K\to R$，对任意 $x_0\in K$，下面等式以概率 1 成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)=\int_K f(x)d\mu(x) \tag{2.4}$$

§3 分形插值函数

分形插值函数(Fractal Interpslation Function，以下简称 FIF)是由一类特殊的迭代函数系产生的。首先我们介绍最简单的线性分形插值函数。

给定平面上一组点集

$$\{(x_i, y_i)\in R^2 : i=0,1,\cdots,N\}, \text{这里 } x_0<x_1<\cdots<x_N。 \tag{3.1}$$

连续函数 $f(x):[x_0, x_N]\to R$ 满足 $f(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,N$，则称 $f(x)$ 为插值函数。

现考虑 IFS$\{R^2, w_n, n=1,2,\cdots,N\}$，其中 w_n 是仿射变换：

$$w_n\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n & 0\\c_n & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_n\\f_n\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

常数 a_n, c_n, d_n, e_n, f_n 满足如下条件：

$$w_n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}, \quad w_n\begin{bmatrix}x_N\\y_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}, \qquad n=1,2,\cdots,N \tag{3.3}$$

我们称 d_n 是纵向压缩因子，当分划(3.1)给定时，d_n 与对应的 FIF 的复杂性密切相关。

由条件(3.3)通过简单计算可得：

$$\begin{cases} a_n=(x_n-x_{n-1})/(x_N-x_0)\\ e_n=(x_N x_{n-1}-x_0 x_n)/(x_N-x_0)\\ c_n=(y_n-y_{n-1})/(x_N-x_0)-d_n(y_N-y_0)/(x_N-x_0)\\ f_n=(x_N y_{n-1}-x_0 y_n)/(x_N-x_0)-d_n(x_N y_0-x_0 y_N)/(x_N-x_0) \end{cases} \tag{3.4}$$

设 $0\leqslant d_n<1,(n=0,1,\cdots,N)$那么可以构造 R^2 的一个度量 d，使得迭代函数系(3.2)成为一个双曲 IFS(参见[2])。于是由定理 2.2 知存在唯一的非空紧子集 $G\subset R^2$，有 $G=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(G)$，且 G 是某连续函数 $f:[x_0,x_N]\to R$ 的图像，即 $G=\{(x,f(x)):x\in[x_0,x_N]\}$，且插值于节点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{N}$，这样的函数 $f(x)$就称为一个线性分形插值函数。

在分形几何学理论中，分形集的维数是一个重要的量，它用来标志一个分形集的复杂程度。分形集的维数有多种多样的定义，都是根据需要引进的，但最常用的是 Hausdorff 维数(记为 D_H)及 Box－counting 维数(记为 D_B)，一般地有 $D_H\leqslant D_B$。对于上面定义的线性分形插值函数，我们有：

定理 3.1[2]　若 $\sum_{n=1}^{N} d_n>1$，且插值点集 $\{(x_i,y_i):i=0,1,\cdots,N\}$ 不共线，则它的 Box 维数 D_B 是下列方程：

$$\sum_{n=1}^{N} d_n a_n^{D-1}=1 \tag{3.5}$$

的唯一解，(a_n 由(3.4)定义)。在其它情况下 $D_B=1$。

记 $I=[x_0,x_N]$，定义平面上紧子集 $K=I\times[a,b]$，$-\infty<a<b<+\infty$。记 $I_n=[x_{n-1},x_n]$，又 $L_n:I\to I_n$ 是同胚压缩映射，且满足：

$$L_n(x_0)=x_{n-1},L_n(x_N)=x_n \tag{3.6}$$

及　$|L_n(c_1)-L_n(c_2)|\leqslant l\cdot|c_1-c_2|$，$\forall\ c_1,c_2\in I,0\leqslant l<1$。

同时对每个 n，有连续映射 $F_n:K\to[a,b]$，$0\leqslant q<1$，满足：

$$F_n(x_0,y_0)=y_{n-1},F_n(x_N,y_N)=y_n \tag{3.7}$$

及 $|F_n(c,d^1)-F_n(c,d_2)|\leqslant q\cdot|d^1-d_2|$，$\forall\ c\in I,d^1,d_2\in[a,b],0\leqslant q<1$。这样可定义映射 $w_n:K\to K$。

$$w_n(x,y)=(L_n(x),F_n(x,y)). \tag{3.8}$$

定理 3.2[1]　对于 $IFS\ \{K,w_n:n=1,2,\cdots,N\}$ 存在唯一的吸引子 G，G 是某连续函数 $f:I\to[a,b]$ 的图像，且有 $f(x_i)=y_i,\forall\ i\in\{0,1,\cdots,N\}$。

定理 3.3[1]　设 d 是 K 上等价于欧氏度量的某种度量，且存在 $0<t_n\leqslant s_n<1$，使 $t_nd(x,y)\leqslant d(w_n(x),w_n(y))\leqslant s_nd(x,y)$，$\forall\ x,y\in K$，又若 $L_n:I\to I_n$ 是仿射变换，即 $L_n(x)=a_nx+h_n$，则对应的 FIF 的 Hausdorff 维数 D_H 满足不等式：

$$Min(2,l)<D_H\leqslant u \tag{3.9}$$

其中 l 和 u 分别是下面二个方程的正解：　$\sum_{n=1}^{N} t_n^l=1$，　及　$\sum_{n=1}^{N} s_n^u=1$.

(3.9)式的证明用到了势位论方法。一般说来，要求得精确的 D_H(或 D_B)值是相当困难的，需要高度的技巧或新的理论和方法。

现在若给定一概率向量 $p=(p_1,\cdots,p_N)$，那么 $IFS\ \{K,w_n,p_n:n=1,2,\cdots,N\}$ 存在唯一的不变测度 μ，且 $supp\ \mu=G$。另一方面 $\{K,L_n,p_n;n=1,2,\cdots,N\}$ 是一双曲迭代系，因此也有唯一的不变测度 $\tilde{\mu}$，若令映射 $p:I\to G$，$p(x)=(x,f(x))$，$x\in I$。则可以证明[1]对 I 的每个 Borel 子集 $\tilde{B}$，有 $\tilde{\mu}(\tilde{B})=\mu(p(\tilde{B}))$。利用它可以进行积分变量替换，设 $H\in L_1(K,\mu)$，则有

$$\int_G H(x,y)d\mu=\int_I H(x,f(x))d\tilde{\mu} \tag{3.10}$$

特别，如果 $L_n=a_nx+e_n$，我们取 $p_n=a_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_N-x_0}$，那么有 $d\tilde{\mu}=\frac{dx}{x_N-x_0}$，于是(3.10)变为通常的 Lebesgue 积分：

$$\int_G H(x,y)d\mu=\frac{1}{x_N-x_0}\int_I H(x,f(x))dx$$

利用这个公式就可以计算对应的 FIF 的矩量问题。顺便提一下，关于线性 IFS 的矩量问题已成为分形重构的一个重要方法，(参见[9]、[10])。

§ 4　分形插值函数的光滑性

一般来说，分形插值曲线极其复杂。在任意局部领域中的无限振荡性，决定了 FIF 处处不可导。但我们仍可讨论其 Lipschitz 性质。我们说 $f(x)\in Lip\delta,(x\in I,\delta>0)$，如果存在常数 $c>0$，有 $|f(t)-f(u)|\leqslant c|t-u|^{\delta},\forall t,u\in I$。容易证明，如果 $f\in Lip\delta$，则它的 Hausdorff 维数 D_H 满足：$D_H\leqslant 2-\delta$。Besicovitch 和 Uresll 早在 1928 年就得到了这个结果，并指出 $Lip\delta$ 函数类中曲线的 Hausdorff 维数可充满 $[1,2-\delta]$ 整个区间。Barnsley 在[1]中构造了三个节点的线性 FIF 属于 $Lip\delta$。

Bedford[3]研究了分形曲线的局部 Holder 指数问题，它的定义是：

$$\alpha=\inf(\alpha_x:x\in I)$$

这里

$$\alpha_x=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\{\log|f(x)-f(y)|/\log|x-y|:y\in B(x,\varepsilon)\}$$

对于线性 FIF(3.2)，若 $x_i=i/N$，记 $a=\frac{1}{N}$，则对应的 FIF 有：

$$\alpha=\frac{\log d}{\log a},\text{其中 } d=\max_{1\leqslant i\leqslant N}|d_i|$$

在[3]中亦给出了较一般的仿射 IFS 的相应结果，但应用起来并不方便。

最近，[6]及[22]首先将分形插值函数展开成某种级数，然后得到了很广一类分形插值曲线的整体 Holder 性质。进一步，[23]中利用算子逼近的技巧，得到了更为广泛的、在任意分划下的 FIF 的整体 Holder 性质，并证明了该结果是最优的。

从上述可知，分形曲线的维数与其 Lipschitz（或 Holder）指数没有一个严格的对应关系，因而不能利用 Lip 指数来精确计算出它的维数。但[14]最近给出了一个精彩的结果：连续函数 $f:[0,1]\to R$，它的 Box 维数 $D_B=2-\gamma$ 的充要条件是：

$$f\in\Big(\bigcap_{\alpha<\gamma}B^{\alpha,\infty}(T)\Big)\Big\backslash\Big(\bigcup_{\beta>\gamma}B^{\beta,\infty}(T)\Big)$$

§ 5　分形插值函数的逼近性质

在函数论中，函数的插值方法是逼近论的主要内容之一。它在数值计算、计算几何、计算机图形学等领域中有着极为广泛的应用。近年来，出现了所谓的 Fractal 逼近理论，它用崭新的方法借助计算机对自然界中的许多现象进行更为令人满意的模拟和再现。例如树、云彩、山的轮廓等等。从理论上讲，就是对某个图形，寻找一个由相似变换或仿射变换组成的 IFS，使得它产生的不变集（吸引子）成为该图形的一个良好逼近。著名的拼贴定理（Collage Theorem）就是这种方法的理论基础。作为它的推论，可以证明，对 R^n 中任一非空紧子集 E，给定 $\delta>0$，则存在以 F 为不变集的相似压缩映射 $w_1,\cdots,w_N$，使得 $h(E,F)<\delta$。

值得注意的是，上述思想方法为图像压缩编码提供了一条奇妙的道路。Barnsley 和他在迭代系统公司的同事们已经在这方面做出了相当惊人的成就，他们甚至达到了 10,000:1 的高压缩比。目前国内外有很多人正在从事这方面的研究。

对于 FIF，我们同样可以讨论它的某些逼近性质。Barnsley 在[1]中给出了 FIF 的 Collage 定理：

考察由(3.1)——(3.8)定义的 FIF。定义 $C_0(I)=\{g\in C(I):g(x_0)=y_0,g(x_N)=y_N\}$，引入算子

$$T:C_0(I)\to C_0(I),\qquad (Tg)(x)=F_n(L_n^{-1}(x),g(L_n^{-1}(x))),\qquad x\in I_n$$

那么可以证明，对应的 FIF $f(x)$ 将是 T 的不动点，即有 $Tf=f$。

定理 5.1：现在如果 $\hat{f}\in C_0(I)$ 是给定的，若已知 $\|\hat{f}-T\hat{f}\|_\infty<\varepsilon$，则有 $\|f-\hat{f}\|_\infty<\varepsilon/(1-q)$。

在上述定理中，首先必须估计目标函数 $\hat{f}$ 与 $T\hat{f}$ 的误差，通常这只能借助于计算机进行处理。现在问能否与多项式插值理论一样，直接给出目标函数 f 与它的 FIF 之间的误差估计呢?

这是一个困难而又值得思考的问题。

Withers[15]研究了目标函数用 IFS 在积分平均意义下的最优化问题。该文利用 Newton 法得到了求最佳点的一种方法。

总而言之，分形逼近问题具有广阔的应用前景，十分诱人而又困难重重，特别是在误差分析方面，目前所见的工作不多。

§6　FIF 的不定积分以及高维 FIF

对 FIF 求不定积分，得到的光滑曲线亦将是某个 IFS 的"分形"插值函数。Barnsley 和 Harrington[5]指出：若 f 是与迭代系 $\{(L_j(x), F_j(x,y))\}_{j=1}^{N}$ 相联系的 FIF，其中 $F_j(x,y)=\alpha_j y+q_j(x)$，那么 f 的不定积分 $\hat{f}(x)=\hat{y}_0+\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ 是对应于 $IFS\{(L_j(x), \hat{F}_j(x,y))\}_{j=1}^{N}$ 的 FIF。这里

$$\hat{F}_j=a_j\alpha_j y+\hat{q}_j(t)$$

$$a_j=(x_j-x_{j-1})/(x_N-x_0)$$

$$\hat{q}_j=\hat{y}_{j-1}-a_j\alpha_j\hat{y}_0+a_j\int_{x_0}^{x} q_j$$

$$\hat{y}_j=\hat{f}(x_j)=\hat{y}_0+\sum_{n=1}^{j} a_n\left[\alpha_n(\hat{y}_N-\hat{y}_0)+\int_{x_0}^{x_N} q_n\right],\quad \hat{y}_N=\hat{y}_0+\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\int_{x_0}^{x_N} q_n\right)\Big/\left(1-\sum_{n=1}^{N} a_n\alpha_n\right)$$

这个过程可以继续进行，从而得到 C^n 光滑的"分形"插值函数。在[5]的末尾，作者还提出了若干饶有兴趣的问题。

从单变量插值问题过渡到多变量插值问题是非常自然的，但一般来说问题将变得非常复杂。关于高维 FIF 的结果目前所见甚少。Massopust[7]研究了一种特殊的情况，把分形插值曲线平行推广到三维的情形。

设 $v_0=(0,0)$，$v_1=(1,0)$ 及 $v_2=(0,1)$ 是平面上的三个点。记 $\sigma^2=\langle v_0,v_1,v_2\rangle$ 是由 v_0,v_1,v_2 为顶点组成的单纯形。令 $X=Q\times R$，$Q=[0,1]\times[0,1]$，定义 $f_i: X\to X$，

$$f_i(x,y,z)=\begin{bmatrix}\Phi_i(x,y)\\ \Psi_i(x,y,z)\end{bmatrix}\qquad i=1,2,\cdots,N\qquad N\geqslant 2,$$

这里

$$\Phi_i: Q\to Q,\qquad \Psi_i: X\to R$$

满足：$\Phi_1(0,0)=0$，　$\Psi_1(0,0,0)=0$

且存在 $i_0,i_1\in\{1,2,\cdots,N\}$，有 $\Phi_{i_0}(1,0)=(1,0)$，$\Phi_{i_1}(0,1)=(0,1)$，$\Psi_{i_0}(1,0,0)=\Psi_{i_1}(0,1,0)=0$，且 $\sigma_i^2=f_i(\sigma^2)$。记 $F=\{f_i: X\to X, 1\leqslant i\leqslant N\}$，则 (X,F) 是 X 上的一个 IFS，在适当条件和度量下，它是双曲的。因而存在唯一的吸引子 A。可以证明 A 是某连续函数 $X:\sigma^2\to R$ 的图像，且通过 σ_i^2，$(i=1,\cdots,N)$ 的顶点。一般来说，A 是一个分形集，称为分形曲面。

§7　分形插值与小波分析

越来越多的研究结果使人惊奇地意识到：分形理论与分析学中的另一个新分支——小波分析（Wavelet Analysis）之间有着十分密切的联系。有"数学显微镜"之称的小波理论就为具有"无穷精细结构"的分形对象的研究提供了一个绝好的工具。本节叙述有关的一些结果。

限于篇幅，这里不具体介绍 Wavelet 理论的内容。有兴趣的读者可以参阅有关的文献。

Holschneider[16]研究了几类特殊的分形对象的小波变换。在局部的意义下，他考虑了三种类型的分形函数。通过小波变换研究了它们的局部 Holder 连续性和 Scaling 条件。其后，对于一类特殊的分形函数——Weierstrass 函数：

$$W_\beta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}\cos(\pi n^2 x),\ \beta>1 \tag{7.1}$$

作了比较仔细的讨论，证明了在适当的小波变换下，W_β 可变为一个 Jacobi θ-函数。这样，利

用古典模函数论的结果可以给出 W_β 的某些 Scaling 状态。

Argoul 和 Arneodo 等人[17]研究了分形凝聚的小波变换,由此刻划了二维 diffusion—limited aggregates (DLA)模型的几何复杂性。

Arneodo, Grasseau 和 Holschneider[18]研究了多重分形的小波变换。他们利用这种技巧以及符号动力学作为工具,探讨了 Cantor 集上的概率测度及其局部 Scaling 性质。

最近,Hardin, Kessler 和 Massopust[20]研究了基于等距线性 FIF 的多分辨分析,他们得到了在 $L^2(R)$ 与 $C_0(R)$ 上的由基分形插值函数产生的小波正交基。同时给出了基于这种多分辨分析的分解与重构算法。

我们知道,分形插值函数是一种利用递归迭代的方式定义的函数,因而很难用经典的分析工具加以研究。如果能把它展开成某种级数形式,那将是一件十分有意义的工作。Barnsley 和 Harrington[5]曾经给出了分形插值函数的一个如下形式的级数表达式:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} S_n$$

其中 $S_j = O_n \odot S_{j-1}, j = 1, 2, 3, \cdots$

但这个表达式实质上仍是一种递归表达式。

[22]中最近给出了很广泛的一类分形插值函数的小波级数表达式,并在此基础上研究了它的有关性质。

考虑最简单的小波正交基——Haar 基:

$$\psi_{nk}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k) \tag{7.2}$$

其中 $n \geqslant 0, k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$, $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

对于满足如下条件的分形插值:$x_0 = 0, x_i = \frac{i}{N}, (i = 1, 2, \cdots, N)$

$$\begin{cases} L_n(x) = (x + n - 1)/N \\ F_n(x, y) = d_n y + q_n(x), \quad 0 \leqslant d_n < 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

我们有:

定理 7.1:设 $f(x)$ 是对应于(7.3)的分形插值函数,且 $N = 2^p$,(p 为确定正整数)则

$$f(x) = a_0\psi_0(x) + \sum_{n,k} a_{nk}\psi_{nk}(x) \tag{7.4}$$

并且如果 $k/2^n$ 的 N 进小数表示为 $0.p_1p_2p_3\cdots\cdots$ 其中 $(0 \leqslant p_i \leqslant N-1)$,令 $S_i = 0.p_1\cdots p_i$,(即 S_i 为 $k/2^n$ 的精确到第 i 位的 N 进小数表示),$q = [\frac{n}{p}]$,则有

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 q_i(x)dx}{N - \sum_{i=1}^{N} d_i} \tag{7.5}$$

对 $n \geqslant 0$,有:

$$a_{nk} = 2^{n/2}\sum^{q} \prod^{j-1} d_i \int_{k2^{-n}}^{k2^{-n}+2^{-n}} (q_{j}(N^j x - N^j S_j) - q_j(N^j x - N^j S_j + N^j 2^{-n-1})) dx + 2^{n/2} N^{-q-1} \prod^{q} d_{r}(\sum_{j \in A_q^+} \int_0 q_j(x)dx - \sum_{j \in A_q^-} \int_0 q_j(x)dx) + 2^{n/2} N^{-q-1} a_0 \prod_{i=1}^{q} d_i (\sum_{j \in A_q^+} d_j - \sum_{j \in A_q^-} d_j) \tag{7.5}$$

其中 $r_i = p_i + 1$，$\prod_{i=1}^{0} d_{r_i} = 1$，$A_q^+$ 与 A_q^- 分别为满足下列不等式(7.6)，(7.7)的正整数 j。

$$(k2^{-n} - S_q)N^{q+1} \leqslant j - 1 < ((k + \frac{1}{2})2^{-n} - S_q)N^{q+1} \tag{7.6}$$

$$((k + \frac{1}{2})2^{-n} - S_q)N^{q+1} \leqslant j - 1 < ((k + 1)2^{-n} - S_q)N^{q+1} \tag{7.7}$$

进一步，[23]中还给出了任意节点分划下分形插值函数的级数表达式。

§8 分形插值与地貌模拟

本节我们简述分形插值在地貌仿真等方面的一些应用。

我们考虑在§3中讨论过的分形插值过程：

$$\begin{cases} L_n(x) = a_n x + e_n & n = 1, \cdots, N \\ F_n(x,y) = d_n y + q_n(x) & 0 < |d_n| < 1 \end{cases} \tag{8.1}$$

其对应的分形曲线的复杂程度一般来说主要由纵向压缩因子 d_n 来控制。当 $|d_n|$ 较小时，曲线显得相对比较平滑些。因此可用分形插值函数来模拟一些物理过程，如电压曲线，脑电波等，以及一些统计数据的拟合，如股票价格的波动情况，特别是实际曲线的振荡比较激烈时的情况。

分形插值的另一个优点是可用它来生成一些复杂对象的轮廓，如云、山、海岸线等。因而在三维自然景物仿真中有较好的应用。

自然景物的产生和绘制已经成为计算机图形学中一个十分活跃的分支。近十年来，许多学者成功地利用分形几何作为工具，对自然界中的各种形态进行了计算机模拟[24][25]，特别是地形地貌的模拟。这方面的工作在地质、航天、气象、生态学等领域中有着十分重要的应用，而且是产生其它自然景物的基础。如果用传统的计算几何方法来进行地表曲面造型则存在困难：

如1、表面的不规则性很难用统一的解析函数式来表达。

2、如果一一表示其曲面的细节，则会导致数据量的庞大。

因此在自然景物仿真时，我们希望采用的方法应具有以下特点：

1°、能用少量的数据来刻划景物的大致轮廓或有关特征。

2°、能给出一个具有递归性质的算法，随着算法的进行，产生不断细化的无穷细节。

3°、在算法中加入随机量，从而使景物画面更为生动和逼真。

问题的关键是2°，采用分形方法生成曲面即可满足这样的要求，许多学者在这方面进行了研究，并产生了所谓的区域细分方法[26][27]以及函数合成方法。[28][29]

由于地形构造中需要满足一定的地貌特征，即要达到确定性与随机性的统一，不少研究人员提出了“受约束的分形地形造型方法”，并在很多方面进行了具体的探索。[30][31][32]其中都不可避免地要用到分形插值理论。

赵乃良、金以文等人[33][34][35]提出了一种简单、灵活的地形造型方法，该方法有机地结合了样条造型技术、离散化方法、分形插值方法以及分形布朗运动，能根据少量数据刻划地形特征产生预定的地形，并且呈现出较为丰富的地貌特征。

参考文献(略)

分形插值函数与分形平移曲面

杨 润 生

(南京师范大学数学系)

本文在$\mathbb{R}^3$中构造平移曲面，使其通过给定的N+1个点 (X_i,Y_i,Z_i)，$i=0, 1, \ldots, N$，为XY坐标面上一矩形域上的连续函数的图，并为某个双曲迭代函数系的吸引子，这样的曲面，一般具有非整数Hausdorff维数，是不可微的，称之为分形曲面。分形曲面在化学、冶金、曲面物理中有着重要应用。[1]讨论了通过XY面上三点（0，0，0）、（0，1，0）、（0，0，1）的一类分形曲面，这一讨论显得过于特殊。本文还讨论了与产生分形平移曲面的迭代函数系相关的码空间、抽象动力系数及分形插值函数的动差，就一类特殊情况讨论了分形平移曲面的分形维数。最后，我们研究了分形插值函数的拓广，讨论了与一类非双曲迭代函数系相关的分形插值函数、分形平移曲面。

一.分形平移曲面的构造

给定N+1个点 (x_i, y_i, z_i)，$i=0, 1, \ldots, N$。我们总可以假设，当$i\neq j$时，$x_i\neq x_j$，$y_i\neq y_j$。事实上，总可通过绕Z轴旋转角度$\theta(0<\theta<\pi/2)$，使$\mathrm{tg}\theta\in$
$\{\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i},-\frac{x_j-x_i}{y_j-y_i} \mid i\neq j,\ i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$，则这N+1个点在坐标系中横坐标与纵坐标互不相等。更进一步地，可令$x_0<x_1<\cdots<x_N$。令$I=[x_0,x_N]$，$I_n=[x_{n-1}, x_n]$，$n=1, 2, \ldots, N$，令$L_n: I\to I_n$为收缩同胚，$L_n(x_0)=x_{n-1}$，$L_n(x_N)=x_n$。取$\lambda\in[0, 1]$，$\alpha\in(-1, 1)$。定义二阶可微函数$q_n^\lambda: I\to R$，使得$q_n^\lambda(x_0)=\lambda(z_{n-1}-\alpha z_0)$，$Q_n^\lambda(x_N)=\lambda(z_n-\alpha z_N)$。又将$Y_i$按大小重新编号，$\bar{y}_0<\bar{y}_1<\cdots\bar{y}_N$，令$\bar{I}=[\bar{y}_0,\bar{y}_N]$ $\bar{I}_n=[\bar{y}_{n-1},\bar{y}_n]$，$n=1,2,\ldots N$。令$\bar{L}_n\ \bar{I}\to\bar{I}_n$为收缩同胚，$\bar{L}_n(\bar{Y}_0)=\bar{Y}_{n-1}$，$\bar{L}_n(\bar{Y}_N)=\bar{Y}_n$，定义二阶可微函数$\bar{Q}_n^\lambda:\bar{I}\to R$，使得$\bar{Q}_n^\lambda(\bar{y}_0)=(1-\lambda)\ (\bar{z}_{n-1}-\alpha\bar{z}_0)$，$\bar{Q}_n^\lambda(\bar{y}_N)=(1-\lambda)\ (\bar{z}_n-\alpha\bar{z}_N)$，其中$\bar{Z}_i$为$\bar{Y}_i$所对应插值点的竖坐标。令$W_{ij}^\lambda:I\times\bar{I}\times R\to I\times\bar{I}\times R$，$W_{ij}^\lambda(x,y,z)=(L_i(x),\bar{L}_j(y),Q_i^\lambda(x)+\bar{Q}_j^\lambda(y)+\alpha y)$，$K=I\times\bar{I}\times R$ 则 $\{K_j,W_{ij}^\lambda,i,j=1,2,\ldots N\}$ 为一迭代函数系。

定理1 在R^3上存在一个等价于欧几里得度量的度量，使得对于任意$\lambda\in[0,1]$，IFS $\{K_j\ W_{ij}^\lambda,\ i,\ j=1,2,\ldots,N\}$是双曲迭代函数系。

定理2 对于任意$\lambda\in[0,1]$，IFS $\{K\ \ W_{ij}^\lambda,\ i,\ j=1,2,\ldots,N\}$有唯一的紧致吸引子$G^\lambda$，它是通过给定点$(x_i, y_i, z_i)$，$i=0, 1,\ldots N$的定义在$I\times\bar{I}$上的一连续的平移曲面

$Z=f_1^\lambda(x)+f_2^\lambda(y)$

二. 与IFS$\{K;\ W_{ij}^\lambda,\ i,\ j=1,\ 2,\ldots,N\}$相关的码空间，抽象动力系及动差

令$\sum_N$为N个符号$\{1, 2,\ldots, N\}$的单边符号空间，$\Omega=\sum_N\times\sum_N=\{(\omega^1,\omega^2)\ \omega^1,\omega^2\in\sum_N\}$，其中$\omega^i=(\omega_1^i,\ \omega_2^i,\cdots\cdots)$，$\omega^i\in\{1,\ 2,\ldots,N\}$，$i=1,\ 2$；$j=1,\ 2,\ldots$

令 $\Phi:\Omega\to G^{\lambda}$, $\Phi(\omega)=\lim_{m\to\infty} W_{\omega_1\omega_1^2} W_{\omega_2\omega_2^2}\cdots W_{\omega_m^1\omega_m^2}(x,y,z)$, $(x,y,z)\in K$. 不难证明 Φ 是确定的连续到上映射，因此 Ω 为与 IFS{K; W^{λ}_{ij}, i, j=1, 2,.., N}相关的码空间

定理 3 令 $p=\begin{bmatrix} p_{11}\cdots p_{1N} \\ \cdots\cdots \\ p_{N1}\cdots p_{NN}\end{bmatrix}$, $p_{ij}\geq 0, \sum_{i,j=1}^{N} p_{ij}=1$,则 IFS{K; W^{λ}_{ij}, i,j=1,2,..,N}($\lambda\in$[0,1])允许唯一的 p-平衡测度 μ 令$\hat{\mu}$为$IFS\{I\times I, N_{ij}, i,j=1,2,..,N\}$的 p—平衡测度，其中

$N_{ij}(x,y)=(L_i(x), L_j(y))$, 令 $H^{\lambda}: I\times\bar{I}\to G^{\lambda}$, $H^{\lambda}(x,y)=(x,y,f_1(x)+f_2(y))$, 则 H^{λ} 为一同胚且对于所有 $I\times\bar{I}$的 Borel 子集 $\hat{B}$, $\hat{\mu}(\hat{B})=\mu(H^{\lambda}(\hat{B}))$ 如果 $g\in L^1(K,\mu)$, 则 $\int_{G^{\lambda}} g\,d\mu = \int_{I\times I} g\cdot H^{\lambda} d\hat{\mu}$

令 μ 为 IFS{ K; W^{λ}_{ij}, i,j=1,2,..,N} 的 p-平衡测度，£ 为[0,1]上的 Lebesque 测度，$\tilde{K}=K\times[0,1]$, $\tilde{\mu}=\mu\times$£,则$\tilde{\mu}$为$\tilde{K}$上的测度．定义$\tilde{S}:\tilde{K}\to\tilde{K}$, 当$(u,t)\in K\times[\sum_{i,j-1},\sum_{ij}]$时,

$\tilde{\varepsilon}(u,t)=(\omega^{\lambda}_{ij}(u), \frac{t-\sum_{ij}}{p_{ij}})$, 其中$\sum_{ij}$定义如下 $\sum_{10}=0$, 当 i>1 时，$\sum_{i0}=p_{11}+\cdots\cdots+p_{1N}+\cdots\cdots+p_{i-1,1}+\cdots\cdots+p_{i-1,N}$, 当 j≠0 时，$\sum_{ij}=p_{11}+\cdots\cdots+p_{1N}+p_{21}+\cdots\cdots+p_{i1}+\cdots\cdots+p_{i,j-1}$
则 $\tilde{\mu}$是相对于$\tilde{\varepsilon}$的不变测度 为此我们能定义与 IFS{ K, W^{λ}_{ij}, i, j=1, 2,⋯⋯,N} 相关的抽象动力系统($\tilde{K},\tilde{\varepsilon},\tilde{B},\tilde{\mu}$), 其中$\tilde{B}$为$\tilde{K}$的所有$\tilde{\mu}$可测子集的 σ—代数．

定理 4 对于任意 $\lambda\in$ [0,1], 设 IFS{K; W^{λ}_{ij},i,j=1,2,...,N}生成的过点(x_i, y_j, z_{ij}), i=0, 1, .., N 的分形平移曲面 $G^{\lambda}=\{(x,y,h(x,y))(x,y)\in I\times\bar{I}\}$. 令 $p=(p_{ij})$,

$p_{ij}=\frac{\text{矩阵}I_i\times I_j\text{面积}}{\text{矩阵}I\times\bar{I}\text{面积}}$, IFS{K, W^{λ}}的 p-平衡测度为 μ

1° 若 $L_i(x)$,i=1,2,..,N 均为线性映射，则 h 的第 n 次动差 M(n; μ)([1])被 h 的低次动差、插值点的横坐标、α 及函数$q^{\lambda}_i(x)$, q^{λ}_j (i, j=1, 2, ..,N)所唯一确定.

2° 若$L_i(x)$、$L_j(y)$、$q^{\lambda}_i(x)$及$q^{\lambda}_j(y)$(i, j=1, 2,..., N) 均为线性映射，则 h 的广义动差 M(n, l, m, μ) ([1]) 由{M (r, s, m; μ), r=0, 1, ..., n-1; s=0, 1, ..., l-1} U { M (r, s, t, μ)|t=0,1,...,m-1, r=0,1,...,n+m-t, S=0,1,...,l+m-t}及插值点的坐标和 α 所决定

三、分形曲面的分形维数

设 F 为 R^n 中的非空有界子集，记 F 的分形维数为 D (F)

定理 5 设 G^{λ} 为 IFS{K, W^{λ}_{ij}, i, j=1, 2, ⋯, N}生成的过插值点(x_i, y_j, z_{ij}), i, j=0,1, ⋯, N 的分形曲面，其中 $W_{ij}(x,y,z)=(L_i(x), L_j(y), q^{\lambda}_i(x)+q^{\lambda}_j(y)+\alpha z)$, $\frac{1}{N}<\alpha<1$, $L_i(x)$,$L_j(y)$,$q_i(x)$和 $q_j(y)$均为线性映射，x_i-x_{i-1}及y_j-y_{j-1}(y_j的含义见第一节) i, j=1, 2, .., N 均为常数，若插值点在 xoz 面和 yoz 面上的投影均不在一直线上，则当 $\lambda\in$(0,1) 时，$D(G^{\lambda})=4+2\log_N\alpha$，当 $\lambda=0$ 或 1 时，$D(G^{\lambda})=3+\log_N\alpha$

四. 与非双曲迭代函数系相关的分形插值函数及分形平移曲面

仍设 N+1 个插值点 (x_i, y_i, z_i), $i=0, 1,\dots,N$ 且当 $i\neq j$ 时, $x_i\neq x_j$, $y_i\neq y_j$. $I=[x_0, x_N]$, $I_n=[x_{n-1}, x_n]$. 令 L_n 在 I 上有定义且 $L_n: I_n'\to I_n$ 为 Lipschitz 同胚映射, 其中 $I_n'=[x_l, x_m]$, $l<m$. $L_n(x_l)=x_{n-1}$, $L_n(x_m)=x_n$, $h_1, h_2\in I_n'$, $d(L_n(h_1), L_n(h_2))\leq r_n d(h_1, h_2)$, $r_n>0$. 若 $I_j\subset I_i'$, 令 $m_{ij}=1$, 否则 $m_{ij}=0$, 则得到一个 $N\times N$ 阶矩阵 $M=(m_{ij})$. 设 M 不可约且$\{L_1, L_2,\dots, L_N\}$相对于 M 是循环收缩的, 即对于 M 确定的每个初等环 $C=(i_1, \dots, i_n)$, $L_{i1}\circ L_{i2}\cdots L_{in}$ 是收缩映射, 亦即 $r_{i1}r_{i2}\cdots r_{in}<1$. 取 $\lambda\in[0, 1]$, $\alpha\in(-1, 1)$. 给定二阶可微函数 $q_n^\lambda: I_n'\to R$, 使得 $q_n^\lambda(x_l)=\lambda(z_{n-1}-\alpha z_l)$, $q_n^\lambda(x_m)=\lambda(z_n-\alpha z_m)$. 将 y_i 按大小重新排列 $y_0<y_1<\cdots<y_N$, 令 $\bar I=[y_0,y_N]$, $\bar I_n=[y_{n-1},y_n]$, $n=1, 2, \dots, N$. 令 $\bar L_n$ 在 $\bar I$ 上有定义且 $\bar L_n:\bar I_n'\to\bar I_n$ 为 Lipschitz 同胚映射, $\bar I_n'=[y_l, y_m]$, $\bar L_n(y_l)=y_{n-1}$, $\bar L_n(y_m)=y_n$. 若 $\bar I_j\subset\bar I_i'$, 令 $p_{ij}=1$, 否则 $p_{ij}=0$, 得到一矩阵 $P=(p_{ij})$, 设 P 为不可约的且$\{\bar L_1,\dots,\bar L_N\}$ 相对于 P 也是循环收缩的. 令二阶可微函数 $q_n^\lambda:\bar I_n'\to R$, 使得 $q_n^\lambda(y_l)=(1-\lambda)(\bar z_{n-1}-\alpha\bar z_l)$, $q_n^\lambda(y_m)=(1-\lambda)(\bar z_n-\alpha\bar z_m)$, 其中 $\bar z_i$ 为 y_i 所对应插值点的竖坐标. 令 $F_i^\lambda: I_i'\times R\to I_i\times R$, $F_i^\lambda(x, y)=(L_i(x), q_i^\lambda(x)+\alpha z)$, $G_i^\lambda: \bar I_i'\times R\to\bar I_i\times R$, $G_i^\lambda(y,z)=(\bar L_i(y), q_i(y)+\alpha z)$.

定理 6 在 R^2 上存在度量 d 等价于欧几里得度量, 使得 IFS$\{I\times R; F_i^\lambda, i=1, 2,\dots, N\}$ 相对于矩阵 M 是循环收缩的.

由定理 6 及[5]的定理 2 知, 存在唯一一组由 $I\times R$ 的有界闭集 B^1, $B^2,\dots,B^N$ 组成的 N 重 $B=(B^1,\dots,B^N)$, 使得 $B^i=\bigcup_{l:m_{il}=1}F_i^\lambda(B^l)$. 同理, 存在一组 $\bar I\times R$ 的有界闭集 $C^1,C^2,\dots,C^N$, 使得 $C^j=\bigcup_{k:p_{jk}=1}G_j^\lambda(C^k)$. 令 $A_1=\bigcup_{i=1}^N B^i$, $A_2=\bigcup_{j=1}^N C^j$.

定理 7 IFS$\{I\times R; F_i^\lambda, i=1, 2, \dots, N\}$如上定义, 则存在连续函数 $f_1^\lambda: I\to R$ 满足 $f_1^\lambda(x_i)=\lambda z_i$, $i=0, 1, \dots, N$ 且 A_1 为 f_1^λ 的图, 即 $A_1=\{(x, f_1^\lambda(x))|x\in I\}$. 同样地, 存在连续函数 f_2^λ: $\bar I\to R$ 满足 $f_2^\lambda(y_i)=(1-\lambda)z_i$ 且 A_2 为 f_2^λ 的图.

令 $W_{ij}^\lambda: I_i'\times\bar I_j'\times R\to I_i\times\bar I_j\times R$, $W_{ij}(x,y,z)=(L_i(x),\bar L_j(y),q_i^\lambda(x)+q_j^\lambda(y)+\alpha z)$.

令 $B^{ij}=\{(t, s, f_1^\lambda(t)+f_2^\lambda(s))\mid(t, s)\in I_i\times\bar I_j\}$, 则 $B^{ij}=\bigcup_{(l,k:m_{il}=1,\ p_{jk}=1)}W_{ij}^\lambda(B^{lk})$. 令 $A=\bigcup_{i,j=1}^N B^{ij}$, 则 $A=\{(x,y,f_1^\lambda(x)+f_2^\lambda(y))|(x,y)\in I\times\bar I\}$ 为以两族曲线

$$\begin{cases}z=f_1^\lambda(x)+f_2^\lambda(C_1)\\ y=C_1\end{cases}\text{及}\begin{cases}y=f_1^\lambda(C_2)+f_2^\lambda(y)\\ x=C_2\end{cases}$$

$(C_1\in\bar I,C_2\in I)$为母曲线的平移曲面, 其曲面通过点(x_i, y_i, z_i), $i=0, 1, \dots, N$.

参考文献

1. P R Massopust Fractal Surface, J Math Anal and Appl 151 (1990) 275–290
2. M F.Barnsley, Fractal Functions and Interploatin Constr Approx 2 (1986) 303–329
3. M F.Barnsley, Fractal Everywhere Academic Press 1988.
4. M F.Barnsley & A N Harrington The Calculus of Fractal Interpolation Function J Approx Th 57 (1989) 14–34
5. U Feiste A Generalization of Mixed Invariant Sets, Mathematika, 35 (1988) 198–206
6. 杨润生 与循环收缩IFS相关的移位动力系 应用数学 4 (1992) 117~118.

迭代函数系(IFS)吸引子盒子维数求解初探[①]

杨海浪　顾其钧

(南京大学数学系)

摘要　本文提出了一种有效的求解迭代函数系(IFS)吸引子盒子维数的方法.首先,此法可以求得任何由 IFS 所确定的分形集维数并对 IFS 无任何先决条件，其次,此法所求的分形维数(盒子维数)精度还是可以接受的.实为一可行实用的方法.同时,我们用此法也估算了几个至今未见报导的著名分形集的盒子维数.另外,本文还分析了几个迭代函数系(IFS)吸引子的逼近算法.并就此给出了一些结论.

0　引　言

我们知道,一大类分形集可定义如下:(X,d)是一个完备的距离空间,若 X 上的 N 个压缩函数组$S=\{f_1,f_2,\cdots f_N\}$被给定,A 是 X 上的一个有界子集,如果有$A=\bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$,则称 A 关于 S 是不变的.这不变集称为分形集或吸引子[4].如果 IFS 是全不连通的或刚刚接触的,我们可以通过解方程$\sum_{i=1}^{N}|s_i|^D=1$来求得分形集的维数(其中,$s_i,i=1,2,\cdots,N$是相似变换 f_i 的压缩因子)[9].若 IFS 是重迭的,则要求得分形集维数就相当困难,有时是不可能的.就此问题,本文利用求 Box 维数的思想,Hausdorff-Besicovitch 维数的定义,分形集逼近的"重点"排除算法[2]和二阶方差判别.有效的构造了一种求解 IFS 维数的方法.此算法求分形集的维数精度较高,算法简单,计算速度快.特别,此算法在 IFS 是重迭时,也能求得其维数,实为一可行方法.最后,并就平面上一些著名的分形集给出了维数的估计值.

1　分形集维数的基本概念

集合 A 的 Hausdorff-Besicovitch 维数D_H是一个临界维数,当测度M_d从零变到无穷时有:

$$M_d=\sum r(d)\delta^d=r(d)N(\delta)\delta^d \underset{\delta\to 0}{\to}\begin{cases}0, d>D_H\\ \infty, d<D_H\end{cases} \tag{2.1}$$

我们称 M_d 是集合的 d 维测度.当$d=D_H$时,M_d是一有限的正常数[10]

Hausdorff-Besicovitch 维数 D_H 是用不一样大小的"小球"来覆盖集合 A 的,由定义求 D_H 是很困难的.而 Mandelbrot 定义的分形集的维数是:Hausdorff-Besicovitch 维数 D_H 大于拓扑维数 D_H .故由 Mandelbrot 定义的分形集维数也是很难直接求出的.Barnsley 定义的分形集的维数是:任给 $\delta>0$,N(A,δ)表示以半径为 δ 闭球来覆盖集合 A 所需的最少球数,若$\lim_{\delta\to 0}[\frac{\ln(N(A,\delta))}{\ln(1/\delta)}]=D$是存在,则称 D 为分形集 A 的维数[9].由于覆盖是任意的,在计算机上,D 也不易求得.若将覆盖集合 A 的所有"球"均改成一样大小的刚刚接触的正方形盒子,

---

①国家自然科学基金资助项目

即可求得分形集的维数.则有:

定理 1[6] (盒子定理),(X,d)是距离空间,设$A \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$,这里欧氏距离被引用.我们用刚刚接触的边长为$\frac{1}{2^n}$的闭的正方形的盒子来覆盖$\mathbb{R}^m$, 令$N_n(A)$表示边长为$\frac{1}{2^n}$的盒子和分形集 A 相交的个数,如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(N_n(A))}{\ln 2^n}=D \tag{2.2}$$

则称分形集 A 的维数为 D. 一般我们称 D 为盒子维数 .

推论2[11] 在定理1中,若将$\frac{1}{2^n}$改成$\frac{1}{n}$,令$N_n(A)$表示边长为$\frac{1}{n}$的盒子和分形集相交的个数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(N_n(A))}{\ln 2^n}=D$.则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(N_n(A))}{\ln(1/n)}=D. \tag{2.3}$$

另外一类很重要的 IFS 分形维数的确定已由定理 3 给出 .

定理 3[9] 设$\{\mathbb{R}^m; f_1, f_2, \cdots, f_N\}$是双曲 IFS.A 是吸引子 . 假设 f_i 是压缩因子为 s_i,$i \in \{1,2,\cdots,N\}$ 的相似变换 . 如果 IFS 是全不连通的或者是刚刚接触的 , 则吸引子的分形维数可由方程

$$\sum_{i=1}^{N}\left|s_i\right|^D=1,\quad D\in[0,m]$$

唯一确定 , 并且分形维数 D 就等于 $Hausdorff-Besicovitch$ 维数 D_H. 若 IFS 是有重叠的 , 设此分形维数为 D, 则由方程$\sum_{i=1}^{N}\left|s_i\right|^{\bar{D}}=1, \bar{D}\in[0,\infty]$求得$\bar{D}$仅能给出个上界 , 即有 $D \leqslant \bar{D}$.

据定理 3,显然,若 IFS 是重迭的,那么如何去求此一大类分形集的维数呢?至今还没有一个很好的方法.文[7]虽给出了一种估计方法,但算法太复杂.我们根据自己对 Hausdorff-Besicovitch 维数、Box 维数以及分形集逼近的研究和上机大量的试算,构造了下述迭代函数系(IFS)吸引子分维的求解方法.首先,给定一系列网格,并完全精确的求得此网格上的逼近分形集.其次,利用维数的定义和定理 1 或推论 2 在有限的内存中进行初算.最后,根据一阶方差、二阶方差进行判别,即可求得此维数,我们不妨也称其为盒子维数.

2 逼近分形集的"重点"排除算法

我们知道,求盒子维数最重要的一点就是对给定的精度 ε 一定要能精确的数出以 ε 为边长的正方形复盖分形集的个数.这样,盒子维数求的就比较准确.针对 IFS,当我们取一系列的精度 ε_i 时(i=1,2,…N),我们要求:在给定精度 ε_i(i=1,2,…N)下,所逼近的分形集的点数正好就是以 ε_i(i=1,2,…N)为边长的正方形复盖分形集 A 的个数.我们从这一原则出发,对 S.dubuc 描述的算法[4]和我们自己逼近分形集的研究[1][2][3][6].我们认为:选择算法要考虑三点,第一,从理论上讲,对给定的精度 ε,要能保证逼近的分形集和分形集 A 的 Hausdorff 距离一定要小于或等于 ε,最好是等于 ε.第二,逼近分形集的算法要有明确的终止准则.第三,逼近算法要有通用性,对任何给定的 IFS,算法均可运行.据文献所述和试算:确定算法

(Hutchinson's approximation)[4]和快速算法[1]缺少通用性.如分形曲线 Barnsley fern 就无法逼近.随机算法(Barnsley−Demko's Contruction)[4]没有明确的终止准则,在给定的精度下,不知道迭代次数到底是多少?[4.Algorith B]图的算法(Graphic algorithm)[4]在理论上已证明逼近分形集的精度不够.[4;TH10]分块投影算法[6]和投影算法[3]虽有终止原则也证明了逼近的精度小于或等于 ε,但因分块有时分的不均,但算法本身为了保证小于给定的精度是以最大的块为依据来逼近的,所以,在一些小的块上所逼近的点数就较大,这样就影响了盒子维数的精度.而"重点"排除算法[2]是不依赖于块的大小仅依赖机器内存的算法.并且已从理论上证明了逼近的分形集是小于或等于精度 ε 的,有明确的终止原则并且对任何的 IFS,均能逼近.等等.从以上分析,我们发现,只有"重点"排除算法是较理想的,故在本文中,我们就没有给出别的算法的试算结果,只选择了"重点"排除算法[2]:

定理 4[2] 设 R 是舍入运算(在给定的屏幕精度 $\varepsilon>0$ 下,$\forall x\in X$,有 $d(R(x),x)<\varepsilon$,Q 是 R 的复原运算(对 $\forall x\in X$,有 $Q(R(x))=x$)对于任意给定的非空集 $B_0\subset A\subset\mathcal{H}(X)$,由"重点"排除算法构造的集合序列 $\overline{B_i}\,(i=1,2,\cdots)$,必存在一整数 $L>0$,并有

$$\bigcup_{i=1}^{L}\overline{\overline{B}}_i\cup E_\varepsilon=A \text{ 和 } h(A,\bigcup_{i=1}^{L}\overline{\overline{B}}_i)<\varepsilon, E_\varepsilon,\overline{\overline{B_i}}\subset\mathcal{H}(X), i=1,2,\cdots,L$$

推论 5[8] 由"重点"排除算法构造的集合序列 $\overline{B_i},(i=1,2,\cdots,L)$ 必有 $\bigcup_{i=1}^{L}\overline{B_i}=R(A)$.

3 迭代函数系 (IFS) 吸引子分维的求解方法

据推论 5, 我们给定精度 $\varepsilon_i=\frac{1}{i}, i=1,2,\cdots$, 由"重点"排除算法逼近的分形集实际上就是分形集在此 $\frac{1}{i}$ – 网格上的一个投影, 也就是说, $\bigcup_{i=1}^{L}\overline{B_i}$ 是推论 2 中的 $\overline{N_i}(A)$. 再由推论 2 的结论, 我们即可求得分形集的维数. 但实际上机计算, 并不如此简单, 我们由 *Hausdorff – Besicovitch* 维数 D 定义和 (2.1) 式知, 有

$$N(\delta)\sim\frac{1}{\delta^D} \text{ 当 } \delta\to 0 \text{ 时} \tag{4.1}$$

也就是说, 在给定 $\delta>0$, $N(\delta)$ 和 $\frac{1}{\delta^D}$ 是成比例的. 若在 (2.1) 式中, 我们取边长为 $\delta_i=\frac{1}{i}$ 的一样大小的正方形盒子, 由前述推论 2, 则仍有 (4.1) 式成立, 即有

$$\overline{N_i}(A)\cdot\delta_i{}^D\approx C, i=1,2,\cdots \tag{4.2}$$

$$D\approx\frac{\ln(N_i(A))-\ln C}{\ln\delta_i}, i=1,2,\cdots \tag{4.3}$$

用推论 2 并结合 (4.3) 式去求分形集的维数困难有三. 其一是, 计算机内存有限, 当精度较小时求得 $N_i(A)$ 较困难. 这将有待于逼近算法的进一步发展. 其二是以推论 2 求解维数是个极限过程, 改进即使 (4.3) 式中 i 较大, lnC 对所要求的维数 D 仍然影响很大. 这是由对数性质所决定的. 其三是若我们用双对数坐标求维数时, 无法知道所求维数的精度. 针对上述问题, 我们考虑, 令 $\varepsilon_i=\frac{1}{10\times i+n_0}, i=1,2,\cdots,M$. $n_0>0$ 给定的整数. 对适当给定的 d, 代入 (4.2) 式. 即 $C_i=\overline{N_i}(A)\cdot\delta_i^d, i=1,2,\cdots,M$. 再据 (2.1) 式知 C_i 近似的为 d 维集合 A 的测度, 是一个不变的常数. 现在, 我们就设法找到一适当的 d, 使其尽可能的满足 M

个等式．故可用一阶方差或二阶方差来判 $C_i, i=1,2,\cdots M$ 互相靠近的程度 我们即可反复调整 d, 以使 $C_i, i=1,2,\cdots M$ 的方差最小．此时，即可认为 d 为分形集的维数．

实际计算中，我们根据计算机内存，对某个适当的 n_0，在给定的精度 $\delta_i=\frac{1}{n_0+i\times 10}, i=1,2,\cdots M$ 下，求得 M 个逼近的分形集的盒子数 $N_i(A), i=1,2,\cdots M$ 和 $d_i=\frac{\ln 1/N_i(A)}{\ln\delta_i}, i=1,2,\cdots$. 据推论 5 知，$N_i(A)$ 必等于 $R_i(A)$ 的点数）. 此时，再去掉那些数据 $C_i=N_i(A)\cdot\delta_i^d, (i=1,2,\cdots M)$ 的数学期望 $E\xi=\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i}{M+1}$ 和均方差 $D\xi=\sum_{i=1}^{M}(C_i-E\xi)^2$. 若方差 $D\xi<\varepsilon$,(ε 为给定的一较小的正数）.
则 d 即为此分数维的估计维数．否则，适当的调整 $d=d\pm\triangle d$, 使 $D\xi$ 渐渐变小并停止下降为止．

定理 6 在上述的维数求解算法中，对适当大的 n_0，若令 M 趋于无穷大，则 d 即为分形集 (IFS) 的维数．

证明：根据定理 4 和推论 5, 对给定的精度 $\delta_i=\frac{1}{n_0+i\times 10}, i=1,2,\cdots, N_i(A)$ 实际上分形集的一个投影．若 M 趋于无穷大，则由推论 2 的结论知有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln N_n(A)}{\ln 1/n}=D$. 再由极限原理，此极限的方差 $D\xi$ 必趋于零．

证毕.

4 数值实验的结果

我们针对定义在单位正方形上的分形集,用 Turbo-Basic 语言,在 IBM-386 微机上编制了程序,并求解了几个分形集的盒子维数.其中,IFS 的分形集的图形见图 1,分形集的求解(估算)维数见表 1,表 1 中的第一列是分形集的名称,第二列为 Hausdorff-Beicovitch 维数.分形集的逼近区域是从 70×70 的网格到 170×170 的网格上进行的.所有初始点(逼近算法)均取坐标原点,另外,在表 2 中,我们也给出了以"重点"排除法三组逼近分形集的原始数据.

5 结论

本文给出的求解分形集维数的方法实际上求的是迭代函数系(IFS)吸引子的盒子维数.所不同的是最后求双对数坐标中斜率(分形维数)用了均方差进行估计.故本算法求的分形维数和盒子维数的误差界是一致的,由定理六,只要计算机内存足够的大,所求的维数就越精确.本算法的最大优点是解决了求有重迭的(IFS)迭代函数系吸引子的分维问题,而目前就我所知,有重迭的 IFS 的分维求解问题是个没有解决的问题.另外,就此方法,我们求得了一类著名分形集的维数,其中,Koch Curve. Sierpinski gasket. Peamboyant Crown 的盒子维数未见报导.就已知的分形维数,在微机有限的内存中,用此方法,所求的维数,精度还是可以接受的.从而证实此方法是一种实用,高效,可行和算法简明的方法.就未知计算机内存限制,我们所求的维数仅是一个估计值,另外,本文同时也检证了 K.Falconer 在文[8]中所给出的结论:盒子维数总是大于或等于 Hausdorff-Besicovitch 维数.

参 考 文 献

1 顾其钧、杨海浪等，逼近分形集的快速算法，南京大学学报数学半年刊VoL.9NO.2. 1992p199—203

2 杨海浪,顾其钧,逼近分形集的二种实用算法,南京大学学报数学半年刊即将发表.

3 杨海浪,分形集的逼近算法,高等学校计算数学学报即将发表.

4 Dubuc. S, Approximations of fractal sets, J. comput. Appl. Math.29(1990)79—89

5 Mandelbrot B.B, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, CA,1982

6 杨海浪,分形集的逼近的分块投影算法,南京大学学报(自然科学)93年四期上待发表.

7 金宁,压缩映射集的共形与U-对,南京大学学报(自然科学).1992;28(1);1-10

8 杨海浪,一种求迭代函数吸引子分维的有效方法,已投高等院校计算数学学报.

9 Barnsley.M ,Fractal everywhere , San Diego:Academic press.Inc,1988

10 Feder J,FRACTALS , 1988 Plenum press,New York

表 1

分形集名称	Hausdorff 维数	求解的盒子维数	误差
Von koch curve	1.2628	1.266	0.0032
Sierpinski gasket	1.58550	1.558	0.003
Barnsley fern		1.871	
Levy curve		1.925	
Peano curve	2.0000	2.0000	0 0
Flamboyant crown		1.746	

表 2

网格数	70×70	80×80	90×90	100×100	110×110	120×120	130×130	140×140	150×150	160×160	170×170
精 度	1/70	1/80	1/90	1/100	1/110	1/120	1/130	1/140	1/150	1/160	1/170
Sierpinski gasket	1059	1325	1614	1889	2121	2557	2884	3148	3652	3939	4344
Levy curve	1221	1657	2025	2469	2889	3473	3801	4491	5176	6111	6740
Peano curve	2452	3202	4052	5002	6052	7202	8452	9802	11252	12802	14452

迭代函数系(IFS)吸引子的逼近算法①

杨海浪　顾其钧

(南京大学数学系)

本文就迭代函数系(IFS)吸引子逼近问题,论述了十种可行算法,并就其中七个算法结合九个著名的分形集给出了在小区域(101×101象元)上或大区域(350×350象元)上的数值实验的结果.前三种算法为经典的方法,后四种为作者给出的逼近算法,并且我们也给出了理论证明.就小区域上逼近而言,我们认为,"重点"排除算法是较实用可行的.就大区域,我们认为,投影算法是可取的.

1 引言

我们知道,一大类分形集是如下定义的:设(X,d)是一个完备的距离空间,给定了X上的压缩映射组$f_1,f_2,\cdots,f_m$,记$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$.A是X的一个非空子集,如果具有性质$A=\bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)$,则称A关于F是不变的.有时也称不变集A是吸引子.Hutchinson[2]和Williams[3]已经证明,对于给定的压缩映射组F,X上存在唯一的非空紧子集A,它在F作用下是不变的.在压缩映射组$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$给定情况下,对应的分形集A(就我们所知)至少已有十种算法可以逼近它.这些算法分别由Hutchinson[2],Barnsley−Demko[4],Williams[3],Dubnc−Elqortobi[5]和杨、顾[1].[7].[8].[9],独立提出的.在计算机上我们对这些算法均做过数值实验.故在本文中,我们根据理论和试算的结果并结合方法的难易程度有选择的给出了几种较好的算法.

2 迭代函数系(IFS)吸引子的逼近算法

据文[5]所述,算法C是计算所有合成运算的不动点,计算时间太长,算法D,E,实际上相差不大.故本文中我们实际选取的方法如下:

算法A(Hutchinson's approximation)确定算法,详细定理及算法过程见文[2][5]

算法B(Barnsley−Demko's Construction)随机算法,详细定理及算法步骤请见文[4][5].

算法E(Graphic algorithm)图的算法详见文[5].

算法F(不动点排除算法[7])

设ε为屏幕精度,$IFS\ \{X;f_i,i=1,2,\cdots,m\}$和相应压缩因子$s_i(i=1,2,\cdots,m)$被给定,$B_i(i=0,1,\cdots)$为有限的集合.

①国家自然科学基金资助项目

(c) 对 $i=1$ 到 n, 根据 $IFS(\delta)$, 将 $\bar{A}$ 分别分块的投影到屏幕上 . 结束运算 .

$L_{IFS(\delta)}$ 为 n 个迭代函数中压缩因子最大的一个.

定理 3[1] 对于给定的屏幕精度 ε, 用算法 H 逼近的分形集在 Hausdorff 距离下, 是小于或等于 ε.

算法 P(投影算法 [8])

(a) 设 $IFS=\{X;f_i=T_iX+b_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 和屏幕精度 ε 给定 ,S 为其压缩因子, 我们选取适当的 $\alpha\geqslant S$. 则有 $T=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$.

(b) 根据 T, 我们构造一新的 IFS, 即有

$$IFS(T)=\{X;W_i=T_ix+Tb_i,i=1,2,\cdots,m.\}$$

(c) 对于新的 $IFS(T)$, 我们利用 " 重点 " 排除算法即可求得一逼近于 TA 的分形集 $\bar{A}$.

(d) 对 $i=1$ 到 m, 计算投影变换 $P_i=f_i(T^{-1}(\bar{A}))$.

(e) 再对 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 向屏幕上投影 (舍人运算).

定理 4[8] 设 $\{X;f_i=T_ix+b_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 是一个压缩因子为 S 的 IFS,$0\leqslant S<1$,A 是吸引子 . 我们找一变换 $T:X\to X$ 对任意的 $B.C\subset\mathcal{H}(X)$, 均有

$$|T|\neq 0,h(T(B),T(c))\leqslant\alpha.h(B,C)\ ,\ h(T^{-1}(B),T^{-1}(c))\leqslant\alpha^{-1}.h(B,C)\ ,\ S\leqslant\alpha.$$

则我们可以构造一新的函数组 $\{X,f_i=T_ix+b_i,i=1,2,\cdots,m\}$. 此新的函数组必仍为一个压缩因子为 S 的 IFS. 对任意的 $B_0\subset\mathcal{H}(X)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}W^n(B_0)=TA.$$

$$(W^0(B_0)=B_0,W^{n+1}(B_0)=W(W^n(B_0)),n=0,1,2,\cdots.W(B_0=\bigcup_{i=1}^{m}w_i(B_0))$$

定理 5[8] 在定理 4 的条件构造和结论下 , 对任意的屏幕精度 ε 和任意的集合 $B_0\subset\mathcal{H}(X)$, 只要取

$$N=[\frac{\ln(\varepsilon/h(TA,B_0))}{\ln S}]+1.$$

则当 $n\geqslant N$ 时 , 有

$$h(TA,W^n(B_0))\leqslant\varepsilon \text{和} h(A,T^{-1}(W^n(B_0))\leqslant\varepsilon/\alpha$$

根据 IFS, 对 $W^n(B_0)$ 进行投影求并 , 则有

$$h(A,\bigcup_{i=1}^{m}f_iT^{-1}(W^n(B_0)))\leqslant\varepsilon$$

这里 α 选的要适中 ,$B_i\bigcup_{i=1}^{m}P_i$ 即为逼近的分形集 .

3 分形集逼近算法的数值比较

(a)选取适当的 $B_0 \subset A \subset \mathcal{H}(X)$,计算$N = [\frac{\ln(\varepsilon / h(A,B_0)}{\ln S}] + 1$和$B_1 = F(B_0) \setminus X_f$.

(b)对 i = 2 到 N,计算$B_i = F(B_{i-1})$

(c)对 i = 1 到 N+1,将B_{i-1}投影到屏幕上.这里,$h(A,B_0)$为集合A,B_0之间的 Hausdorff 距离,X_f为 F 所有不动点的集合

$$S = \max\{s_i, i = 1,2,\cdots,m\}, F(B_0) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(B_0).$$

则$\bigcup_{i=1}^{N+1} B_{i-1}$即为逼近的分形集.

定理 1[7] 设$\{X;f_i,i=1,2,\cdots,m\}$是压缩因子为 S 的 IFS.A 为吸引子,对于任意的 $B_0 \subset A \subset \mathcal{H}(X)$,由算法 F 产生的集合序列 B_i, i = 1,2,…,N,则必有

$$\lim_{N \to \infty} \bigcup_{i=0}^{N} B_i = A \quad .$$

算法 G ("重点"排除算法)

IFS $\{X;f_i,i=1,2,\cdots,m\}$已给定,设 ε 为屏幕网格精度,R 为此网格上的舍入算子,Q 为复原算子.

(a)对于任意的 $B_0 \subset A \subset \mathcal{H}(X)$,令集合$\overline{B_0} = B_0, \overline{B_0} = R(B_0), i = 1$.

(b)计算$R(F(\overline{B_{i-1}}))$并存入集合$\overline{B_i}$,同时在屏幕上描绘$\overline{B_i}$

(c)计算$\overline{B_i} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} B_j$并存入集合$B_i$.

(d)不妨设$R(X_1),R(X_2),\cdots,R(X_p) \in \bigcup_{j=0}^{i} \overline{B_j}$是属于同一象元中的 P 个点,再设$R(X_1) \in B_i$,则对 j 从 1 到 m,k 从 2 直到 P,判断$R(f_i(x_k))$和$R(f_j(x_1))$两者的关系,若相等则计算$Q(B_i)$并存入集合$\overline{B_i}$.否则有$\overline{B_i} = Q(B_i) U Q(R(X_k))$.

(e)终止准则的判定:i = i+1,若$\overline{B_i}$为空集则结束运算否则转(b)继续.

定理 2[7] 设 R 是舍入算子(在给定的屏幕精度 ε>0 下,∀ x ∈ X,有 Q(R(x)) = x),对任意给定的 IFS 和非空集 $B_0 \subset A \subset \mathcal{H}(X)$,由"重点"排除算法而构造的集合序列$\overline{B_i}$, i = 1,2,….必存在一整数 L > 0,有

$$\bigcup_{i=1}^{L} \overline{B_i} U E_\varepsilon = A, h(A, \bigcup_{i=1}^{L} \overline{B_i}) < \varepsilon. E_\varepsilon, \overline{B_i} \subset \mathcal{H}(X), i = 1,2,\cdots,L$$

这里 h 是 *Hausdorff* 距离 ,A 为 *IFS* 的吸引子 .

则$\bigcup_{i=1}^{L} \overline{B_i}$为分形集 A 的逼近集 .

算法 *H*(分块投影算法 [1])

(*a*) 设 *IFS* $\{X;f_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 和屏幕精度 ε 给定 , 取其一适当的正数 δ, 利用文 [5] 中的引理 5, 对 *IFS* 进行适当的划分 , 则有 *IFS*(δ), 不妨设 *IFS*(δ) 的个数为 n

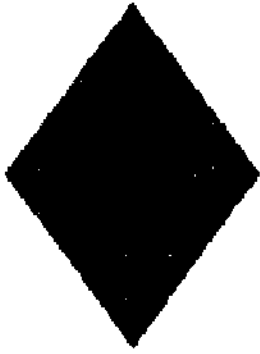
(*b*) 对 *IFS*(δ), 仍利用 " 重点 " 排除算法 , 先求得在精度 $\varepsilon / L_{IFS(\delta)}$ 下的逼近分形集$\widetilde{A}$

Table 1 (Comparisons of algorithm)

	Takagi function			Von Koch curve			Sierpinski gasket		
A	1024	290	7.3	1024	362	4.8	6561	1945	32.8
B	4506	305	19.8	2800	347	14.1	13305	2026	61.3
E	576	287	3.7	1784	445	8.0	6525	2174	28.8
F	1024	290	4.4	1024	364	4.0	6561	1946	24.4
G	512	251	3.1	1556	364	6.8	5853	1841	24.5
H	877	285	3.9	784	326	3.7	2244	1874	10.5
P	877	285	3.6	785	324	3.4	2245	1874	5.6
	Barnsley fern			flamboyant crown			Levy curve		
A	87380	531	294.6	15625	2209	63.4	16384	2699	116.7
B	18265	2228	106.9	21568	2225	112.7	20151	2922	89.7
E	9888	2471	42.3	12515	2502	50.7	6774	3386	34.9
F	43691	532	159.4	15625	2209	54.4	16384	2700	67.7
G	8112	1995	34.4	11800	2340	45.0	5094	2528	24.3
H	7161	2008	44.3	6935	2135	29.3	4344	2503	20.8
P	7158	2005	43.6	7446	2339	28.9	3924	2652	14.1
	dragon			peano curve			Sierpinski carpet		
A	16384	2924	116.6	59049	5183	213.8	32768	7850	120.6
B	21915	3020	97.7	24707	5081	159.0	42069	7492	257.3
E	7052	3525	36.0	46827	5202	171.8	64840	8104	240.1
F	16384	2925	67.7	44287	5182	148.1	28084	7851	94.5
G	6152	3058	28.9	46827	5134	168.3	64840	7800	234.6
H	4748	2780	21.4	8505	4894	43.3	9408	7750	41.5
P	4337	2968	15.5	7093	5159	25.0	10105	8028	22.1

Table 2 (Large area Comparisons of algorithm)

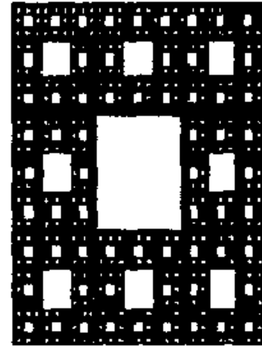
	Takagi function			Von Koch curve			Sierpinski gasket		
B	15771	1156	68.7	9327	1735	46.4	91500	14467	418.9
H	3187	1025	13.4	2181	1690	9.3	15561	13894	63.3
P	3175	1031	12.8	2181	1690	9.3	14650	13972	30.3
	Barnsley fern			flamboyant crown			Levy curve		
B	113270	20351	551.1	150000	17920	789.4	127760	27414	568.9
H	68443	19142	398.9	45195	18989	192.1	34680	26194	142.8
P	54677	19068	261.1	48798	19713	194.7	37817	27403	100.1
	dragon			peano curve			Sierpinski carpet		
B	139776	32875	623.1	175159	57778	1096.7	230000	73759	1359.8
H	40138	31069	167.9	72082	61172	227.7	94544	79041	410.5
P	42029	32157	117.9	72082	61172	190.8	93601	80010	198.0



Peano curve



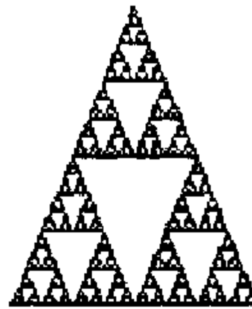
Barnsley fern



Sierpinski carpet



Von Koch curve



Sierpinski gasket



Takagi function



Levy curve



dragon



flamboyant crown

FIG. 1. Fractal sets.

本文中,我们就所述的七种算法,在 ST/386 上用 Turbo-Basic 语言均进行了试算.其中所选用的著名分形集的迭代函数系(IFS)定义见文[5],它们的图形见图 1,我们所选用的 9 个分形集均定义在单位正方形内,并且在计算机屏幕上占有 101×101 个象元,七种算法的参数如下:

算法 A,B,E 参见文[5]

算法 F,G,参见文[5].

算法 H,参见文[1].

算法 P,参见文[8].

对每一个分形集,所有算法的初始点均取自坐标原点.计算结果见表 1.其中,第一行为算法 A 的数据.第二行为算法 B 的数据,直到第七行为算法 P 的数据.第一列为每一个算法计算显示的点数,第二列为屏幕上显著点(有效点)的个数,最后一列为计算时间(秒).另外,若将此单位正方形定义在更大的区域(如 350×350 象元)上,则有几种算法因计算机内存不够而无法运行,只有算法 B,H,P 是可行的,三种算法的参数可见前所述,所有计算结果见表格 2.表格 2.的说明同前.

4 结 论

在给定的屏幕精度下,若从逼近分形集的效果来看,"重点"排除算法是较理想的;若从逼近的速度和时间上看,投影算法是较好的一种,特别,投影算法对大区域上逼近分形集是相当有效的.由定理 2 和定理 5 知,此二个方法所产生的分形逼近集是小于或等于给定精度,是一个有明确终止原则的算法,特别是"重点"排除算法对任何 IFS 均能运行.而无需求压缩因子,实为一实用可行的通用算法.

5 致 谢

本文作者非常感谢 S.dubuc 教授提供的资料.在此,表示谢意.

参 考 文 献

1 杨海浪,分形集逼近的分块投影算法,南京大学学报(自然科学)93年四期上待发表.

2 J.E.Hutchinson, Fractals and Self-similarity, Indiana. Univ, Math. J.30(1981)713-747

3 R.F.Williams. Composition of Contractions Bol Soc. Brastil. Mat. 2(1971)55-59.

4 M.F.Barnsley and S.Demko.Iterated function systems and the global construction of fractals . Proc.Roy.soc.London Ser. A399(1985)243-275.

5 S.Dubuc and A Elqortobi Approximations of fractal sets.J. comput. Appl. Math.29(1990)79-89.

6 顾其钧,杨海浪等,逼近分形集的快速算法,南京大学学报数学半年刊 V01.9 NO 2 1992.P199-203

7 杨海浪,顾其钧,逼近分形集的二种实用算法,南京大学学报数学半年刊待发表.

8 杨海浪,分形集的逼近算法,高等院校计算数学学报即将发表.

Fractal 逼近的斜量法

崔 振 文
（河南师范大学数学系）
（河南省新乡市 453002）

本文研究了用迭代函数系生成的 Fractal 函数 v 在 L^p 范数意义下对函数 u 的最佳逼近问题，并给出了一种实用的基于斜量法的数值计算方法.

一. 引言

迭代函数系是生成具有特殊的自相似性质分形的一个方便的工具. 一个迭代函数系由若干个从集合 X 到它自身的映射 $f^1,f^2,\cdots,f^N$ 组成，其相伴概率为 $p^1,p^2,\cdots,p^N$，迭代系统的逐次状态由下面的规则生成：如果 z^t 是系统在 t 时的状态，则在 $t+1$ 时，状态 z^{t+1} 由 $z^{t+1}=f^n(z^t)$ 给出，(具有概率 p^n，$n=1,2,\cdots,N$). 在相当一部分情况下，状态逐渐接近一个紧集，即这个系统的吸引子，而与最初的状态 z^0 的选择完全无关.

Barnsley 和 Demko 在[1]中给出了用迭代函数系对分形物体逼近的推导.

另外一些情况是：在 L^p 范数意义下，设法构造一个分形函数，它是对给定函数 u 的最佳逼近. 其图形是依赖于若干个参数的迭代函数系的吸引子.

这里定义一个关于系统参数 w 的函数 $V(w)$，它是目标函数 $u(x)$ 与由迭代函数系生成的函数 $v(x,w)$ 两者之间差的 L^p 范数. 问题是设法找出这个函数的最小值. 使 $V(w)$ 取到最小值的点记为 w^*，则 $v(x,w^*)$ 就是 $v(x,w)$ 对 $u(x)$ 的最佳逼近. 在[2]中，W · D · Withers 利用 Newton 法求函数 $V(w)$ 的最小值. 在本文中，我们利用斜量法构造出 w^* 的迭代式，使 $V(w)$ 在点 w^* 取最小值 $V(w^*)$，从而 $v(x,w^*)$ 就是函数 $u(x)$ 的最佳逼近.

二. 预备知识

令 $u(x)$ 是目标函数，$x\in D$，$u(D)\in R$，D 和 R 分别是 R^L 和 R^J 的内闭紧子集.

在 L^p 范数意义下，我们用函数 v 去逼近函数 u，这里的函数 v 是由迭代函数系 $f^1,f^2,\cdots,f^N:R^{L+J}\to R^{L+J}$ 生成. 对 $n=1,2,\cdots,N$，映射 f^n 是压缩映射，且具有相伴概率 $p^n:R^L\to(0,1)$，p^n 是 *Lipschitz* 二阶连续的. 对 $z^t=(x^t,y^t)$，$x\in R^L$，$y\in R^L$，在 $t+1$ 时有

$$z^{t+1}=f^n(z^t) \tag{2.1}$$

且具有相伴概率 $p^n(x^t)$. 该系统的吸引子 Γ 就是函数 v 的图形. 显然，函数 v 是 Fractal 函数，其图形是集合 $\{(x,v(x))\mid x\in D\}$.

为了得到吸引子 Γ 的图形(即函数 $u(x)$ 的 Fractal 逼近函数 $v(x)$ 的图形). 令 $g^n:R^L\to R^L$，$h^n:R^{L+J}\to R^J$，

$$f^n(x,y)=(g^n(x),h^n(x,y)) \tag{2.2}$$

$n=1,2,\cdots,N$，其中 $y=u(x)$，g^n 满足 $D=\bigcup_{n=1}^{N}g^n(D)$(至多在 *Lebesgue* 零测度集上重迭)，$h^n=h^n(w_1,\cdots,w_k)$，即 h^n 依赖于参数 $w_1,\cdots,w_k$，而 g^n，p^n 与 $w=(w_1,\cdots,w_k)$ 无关，其中 $k\leqslant N$. 因而 v

$(x)=v(x,w)$.

现在的问题是在参数空间中找出点 w，使

$$V(w)=\int_D \| v(x,w)-u(x) \|^t d\mu(x) \tag{2.3}$$

取到最小值.使 $V(w)$ 取到最小值的点记为 w^*，于是 $v(x,w^*)$ 是 $v(x,w)$ 对 $u(x)$ 的最佳逼近，这里的 $\|\cdot\|$ 是 R^J 上的 L^t 范数，μ 是 D 上正规的 *Lebesgue* 测度.

当映射 f^n 是压缩映射，且概率 P^n 是 Lipschitz 连续时，迭代函数系 $f^1,\cdots,f^n$ 生成支撑在 Γ 上的唯一的概率测度 γ，它是系统

$$\gamma(f^n(E))=\int_E p^n(z)d\gamma(z) \tag{2.4}$$

的不变量.

当上述唯一的概率测度 γ 存在时，我们希望由迭代函数系生成的不变测度 γ 在 D 上的射影等于 μ，即对可测集 $E\subset D$，有 $\gamma(E\times R)=\mu E$，因此，要求

$$\sum_{n=1}^{N}|\det J(g^n)|=1$$

这里 $\det J$ 是 Jacobian 行列式，且

$$p^n=\det J(g^n)|.$$

上面的内容 M·F·Barnsley 及 S·G·Demko 等在[4]～[5]中已进行了证明，本文将承认这些结论，并在相应条件下进行我们的工作.

三.$V(w)$ 的导数

引理 3.1 令 C 是 R^m 的一个紧子集，且令 $F^1,\cdots,F^N$ 是从 C 到 C 的压缩，即存在 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$\|F^n(z)-F^n(z')\|\leqslant\lambda\|z-z'\|.$$

对于 $k=1,2,\cdots$，定义 $\Phi_k:C\times\Sigma\to C$

$$\Phi_k(z,n)=F^{n_1}\circ F^{n_2}\circ\cdots\circ F^{n_k}(z) \tag{3.1}$$

其中 $n=(n_1,n_2,\cdots)$. 则 $\Phi_k(z,n)$ 一致收敛到一个与 z 无关的值并且当 $K\to\infty$ 时是连续的. 如果 $F^1,\cdots,F^N$ 在 R^k 的紧子集上依赖于参数 w 而 λ 与 w 无关，则在 w 上也一致收敛.

引理 3.2 假设 $f^1,\cdots,f^N$ 在 z 中是压缩，存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$\|f^n(z,w)-f^n(z',w)\|\leqslant\lambda\|z-z'\|$$

对 $z,z'\in D\times R$，λ 与 w 无关，w 在 R^k 的某紧子集 S 中.进一步假设 $f^1,\cdots,f^N$ 有 Lipschitz 连续二阶导数，它依赖于 z 和 w，而 $z\in D\times R$，$w\in S$. 则对固定的 $n\in\sum$，$\varphi=\varphi(n,w)$ 在 w 中是连续二阶可微的，w 在 S 的内部，它的二阶导数是 n 的连续函数.

利用上面两个引理，W·D·Withers 在[2]中证明了 $V(w)$ 关于 $w_1,\cdots,w_k$ 的一阶、二阶导数的计算方法，即有下面的定理

定理 3.3 假设 $f^1,\cdots,f^n$ 是压缩，且在 $D\times R$ 上有二阶 Lipschitz 连续导数. 令 $z^0=(x^0,y^0)$，$a^0_{j,k}$，$b^0_{j,kl}$，$j=1,\cdots,J$；$k,l=1,\cdots,K$ 任意选择，令 $z^i=(x^i,y^i)$，$a^i_{j,k}$，$b^i_{j,kl}$ 由下面迭代公式所定义，选择 n 具有概率 $p^n(x^i)$ 且令

$$z^{i+1}=f^n(z^i) \tag{3.2}$$

$$a^{i+1}_{j,k}=\sum_{s=1}^{J}\frac{\partial h^n_j}{\partial y_s}(z^i)a^i_{s,k}+\frac{\partial h^n_j}{\partial w_k}(z^i) \tag{3.3}$$

$$b_{j,kl}^{t+1} = \sum_{i=1}^{J}\sum_{m=1}^{J}\frac{\partial^2 h_j^*}{\partial y_i\partial y_m}(z^t)a_{i,k}^t a_{m,l}^t + \sum_{i=1}^{J}\frac{\partial^2 h_j^*}{\partial y_i\partial w_l}(z^t)a_{i,k}^t$$

$$+ \sum_{i=1}^{J}\frac{\partial^2 h_j^*}{\partial y_i\partial w_k}(z^t)a_{i,l}^t + \frac{\partial^2 h_j^*}{\partial w_k\partial w_l}(z^t) + \sum_{i=1}^{J}\frac{\partial h_j^*}{\partial y_i}(z^t)b_{i,kl}^t, \tag{3.4}$$

其中 h_j^* 是 h^*的第 j 个分量. 则对于概率 1,

$$\frac{\partial V}{\partial w_k} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} q\xi|y_j^t - u_j(x^t)|^{q-1}a_{j,k}^t, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial w_k\partial w_l} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[q(q-1)|y_j^t - u_j(x^t)|^{q-2}a_{j,k}^t a_{j,l}^t + q\xi|y_j^t - u_j(x^t)|^{q-1}b_{j,kl}^t\right] \tag{3.6}$$

其中 y_j^t、u_j 分别是 y^t 和 u 的第 j 个分量,而 $\xi = sgn(y_j^t - u(x^t))$.

四. 主要结果

现在设法找出使(2,3)中 $V(w)$ 取到最小值的点 w^*,设初始值 $w^{(0)} = (w_1^{(0)},\cdots,w_k^{(0)})$ 是 w^* 邻域内任意一点. 当我们得到了 w^*的一个近似 $w=(w_1,\cdots,w_k)$后,希望用适当的方法得出下一个近似 $w'=(w'_1,\cdots,w'_k)$, w'是到 w^* 的一个比 w 更好的近似,这个迭代过程将得出一个 w 的序列,它能迅速地收敛到 w^*.

我们知道,梯度方向是函数瞬时变化最快的方向. 于是,对任意初始近似点 $w=(w_1,\cdots,w_k)$可以用迭代公式

$$w'_i = w_i + \alpha_i d_i \tag{4.1}$$

$i=1,\cdots,k$,得出下一个近似点 $w'=(w'_1,\cdots,w'_k)$,其中 $d_i = -\frac{\partial V}{\partial w_i}(w)$, $i=1,\cdots,k$. d_i 的计算可由公式(3.5)给出. 现在导出 α_i 的计算方法,对于 $w+\alpha d \in O(w^*)$,其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$, $d=(d_1,\cdots,d_k)$, $V(w)$的二次近似 $Q(w+\alpha d)$由下式给出

$$Q(w+\alpha d) = V(w) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial w_i}\alpha_i d_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial w_i\partial w_j}\alpha_i d_i \alpha_j d_j, \tag{4.2}$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial V}{\partial w_l}d_l + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial w_i\partial w_l}\alpha_i d_i d_l, \tag{4.3}$$

其中 $l=1,\cdots,k$. 设 $d_l\neq 0$, 令$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_l}=0$, $l=1,\cdots,k$. 则有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial w_i\partial w_l}d_i\alpha_i = -\frac{\partial V}{\partial w_l},$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial w_l\partial w_i}d_i\alpha_i = d_l \tag{4.4}$$

假设上述方程组系数矩阵非奇异,其逆矩阵为$[C_{ij}]$,则对 $i=1,\cdots,k$,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k}C_{ij}d_j, \tag{4.5}$$

定理 4.1 若 $V(w)$是连续二阶可微的,且二阶导数在 w^*不变号,对 $w\in O(w^*)$, 令 $d_i = -\frac{\partial V}{\partial w_i}$, $d=(d_1,\cdots,d_k)$取为使 $V(w^{(t)}-\alpha^{(t)}d^{(t)})$取最小值,则迭代式

$$w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} + \alpha_i^{(t)}d_i^{(t)} \tag{4.6}$$

$(i=1,\cdots,k)$收敛. 其中 w_i、α_i、d_i 分别是 $w=(w_1,\cdots,w_k)$、$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$、$d=(d_1,\cdots,d_k)$的第 i

个分量. 即有 $w^{(i)}$ 收敛到 w^*.

证明　由迭代式 $w_i^{(i+1)}=w_i^{(i)}+\alpha^{(i)}d_i^{(i)}$,令

$$w'_i = w_i + \alpha_i d_i = r_i(w),$$

$i=1,\cdots,k$. $r(w)=(r_1,\cdots,r_k)$, $r_i(w)$ 是 $r(w)$ 第 i 分量.

因为 $V(w)$ 是连续二阶可微的,且二阶导数在 w^* 不变号,这里 w^* 是使 $V(w)$ 取到最小值的点,所以有 $d_i(w^*)=-\frac{\partial V}{\partial w_i}(w^*)=0$, $i=1,\cdots,k$. 即 w^* 是映射 $r(w)$ 的不动点.

注意到,据(4.4)(4.5)有

$$\sum_{j=0}^{k} C_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial w_j \partial w_l} d_i = \delta_{il}.$$

及

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{\partial^2 V}{\partial w_l \partial w_j} d_j C_{ji} = \delta_{il}.$$

这里　$\delta_{il}=\begin{cases}1, & \text{当 } l=i \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } l\neq i \text{ 时}.\end{cases}$

映射 $r(w)$ 的导数矩阵计算为

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial w_l}(w) &= \delta_{il} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial w_l}(w) d_i(w) + \alpha_i(w) \frac{\partial d_i}{\partial w_l}\\ &= \delta_{il} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial w_l}(w) d_i(w) - \sum_{j=1}^{k} C_{ij} d_j \frac{\partial^2 V}{\partial w_j \partial w_l}\\ &- \frac{\partial \alpha_i}{\partial w_l}(w) d_i(w).\end{aligned} \tag{4.7}$$

因为 $d_i(w^*)=0$, $i=1,\cdots,k$. 所以有

$$\frac{\partial r_i}{\partial w_l}(w^*) = 0 \tag{4.8}$$

$i=1,\cdots,k$, $l=1,\cdots,k$. 即点 w^* 是 $r(w)$ 的超稳定的不动点,所以在映射 $r(w)$ 的迭代下, w^* 邻域中的所有点都将迅速地收敛于 w^*.

参 考 文 献

1. M・F・Barnsley,S・G・Demko(1985):Iterated function systems and the global construction of fractals. Proc. Roy. Soc. London Ser. A,399:243—275.
2. W・D・Withers(1989):Newton' method for fractal approximation. Constr・Approx 5:151—170.
3. K・J・Falconer(1990):Fractal geometry mathmatical foundations and applications. Cambridge University Press,Cambridge.
4. M・F・Barnsley,S・G・Demko,J・H・Elton,J・S・Geronimo(preprint):Invariant measures for Markov proesses arising from itersted function systems with place dependent probabilities.
5. M・F・Barnsley,S・G・Demko,J・H・Elton,J・S・Geronimo(preprint):On the attractiveness of invariant measures for iterated function systems.

分形集上的布朗运动

周先银[*]

(北京师范大学数学系)

关键词: Sierpinski 垫, Sierpinski 地毯, 网状分形, 随机分形, 布朗运动, 随机游动, 谱维数, 电阻维数, Harnack 不等式, Laplace 算子, 局部时, 常返性。

摘要: 在这篇报告中, 我们主要介绍以下几方面的内容。

首先, 我们叙述研究分形集上布朗运动的意义并介绍这方面的研究史。研究分形集上布朗运动的动机主要来源于物理, 理论上说 分形不具有微分结构, 人们不能按通常欧氏空间中的办法来建立分形上的 Laplace 算子。 注意到构造布朗运动不需要有微分结构而且 Laplace 算子是布朗运动的无穷小算子, 因而, 可以通过构造分形上布朗运动来建立分形上的 Laplace 算子。有了 Laplace 算子就可以建立分形上的热方程、波方程等, 通过求解这些方程就可以了解分形的一些重要物理现象。实际上, 利用分形上布朗运动的某些性质人们已经解决了与分形有关的一些有趣问题 (如已经严格证明 Sierpinski 垫等分形的谱维数存在并得到了它与电阻维数、分形维数的一个关系式), 物理上关于分形上布朗运动(严格地说应该是扩散过程)已有很多讨论. 这里, 我们主要从概率论方面方面介绍分形上布朗运动的有关问题。

早在 1987 年, 日本年轻的概率学家 S Kusuoka 和美国的数学物理学家 S. Goldstein 先后独立地构造出了 Sierpinski 垫 (gasket) 上的布朗运动。从那时起, 概率论中关于分形上布朗运动的研究才真正开始。近几年来, 该方向已成为概率论中一个相当活跃的研究方向。

分形集合对差运算不封闭, 而且人们也很难定义分形上的正态分布。因而, 非常遗憾的是我们不能按照通常欧氏空间中的办法来严格定义分形集上的布朗运动。通常情况下, 我们都认为分形集上的布朗运动应该具有以下性质: (i) 轨道连续的马氏过程, (ii) 具有自相似性, (iii) 在 1--相似 (Similitude) 变换下以分布保持不变。

构造出分形集上的布朗运动 (即满足上述三条性质的随机过程) 是本方向的一个重要课题。目前, 关于分形上布朗运动的构造已有很多结果, 我们主要介绍 Sierpinski 垫, 网状分形 (nested fractal) 和 Sierpinski 地毯 (carpet) 等三种分形上布朗运动的构造、可以证明这三种分形上的布朗运动都可以通过随机游动来逼近。利用分形的一些几何性质 (例如有限分叉性), 可以证明对所有的子列, Sierpinski 垫和网状分形上的随机游动 (选取适当的尺度变换) 都收敛于同一布朗运动。Sierpinski 地毯是一类具有无限分叉的分形, 对于这种分形, 目前只能证明存在某个子列, 使得这些随机游动在适当的尺度变换下沿着该子

[*] 本课题得到国家自然科学基金和国家教委的资助

列收敛。这个极限随机过程就被视为 Sierpinski地毯上的布朗运动。在证明以上结论时，Harnack 原理起着关键的作用。M Barlow 和 R.Bass 在这方面做了大量的工作。

介绍了分形上布朗运动的构造，我们接着介绍分形上布朗运动的一些重要性质。分形上布朗运动的唯一性显然是一个重要性质。目前，只证明了 Sierpinski 垫和某些网状分形上的布朗运动是唯一的，而其它分形上布朗运动的唯一性还不知道。另外，关于分形上布朗运动的转移密度函数的存在及其估计已经有了较满意的结果。人们已经给出了 Sierpinski 垫、网状分形和 Sierpinski 地毯上布朗运动的转移密度函数的较合理估计。利用这些估计式可以很容易证明 Sierpinski 垫、网状分形和 R^2 中的 Sierpinski 地毯上的布朗运动具有局部时，从而是点常返的，而三维及三维以上欧氏空间中的 Sierpinski 地毯上的布朗运动则是非常返的。

谱维数是分形中的一个重要概念。利用前面提到的转移密度函数的合理估计，可以严格地证明 Sierpinski 垫、网状分形及 Sierpinski 地毯的谱维数均存在，而且还得到了它与电阻维数及分形维数的一个关系式，利用这个关系式又可以给出某些分形谱维数的估计。

在这篇报告中，我们还介绍了随机分形上布朗运动的一些结果。自然界中真正很规则的分形是不存在的，真正出现的分形都具有某些随机性。因而，研究随机分形上的布朗运动更具有实际意义。目前，关于随机分形上布朗运动的研究主要集中在下面几个问题上：(i) 布朗运动的存在性，(ii) 谱维数的存在性及其估计，(iii) 布朗运动的矩估计。关于这方面的研究也已有了一些结果。对于均匀的随机 Sierpinski垫、随机网状分形和 R^2中的随机 Sierpinski地毯，以上三个问题均已解决。

除了分形上布朗运动以外，概率论中关于分形上其它几种随机过程如随机游动、自回避随机过程、渗流及 sing 模型等也有了相当多的结果，这里就不作介绍了。另外，关于分形型流形上波的传递问题以及带有分形边界区域上特征值估计等问题都是很有趣的问题，而且已有了一些结果，这里就不介绍了。

Brownian motions on fractals

Zhou Xian-Yin

(Deparment of Mathematics Beijing Normal University)

分形函数的微积分

张永平

（中国矿业大学数力系　江苏徐州　221008）

摘要　本文利用多项式的最佳平方逼近来定义分形函数的"导数"——拟导数，并且证明了对于分形函数拟导数具有经典分析中导数的特性。还介绍了与测度和积分有关的广义测度及 Rodan Nikodym 导数。

一、引　　言

微分是研究函数性态的一种有利的数学工具，但对于分形函数，例如，Weierstrass 函数，在经典微分意义下是处处连续但处处不可微的，故经典的数学分析的方法不适合于研究分形函数。Marstrand 给出如下的弱切线的定义[1]：称一个 s-集[3,4] E 在 x 点沿 θ 方向存在弱切线，如果 $D^s(E,x)>0$ 且对任意 $\phi>0$，有

$$\lim_{r\to 0} r^{-s}H^s(E\cap(B_r(x)\backslash S_r(x,\theta,\phi)\backslash S_r(x,\theta,\phi)))=0$$

其中 $D^s(E,x)$ 为集合 E 在 x 点的下密度；$S_r(x,\theta,\phi)$ 是半径为 r 的单向扇形，它是由半径为 r 的圆域 $B_r(x)$ 上与点 x 的连线与从 x 出发沿 θ 方向的射线的夹角不超过 ϕ 的点组成。Marstrand 的弱切线是经典微积分中导数概念的推广，然而，对于分形函数，除去一个 H^s 测度为零的集合外，处处不存在弱切线，由此可见弱切线的概念也不适合用于研究分形函数。

二、分形函数的拟导数

在经典分析中，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 点有切线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，且在 x_0 点的充分小的领域 $U(x_0,\delta)$ 上，切线是曲线 $y=f(x)$ 的线性逼近。对于分形函数既然几乎处处不存在(弱)切线，我们可以考虑从逼近的角度定义"导数"，下面我们用多项式的最佳平方逼近来定义拟导数的概念。

若 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上可积，设 $y=a_0+a_1(x-x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上的最佳线性平方逼近，即使得 $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[a_0+a_1(x-x_0)-f(x)]^2\mathrm{d}x$ 取最小值。由极值的必要条件可得

$$\begin{cases}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[a_0+a_1(x-x_0)-f(x)]\mathrm{d}x=0\\ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[a_0+a_1(x-x_0)-f(x)](x-x_0)\mathrm{d}x=0\end{cases}\tag{1}$$

即

$$\begin{cases}2\delta a_0-\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x=0\\ \frac{2}{3}\delta^3a_1-\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=0\end{cases}\tag{2}$$

在(1)式中令 $x-x_0=t$ 并解出 a_0 和 a_1 得

$$a_0=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)\mathrm{d}t,\qquad a_1=\frac{3}{2\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta}tf(x_0+t)\mathrm{d}t\tag{3}$$

a_0 是函数 $f(x)$ 在 $I(x_0,\delta)$ 上的平均值，而 a_1 是逼近直线的斜率，以下我们将把 a_1 定义为 $f(x)$ 的拟导数。

定义 1 如果 $f(x)$ 在 $I(x_0,\delta_0)$ 上可积，对 $0<\delta\leqslant\delta_0$，称

$$\mathscr{D}[f(x_0),\delta]=\frac{3}{2\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta}tf(x_0+t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2\delta^3}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 x_0 点相对于 δ 领域的拟导数，并称 $f(x)$ 在 x_0 点是拟可导的。如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点处都是拟可导的，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是拟可导的。

以下我们来证明逆导数具有类似于经典微积分中有关导数的许多性质，这表明拟导数可用来研究分形函数。

从拟导数的定义和积分的性质直接可得以下两个定理：

定理 1 如果 $f(x)$ 在区间 I 上可积的，则 $f(x)$ 在区间 I 上是拟可导的。

定理 2 如果在 x_0 点 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是拟可导的，则 $f(x)\pm g(x)$ 和 $Cf(x)$ 在 x_0 点都是拟可导的，且

$$\mathscr{D}[f(x_0)\pm g(x_0),\delta]=\mathscr{D}[f(x_0),\delta]\pm\mathscr{D}[g(x_0),\delta]$$
$$\mathscr{D}[Cf(x_0),\delta]=C\mathscr{D}[f(x_0),\delta]$$

其中 C 是常数。

定理 2 表明拟导数具有线性性质。

定理 3 若 $f(x)$ 在 x_0 点是可导的（经典意义下），在 x_0 点的某个领域 $U(x_0,\delta_0)$ 上连续，则 $f(x)$ 在 x_0 点是拟可导的且

$$f'(x)=\lim_{\delta\to0}\mathscr{D}(f(x_0),\delta).$$

证明 由于 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 上连续，从而可积，由定理 1 知函数 $f(x)$ 在 x_0 点是拟可导的。又根据极限的 L'Hospital 法则和导数的定义可得：

$$\lim_{\delta\to0}\mathscr{D}(f(x_0),\delta)=\lim_{\delta\to0}\frac{3\int_{-\delta}^{\delta}tf(t+x_0)\mathrm{d}t}{2\delta^3}=\lim_{\delta\to0}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\delta\to0}\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}+\frac{f(x_0-\delta)-f(x_0)}{-\delta}\right]$$
$$=f'(x_0)$$

证毕。

上述定理表明，拟导数是导数概念的一种推广。下面的定理是关于拟导数的连续性质。

定理 4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则当 $[x-\delta,x+\delta]\subset(a,b)$ 时，$\mathscr{D}[f(x),\delta]$ 是 x 和 δ 的连续函数。

在数学分析中，导数可用来研究函数的性态，对于分形函数拟导数也具有类似的性能。

定理 5 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)=\lambda(x-a)+f(a)$ 的充要条件是对任意 x 和 δ，当 $[x-\delta,x+\delta]\subset[a,b]$ 时，有

$$\mathscr{D}[f(x),\delta]=\lambda$$

其中 λ 是常数。

证明 必要性显然。以下证充分性。

若对于任意 x、δ，当 $[x-\delta,x+\delta]\subset[a,b]$ 时，有 $\mathscr{D}(f(x),\delta)=\lambda$，即

$$\frac{3}{2\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)\mathrm{d}t=\lambda$$

故
$$\int_0^{\delta} f(x_0+t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\lambda\delta^3 \tag{4}$$
把式 ，两边同时对 δ 求导，得
$$f(x+\delta) - f(x-\delta) = 2\lambda\delta \tag{5}$$
根据 x 和 δ 的任意性，式(5)表明 $f(x)$ 在$[a,b]$ 的任何一个子区间上的增量与区间长度成正比，比例因子为 λ，从而
$$f(x) = \lambda(x-a) - f(a)$$
证毕。

定理 6 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积且除去一个 Lebesgue 测度为零的子集外，拟导数恒等于零，则除去一个 Lebesgue 测度为零的子集外，$f(x)$恒等于常数。

由于拟导数 $\mathscr{D}[f(x_0),\delta]$是函数在 $U(x_0,\delta)$ 上的最佳线性平方逼近的直线的斜率，它反映了函数在 $U(x_0,\delta)$上的整体性态。为此我们给出以下定义：

定义 2 设 $D[f(x_0),\delta]$存在.

(i) 若 $D[f(x_0),\delta]>0$，则称 $f(x)$在 $U(x,\delta)$ 上是整体递增的；

(ii) 若 $D[f(x_0),\delta]<0$，则称 $f(x)$ 在 $U(x,\delta)$ 上是整体递减的。

用类似于上述方法可定义高阶拟导数并研究它们的性质，限于篇幅这里从略。

二、广义测度及其导数

在本节中假设 $X\subset R^n$，$\mathscr{A}$ 是 X 的子集组成的一个 σ 域。

定义 3 设 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个在$[-\infty,+\infty]$中取值的集函数，且在 $-\infty$和 $+\infty$两个值中至多取一个，如果 μ 满足
$$\mu(\varnothing) = 0 \tag{6}$$
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \tag{7}$$
则称 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的广义测度。

对于广义测度，有下面的 Hahn 和 Jordan 分解。

定义 4 设 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个广义测度，对于集合 E，如果任何一个子集 F，$E\cap F$ 可测且 $\mu(E\cap F)\geqslant 0$ ($\leqslant 0$)，则称 E(对于 μ)是一个正集(负集)。

对于广义测度，有下面的 Hahn 和 Jordan 分解。

定理 7 Hahn 分解) 设 μ 是 X 的子集组成的一个 σ-域 $\mathscr{A}$ 上的广义测度，则存在两个不相交的集合 A 和 B，使得 $A\cup B=X$，A 对于 μ 是一个正集，B 对于 μ 是一个负集)。

Hahn 分解不是唯一的，但对于任意两种 Hahn 分解
$$X = A_1\cup B_1,\qquad X = A_2\cup B_2$$
对于任意一个可测集 E，总有
$$\mu(E\cap A_1) = \mu(E\cap A_2),\qquad \mu(E\cap B_1) = \mu(E\cap B_2)$$
因此，在 σ 域 $\mathscr{A}$ 上，由
$$\mu^+(E) \triangleq \mu(E\cap A),\qquad \mu^-(E) \triangleq \mu(E\cap B)$$
唯一地确定了两个集函数 μ^+ 和 μ^-，分别称为 μ 的上变差和下变差。令
$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$
称集函数 $|\mu|$ 是 μ 的全变差。

定理 8 Jordan 分解) μ^+、μ^- 和 $|\mu|$都是测度，并且对于任何一个可测集 E，有

$$\mu(F) \quad \mu \quad F) \quad \mu(E)$$

若μ是定义在φ上的一个广义测度，f是一个可积函数，则由

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu \tag{8}$$

所确定的集函数ν是一个有限的广义测度，且

$$\nu(E)=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu \tag{9}$$

其中 $f^+=\max\{f,0\}$，$f^-=-\min\{f,0\}$。

下面的 Rodan Nikodym 定理表明：在一定的条件下，广义测度可表为(8)式的形式，首先我们看看以下两个有关的概念。

定义 5 设μ是定义在X的子集组成的σ域φ上的广义测度，若存在φ中的一个集序列$\{E_n\}$，使得$X=\bigcup E_n$且对于一切n，有 $\mu(E_n)<+\infty$，则称广义测度μ在φ上是σ有限的。

定义 6 设μ和ν是广义测度，如果对于满足关系式 $|\mu|(E)=0$ 的每一个可测集$E\in\varphi$总有$\nu(E)=0$，则称ν对于μ是绝对连续的。

定理 9（Rodan Nikodym 定理） 设μ是φ上的σ-有限测度，ν是φ上的σ有限的广义测度，ν对于μ是绝对连续的，则存在实值函数f，使得对于任意可测集$E\in\varphi$，有

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$$

函数f在下述意义下是唯一的：如果对一切$E\in\varphi$，同时有$\nu(E)=\int_E g\mathrm{d}\mu$，则除去一个μ测度为零的集合外，有$f=g$。

定义 7 设μ是φ上的一个σ有限的测度，如果对于每一个可测集$E\in\varphi$，$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$，则记

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}=f \quad 或 \quad \mathrm{d}\nu=f\mathrm{d}\mu$$

称$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$为 Rodan Nikodym 导数。

在定理 9 的意义下 Rodan Nikodym 导数是唯一的。在经典分析中有关导数的所有性质对于 Rodan Nikodym 导数也是成立的。

四、结 束 语

本文我们利用多项式的最佳平方逼近定义了拟导数的概念，并且研究了拟导数的性质，结果表明对于分形函数拟导数具有类似经典分析中导数的特性。

测度是分形几何中十分重要的概念，利用广义测度及 Rodan Nikodym 导数来研究分形集的特性是个值得深入探讨的问题。

参 考 文 献

[1] J. M. Marstrand, Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions, Proceedings of the London Mathematical Society(3), 4, 1954, 257 302

[2] 文……，郭……，……函数与分形维数，MMM Ⅳ论文集，兰州大学出版社，1991

[3] 谢和平，薛秀谦，……，分形几何——数学基础与应用，重庆大学出版社，1991.

[4] K. J. Falconer 著，曾文曲，刘世耀译，分形集几何学，中国矿业大学出版社，1992.

广义自相似集的维数研究

华苏　　清华大学

引言

自相似集是目前研究得较为深入的一类，Fractal 集（见 Falconer[2]，Hutchinson[3]，Mandelbrot[4]，Moran[5]），它可以通过下述方式生成：设$\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_m\}$为一族$R^d$上的相似压缩，即对任意$x,y\in R^d$，$|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|=c_i|x-y|$，其中$0<c_i<1(1\leqslant i\leqslant m)$。设 V 为一开集，满足$\varphi_i(V)\subset V$，$1\leqslant i\leqslant m$，令$\varphi_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_n}$，$\varphi_{ik}\in\Phi$，$E_n=\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\varphi_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(V)$，则$E=\bigcap_{n\geqslant1}E_n$为经典意义下的自相似集。我们看到，在从 E 的 n 级近似 E_n 到 n+1 级近似 E_{n+1} 的生成过程中，均是使用的同一压缩尺度 Φ，但在理论研究及在实际应用中(如按准周期方式排列的调和链的振动谱的研究[1])，亦要求在逐阶生成过程中容许不同的压缩尺度。为此目的，本文引入一类变尺度 Fractal 集的机制，它可视为前述自相似集生成方式的一个自然推广，同时它本身亦为自相似集列的极限。在自相似集维数研究中，使用了质量分布原理的技巧，但由于本文讨论的集合的生成过程中的尺度的变化，上述原理难以使用，因此，我们首先讨论广义自相似集的网测度性质，并利用所得的结果确定了该集类的 Hausdoff 维数与 Bouligand 维数。正如引理 1，2 本身所体现出的，这些网测度性质还可应用于 Fractal 的其它问题的研究。

§1. 定义和记号

设$\{\Phi_k\}_{k\geqslant1}=\{\varphi_{k_1},\varphi_{k_2},\cdots,\varphi_{k_{n_k}}\}_{k\geqslant1}$，$n_k\in N$，其中 φ_{ij} 为 R^d 空间的压缩比为 c_{ij} 的相似映射：

$|\varphi_{ij}(x)-\varphi_{ij}(y)|=c_{ij}|x-y|$　$x,y\in R^d$，　$0<c_{ij}<1$，　$i\geqslant1$，　$1\leqslant j\leqslant n_i$，　且假设 $\inf c_{ij}>0$　(H1)

同时Φ_k，$k\geqslant1$，满足开集条件．存在 R^d 的开子集 V，使$\varphi_{kj}(V)\subset V$，$k\geqslant1$，$1\leqslant j\leqslant n_k$，且$\varphi_{ki}(V)\bigcap\varphi_{kj}(V)=\emptyset$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant n_k$　(H2)

不失一般性，可设 V 的直径$|V|=1$。

记　$I_{j_1,j_2,\cdots,j_k}=\varphi_{1j_1}\varphi_{2j_2}\cdots\varphi_{kj_k}(V)$

显然　$|I_{j_1,j_2\cdots j_k}|=c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{kj_k}$，假定　$\lim_{k\to\infty}\sup_{j_1,j_2,\cdots j_k}|I_{j_1,j_2,\cdots,j_k}|=0$　(H3)

记$F_k=\{I_{j_1,j_2,\cdots,j_k}: 1\leqslant j_i\leqslant n_i,\ i=1,2,\cdots k\}$　为方便，　记 $J_k=\{(j_1,j_2,\cdots,j_k): 1\leqslant j_i\leqslant n_i,\ i=1,2,\cdots k\}$

$$F=\bigcup_{k=0}^{\infty}F_k\qquad F_0=V$$

记　G_k 为 F_k 的元素的所有可能的并集的集合，

$G=\bigcup_{k=0}^{\infty}G_k$

记$E_k=\bigcup_{J_k}I_{j_1,j_2,\cdots,j_k}$　　$E_0=V$

显然$E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$，定义$E=\bigcap_{k\geqslant0}E_k$为广义自相似集。

§2. 两个引理

本节讨论广义自相似集的网测度性质．关于测度与维数的定义与性质见[2]。

引理 1　记$\mathcal{H}_G^{\alpha}(E)=\liminf_{\delta\to0}\{\sum|v_i|^{\alpha}: \bigcup v_i\supset E,\ |v_i|<\delta$且$v_i\in G_n,\ n\geqslant1\}$，$\alpha\geqslant0$，则$\mathcal{H}_G^{\alpha}(E)=\mathcal{H}^{\alpha}(E)$

证：由于$\{v_i\}$为 E 的 δ—复盖，立得

$$\mathcal{H}_G^{\alpha}(E)\geqslant\mathcal{H}^{\alpha}(E)$$

因此只须证 $\mathcal{H}_G^{\alpha}(E) \leqslant \mathcal{H}^{\alpha}(E)$.

首先，我们断言：给定 E 的一个 δ–复盖$\{w_i\}$，一定存在 K∈N，使当 k>K 时$|I_{j_1 j_2 \cdots j_k}| \leqslant \delta$，且每一$I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$ 完全落在至少一个 w_i 中.

否则取 $\{v_n \in F_n: |v_n| < \frac{1}{n},\ v_n$ 不完全属于任一 $w_i\}$，于是选$x_n \in v_n \cap E$，$(E = \bigcap_{k \geq 0} E_k$，因此$v_n \cap E \neq \phi)$，$\{x_n\}$一定有收敛子列，收敛于 E 内一点 x_0，又由于$\bigcup w_i \supset E$，故 x_0 一定属于某个 w_i(记为w_{i_0})．注意到$\{w_i\}$为 E 的开复盖，$x_0 \in w_{i_0}$，则一定存在一个 x_0 的邻域属于w_{i_0}即 x_0 与$E \setminus w_{i_0}$有距离 $a>0$，于是当$n_0 > \frac{2}{a}$时，$|v_{n_0}| < \frac{a}{2}$，即v_{n_0} 完全落在至少一个 w_i 中，矛盾．

这样对 E 的任一 δ–复盖 $\{w_i\}$（由于 E 为闭集,$\{w_i\}$一定为有限多个），均存在$\{v_i \in G_k\}$为 E 的 δ–复盖，且使得

$$v_1 = \bigcup I_{j_1 j_2 \cdots j_k} \qquad \text{其中} I_{j_1 j_2 \cdots j_k} \subset w_1$$
$$v_2 = \bigcup I_{j_1 j_2 \cdots j_k} \qquad \text{其中} I_{j_1 j_2 \cdots j_k} \subset w_2 \setminus w_1$$
$$\cdots\cdots$$

而且$\sum |w_j|^{\alpha} \geqslant \sum |v_j|^{\alpha}$.

因此 $\mathcal{H}^{\alpha}(E) \geqslant \mathcal{H}_G^{\alpha}(E)$ ■

引理 2　记 $\mathcal{H}_F^{\alpha}(E) = \liminf_{\delta \to 0} \{\sum |v_i|^{\alpha}: \bigcup v_i \supset E,\ |v_i| < \delta,\ \text{且} v_i \in F\}$，$\alpha \geqslant 0$，

则$A\,\mathcal{H}_F^{\alpha}(E) \leqslant \mathcal{H}^{\alpha}(E) \leqslant \mathcal{H}_F^{\alpha}(E)$，其中 A 为仅与 d,V 有关的常数．

证：右不等式由定义立得，下面证明左不等式．

首先将 F 的元素的直径按递减顺序排列为$\{\xi_n\}_{n \geq 1}$.

$\forall v \in G_x$，存在 $n>0$，使$\xi_{n+1} \leqslant |v| < \xi_n$．则 v 为某些$I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$的并，记为$v = \bigcup_{\gamma} I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$．取其中满足$|I_{j_1 j_2 \cdots j_k}| \leqslant \xi_{n+1} < |I_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}}|$的$I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$记入集合 W，其它的$I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$直径肯定小于 ξ_{n+1}，对这样的$I_{j_1 j_2 \cdots j_k}$向上找到某为 $k'>k$,使得$|I_{j_1 j_2 \cdots j_{k'}}| \leqslant \xi_{n+1} < |I_{j_1 j_2 \cdots j_{k'-1}}|$，将$I_{j_1 j_2 \cdots j_{k'}}$记入集合 W，为方便记 $W=\{w_j\}$，显然 $\{w_j\}$ 互不相交，$\bigcup w_i \supset v$，且 W 的元素一定有限多，记 W 的元素个数为 N．

$$\sum_{j=1}^{N} |w_j|^{\alpha} \leqslant N\xi_{n+1}^{\alpha} \leqslant N|v|^{\alpha}，\text{即}|v|^{\alpha} \geqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |w_j|^{\alpha} \tag{1}$$

易知 W 的所有元素均包含于一个以 v 中任一点为中心，2|v|为半径的球 B 中，即

$$\bigcup_{j=1}^{N} w_j \subset B \tag{2}$$

以 Ld 表示 d 维 Lebesgue 测度，Cd 表示 d 维单位球体积，$c = \inf c_{ij} > 0(H1)$，则有

$$Ld(B) = (2|v|)^d Cd \geqslant Ld(\bigcup_{j=1}^{N} w_j) = \sum_{j=1}^{N} Ld(w_j) = \sum_{j=1}^{N} |w_j|^d Ld(v) \tag{3}$$

其中 $|w_j| = |I_{j_1 j_2 \cdots j_k}| = |I_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}}| c_{kj_k} \geqslant \xi_n c_{kj_k} \geqslant \xi_n c$ (4)

将(4)代入(3)有

$(2|V|)^d Cd \geqslant N(\xi_n c)^d Ld(V)$，即$\frac{1}{N} \geqslant \frac{C^d Ld(V)}{2^d Cd}(\frac{\xi_n}{|v|})^d > \frac{C^d Ld(V)}{2^d Cd} =: A > 0$代入(1)式有

$|v|^{\alpha} \geqslant A\sum_{j=1}^{N} |w_j|^{\alpha} \geqslant A\sum_{j=1}^{N} |w_j \cap F_n|^{\alpha}$，其中$w_j \in F$.

于是有 $\mathcal{H}_G^{\alpha}(E) \leqslant A\,\mathcal{H}_F^{\alpha}(E)$，由引理 1，有 $\mathcal{H}^{\alpha}(E) \geqslant A\,\mathcal{H}_F^{\alpha}(G)$. ■

§3. 广义自相似集的维数

利用上节的结果，我们在本节讨论广义自相似集的维数的性质，保持前面的记号和假设，按如下方式定义序列$\{s_k\}$：

s_k满足$\prod_{i=1}^{k}(C_{i1}^{s_k}+C_{i2}^{s_k}+\cdots+C_{in_i}^{s_k})=1$

令$\underline{\lim}_{k\to\infty} s_k=\underline{s}$，$\overline{\lim}_{k\to\infty} s_k=\bar{s}$

定理1　$dim_H(E)=\underline{s}$

证：先证$dim_H(E)\leqslant\underline{s}$。

考虑E的自然复盖E_k。

由于$\underline{s}=\underline{\lim}_{k\to\infty} s_k$，$\forall t>\underline{s}$，$\exists\varepsilon>0$，对无穷多k有 $t>s_k+\varepsilon$，$\sum_{I_k}|I_{j_1j_2\cdots j_k}|^t=\sum_{I_k}(c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{kj_k})^t$

对无穷多k有

$$\begin{aligned}\sum_{I_k}|I_{j_1j_2\cdots j_k}|^t&<\sum_{I_k}(c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{kj_k})^{s_k+\varepsilon}\\&=\prod_{i=1}^{k}(c_{i1}^{s_k+\varepsilon}+c_{i2}^{s_k+\varepsilon}+\cdots+c_{in_i}^{s_k+\varepsilon})\\&\leqslant(\prod_{i=1}^{k}(\max_{1\leqslant j\leqslant n_i}c_{ij}))^{\varepsilon}\cdot\prod_{i=1}^{k}(c_{i1}^{s_k}+c_{i2}^{s_k}+\cdots+c_{in_i}^{s_k})\\&=\left(\prod_{i=1}^{k}(\max_{1\leqslant j\leqslant n_i}c_{ij})\right)^{\varepsilon}\end{aligned}$$

注意到$\lim_{k\to\infty}\sup|I_{j_1j_2\cdots j_k}|=0$ $(H3)$，因此上式当$k\to\infty$时趋于0。

这样$\mathcal{H}^t(E)\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{I_k}|I_{j_1j_2\cdots j_k}|^t=0$，从而$dim_H(E)\leqslant t$，由t的任意性有$dim_H(E)\leqslant\underline{s}$。

再证$dim_H(E)\geqslant\underline{s}$。

由于$\lim_{k\to\infty}\sup|I_{j_1j_2\cdots j_k}|=0$ $(H3)$，$\forall\delta>0$，$\exists K_1\in N$，使当$k\geqslant K_1$时$|I_{j_1j_2\cdots j_k}|\leqslant\delta$，考虑E的任一由F的元素组成的不交的$\delta$-复盖$W=\{w_i\}$，其中元素的最高阶为$k_1$，最低阶为$k_2$，$k_1>k_2$。

设$\beta<\underline{s}$，由$\underline{s}=\underline{\lim}_{k\to\infty} s_k$，$\exists K_2\in N$，使当$k>K_2$时，$\beta<s_k$，当$\delta$足够小时，$k_2>K_2$。

注意到对某一 j_0，$1\leqslant j_0\leqslant n_{k_1}$，若$I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}j_0}\in W$，则对全部$j_k$，$1\leqslant j_k\leqslant n_k$，$I_{j_1j_2\cdots j_k}\in W$，否则W不能复盖$E_0$。

注意到$\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1}}|^\beta=|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^\beta\geqslant|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}})$

若$\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}}\geqslant1$，则$\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1}}|^\beta\geqslant|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta$直接降阶。

若$\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}}<1$，则对$k_1-1$阶的项可以"补齐"，即$|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta>|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta\left(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}}\right)$，然后考虑$\sum_{j_{k_1-1}=1}^{n_{k_1-1}}|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta$

$>\sum_{j_{k_1-1}=1}^{n_{k_1-1}}|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^\beta(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}})=|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-2}}|^\beta(\sum_{j_{k_1-1}=1}^{n_{k_1-1}}c_{k_1-1j_{k_1-1}}^\beta)(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}}c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}})$

$$>|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-2}}|^{\beta}(\sum_{j_{k_1-1}}^{n_{k_1-1}} c_{k_1-1j_{k_1-1}}^{s_{k_1}})(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}} c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}})$$

若$(\sum_{j_{k_1-1}=1}^{n_{k_1-1}} c_{k_1-1j_{k_1-1}}^{s_{k_1}})(\sum_{j_{k_1}=1}^{n_{k_1}} c_{k_1j_{k_1}}^{s_{k_1}})\geq 1$， 则 $\sum_{j_{k_1-1}=1}^{n_{k_1-1}}|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-1}}|^{\beta}>|I_{j_1j_2\cdots j_{k_1-2}}|^{\beta}$ 降阶，否则再补齐，对已降阶的项在低一阶的情况下，重复上面的直接降阶或补齐降阶的过程，经过有限步后，存在k，$k_2\leq k\leq k_1$，我们得到

$$\sum_{w}|I_{j_1j_2\cdots j_k}|^{\beta}\geq\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k})=1,\ 即\ \mathcal{H}_r^{\beta}(E)\geq 1$$

由引理 2, $\mathcal{H}^{\beta}(E)\geq A\mathcal{H}_r^{\beta}(E)\geq A$, 得到 $dim_H(E)\geq\beta$, 从而有 $dim_H(E)\geq\underline{s}$. ■

注 1. 从定理 1 的证明中容易得到,若 $0<\underline{\lim}_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k})<\infty$, 则$0<\mathcal{H}^{\underline{s}}(E)<\infty$, 即 E 是 $\underline{s}$–集.

定理 2 $\overline{dim}_B(E)\leq\bar{s}$.

证: 由$\bar{s}=\overline{\lim}_{k\to\infty}s_k$, $\forall\alpha>\bar{s}$, $\exists K\in N$, 使当 k>K 时, $\alpha>s_k$, 取定$0<r<1$, 考虑$I_{j_1j_2\cdots j_k}$

使 $|I_{j_1j_2\cdots j_{k-1}}|\geq r\geq|I_{j_1j_2\cdots j_k}|$ （这时 $|I_{j_1j_2\cdots j_k}|=|I_{j_1j_2\cdots j_{k-1}}|c_{kj_k}\geq r\ inf\ c_{ij}$ ）从而满足上述条件的$W=\{I_{j_1j_2\cdots j_k}\}$为 E 的一个 r–复盖，利用定理 1 证明中的直接降阶和补齐降阶的方法，得到 $1\geq\sum_{w}|I_{j_1j_2\cdots j_k}|^{\alpha}\geq N(r)c^{\alpha}r^{\alpha}$ 其中 N(r)为 W 中的元素个数，$c=inf c_{ij}$

于是$N(r)\leq(cr)^{-\alpha}$，即要复盖 E 至多用$(cr)^{-\alpha}$个半径 r 的球.

$$\overline{dim}_B(E)\leq\frac{-\alpha lgr}{-lgr}=\alpha\ 从而有\overline{dim}_B(E)\leq\bar{s}.\ ■$$

推论: 若$\underline{s}=\bar{s}=s$, 则$dim_H(E)=dim_B(E)=s$.

证: 因为$\underline{dim}_B(E)\geq dim_H(E)$, 从而由定理 1 立得$dim_B(E)=dim_H(E)=s$ ■

注 2. 设Φ_k生成的自相似集的维数为$\tilde{s}_k$，即$\sum_{i=1}^{n_k}c_{ki}^{\tilde{s}_k}=1$. 若$\{\Phi_k\}$为$\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_k$的循环则不动集的维数为 s_k, 满足 $\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k})=1$. 记 $s_m(k)=\inf_{1\leq i\leq k}\{\tilde{s}_i\}$, $s_M(k)=\sup_{1\leq i\leq k}\{\tilde{s}_i\}$,

则$\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_m(k)})\geq 1$, $\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_M(k)})\leq 1$, 因此 $s_m(k)\leq s_k\leq s_M(k)$, $k\geq 1$. 由定理 1, 已知 $dim_H(E)=\underline{s}=\underline{\lim}_{k\to\infty}s_k$, 可见 $dim_H(E)$可用$\tilde{s}_k$来估值，而$\tilde{s}_k$是比 s_k 好处理与易计算得多.

定理 1, 2. 的计算也可以适用于不相似的压缩映射下的极限集的维数的估计.

定理 3 设$\{\Phi_k\}_{k\geq 1}=\{\varphi_{k1},\varphi_{k2},\cdots,\varphi_{kn_k}\}_{k\geq 1}$, $n_k\in N$, 其中φ_{ij}为R^d上的压缩比为 c_{ij} 的映射: $|\varphi_{ij}(x)-\varphi_{ij}(y)|\leq c_{ij}|x-y|$ $x,y\in R^d$, $1\leq j\leq n_i$, $i=1,2,\cdots$ 其中 $0<c_{ij}<1$, $inf\ c_{ij}>0$, Φ_k, $k>1$, 满足开集条件, 借用前面的记号,则极限集 E 的维数满足:

$$dim_H(E)\leq\underline{s},\ \overline{dim}_B(E)\leq\bar{s}$$

证明与定理 1, 2 类似，只是原来的等号相应地换为小于号而已.

定理 4, 同定理 3 假设，且$|\varphi_{ij}(x)-\varphi_{ij}(y)|\geq b_{ij}|x-y|$, $x,y\in R^d$, $0<b_{ij}<1$, $1\leq j\leq n_i$, $i\geq 1$(仍借用前面的记号), 则$dim_H(E)\geq\underline{s}$, 其中$\underline{s}=\underline{\lim}_{k\to\infty}s_k$, s_k满足$\prod_{i=1}^{k}(b_{i1}^{s_k}+b_{i2}^{s_k}+\cdots b_{in_i}^{s_k})=1$

证：由于$\{\Phi_k\}_{k\geq 1}$是压缩映射，引理 1,2 仍然适用。由$\underline{s}=\lim_{k\to\infty} s_k$ $\forall t<\underline{s}$, $\exists K\in N$, 使当 k>K 时 $t<s_k$, 取$Q=\{I_{j_1j_2\cdots j_k}: |I_{j_1j_2\cdots j_k}|\leq\delta$, 且$\bigcup_Q I_{j_1j_2\cdots j_k}\supset E\}$ 用定理 1 证明中的直接降阶或补齐降阶的方法可证

$$\sum_Q |I_{j_1j_2\cdots j_k}|^t \geq \sum_{J_K}(b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{Kj_K})^{s_K}=1$$

即 $\mathcal{H}^t_p(E)\geq 1$, 于是有 $\mathcal{H}^t(E)\geq A$, 因此$dim_H(E)\geq t$, 从而有$dim_H(E)\geq\underline{s}$. ■

§4. 例

1. 考虑由$\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$生成的自相似集 E

设 φ_i 的压缩比为c_i, $0<c_i<1$, $1\leq i\leq m$, 设$\sum_{i=1}^m c_i^s=1$, 此时，相当于广义自相似集中$\Phi_1=\Phi_2=\cdots=\Phi$的情形．容易看到定理 1 的所有条件均满足．

$\prod_{i=1}^k(c_{i1}^{s_k}+c_{i2}^{s_k}+\cdots+c_{in_i}^{s_k})=1$, 即为$(\sum_{i=1}^m c_i^{s_k})^k=1$, 于是有$s_k=s$, 由定理 1 $dim_H(E)=s$, 由定理 2 的推论$dim_B(E)=s$.

另一方面，由于$0<\sum_{i=1}^m c_i^s=1<\infty$, 由注 1 可知 E 为 s−集．

此即关于自相似集的 Hutchinson 定理[3].

2. 设$\{\Phi_k\}_{k\geq 1}$是由 Φ_a 和 Φ_b 按非周期方式重复出现而产生的相似压缩映射列．

在这种情形下，s_k 满足：

$$(c_{a1}^{s_k}+c_{a2}^{s_k}+\cdots+c_{an_a}^{s_k})^{k_a}(c_{b1}^{s_k}+c_{b2}^{s_k}+\cdots+c_{bn_b}^{s_k})^{k_b}=1 \tag{5}$$

其中$\{c_{ai}\}_{i=1}^{n_a}$ 和 $\{c_{bi}\}_{i=1}^{n_b}$ 分别为 Φ_a 和 Φ_b 的压缩比，k_a 和 k_b 分别为在前 k 次压缩中 Φ_a 和 Φ_b 出现的次数．

假设 Φ_a 和 Φ_b 在$\{\Phi_k\}_{k\geq 1}$ 中出现的密度$d_a=\lim_{k\to\infty}k_a/k$, 和$d_b=\lim_{k\to\infty}k_b/k$存在．

则对 (5) 两边取对数有

$$k_a lg(\sum_{i=1}^{n_a}c_{ai}^{s_k})+k_b lg(\sum_{i=1}^{n_b}c_{bi}^{s_k})=0 \tag{6}$$

对(6)两边同除以 k, 再令 k→∞取下极限，得

$$d_a lg(\sum_{i=1}^{n_a}c_{ai}^{\underline{s}})+d_b lg(\sum_{i=1}^{n_b}c_{bi}^{\underline{s}})=0 \tag{7}$$

这样 E 的维数由(7)式给出．

特别当$C_{ai}=C_a$, $1\leq i\leq n_a$, $C_{bi}=C_b$, $1\leq i\leq n_b$时(7)式化为

$$d_a lgn_a+d_a\underline{s}lgC_a+d_b lgn_b+d_b\underline{s}lgC_b=0 \tag{8}$$

如果再假设$n_a=n_b$, 则

$$\underline{s}=-\frac{lgn_a}{d_a lgC_a+d_b lgC_b} \tag{9}$$

3. 下面的例子是上面讨论的一个实现．此外，在其它领域也有甚多应用，见[6].

设 {a, b} =S, S^*为由 S 生成的自由半群(它的元素为由 a,b 组合成的词的集合), 设 σ 为 S^* 的一个同态(或称一个代换), 该同态完全由 σ(a), σ(b)确定．如果 σ (a) =aw, w∈S^*, 则 a 的迭代 σ^n 作用在 a 上的极限将定义一个由 a,b 作成的无穷序列，见[6], 记 d_a,d_b 为 a,b 在该序列中出现的密度，则 d_a, d_b 将由下列方式给出：

令$|\sigma(s)|_t$为字母 t 出现在 σ(s)中的次数，s,t,∈s,定义矩阵$M_\sigma=(|\sigma(s)|_t)_{s,t\in s}$, 记 λ 为 M_σ 的$Frobenius$特征值，则$M_\sigma\begin{bmatrix}d_a\\d_b\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}d_a\\d_b\end{bmatrix}$, 见[6], (10)

从而在前面讨论中若$\{\Phi_k\}_{k\geq 1}$由上述方式给出，则 d_a,d_b 容易由(10)直接得到．

本例的结论可以直接推广到有限多 Φ_k 非周期按一定同态规则出现的情况．

本文承蒙文志英教授阅读全文并提出有益建议，于此表示衷心感谢．

参 考 文 献

(1) Françoise Axel and Jacgues Peyrière
《Spectrum and Extended States in a Harmonic Chain with Controlled Disorder: Effects of the Thue–Morse Symmetry》.
Journal of Statistical Physics. Vol 57, Nos 5 / 6. 1989. 1013–1047.

(2) Kenneth Falconer
《Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications》
John wiley & Sans Ltd. England.

(3) Hutchinson J.E
《Fractals and self–similarity》
Indiana Univ. Math Journal, 30, 1981 713–747

(4) Mandelbrot B.B
《The Fractal Geomethy of Nature》
Freeman, San Francisco. 1982.

(5) Moran P.A.R
《Additive functions of intervals and Hausdorff measure》
Proc. Camb. Phil. Soc., 42. 15–23

(6) 文志英 文志维
《代换序列研究概况》
数学进展 Vol 18, No 3. July, 1989, 270–293.

关于一类随机级数的 α _截集的 Hausdorff 维数

吴 敏 （武汉大学）

提 要

随机级数的截集是一类很重要的 Fractal 集，本文考虑随机级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}$，其中 $\varepsilon_n(x)$ 是 x 的四进无穷小数表示的第 i 位数字并且证明：

定理 1 若 $\{a_n\}\in l_2$，$\{a_n\}\in l_1$，则 $\forall\ \alpha\in C$，$\alpha\neq 0$，$\dim_H\{x\in(0,1]; \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}=1$。

定理 2 若 $\{a_n\}$ 是有界变差的序列（即 $\sum_{i\geq 1}|a_i-a_{i+1}|<\infty$），$\{a_n\}\bar{\in} l_1$，$a_n\to 0_{,n\to\infty}$，则 $\forall\ \alpha\in C$，$\alpha\neq 0$，$\dim_H\{x\in(0,1]; \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}\geqslant 1/2$。

§1 定义及引理

在本文中，我们用 $\dim_H$ 表示 Hausdorff 维数，有关定义及性质参见[3]。

定义 1 设 $x\in(0,1]$，用 $\varepsilon_n(x)$ 表示 x 的四进无尽小数表示的第 n 位数字，即 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(x)4^{-n}$，其中 $\varepsilon_n(x)=0,1,2,3$。

定义 2 设 $x\in(0,1]$，$T_n(x)$ 表示 n 维欧氏空间中的点，即 $T_n(x)=(T_n^1(x),T_n^2(x),\cdots,T_n^n(x))$，其中 $T_n^j(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_{in+j}(x)4^{-(i+1)}$ $(j=1,2,\cdots,n)$。

引理 1 若 x 是一个四进无理点（即 x 不能写成 $m/4^k$ $(0<m<4^k)$ 的形式，其中 m，k 是整数），则 $\varepsilon_{(i-1)n+j}(x)=\varepsilon_i(T_n^j(x))$，$i=1,2,\cdots$，$j=1,2,\cdots,n$。

引理 2 对任何(0,1]中的子集 A，有 $\dim_H A=\frac{1}{n}\cdot\dim_H T_n(A)$

见[2]中引理 2。

引理 3 若 $\{a_n\}\in l_2$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}$ a.s 收敛（证明略）。

引理 4 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是概率空间 (Ω,A,P) 上的随机变量序列，若 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}Y_n$ a.s 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n+Y_n)$ a.s 收敛于 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n$。

引理 5 若 $\sum|a_n|=\infty$，$a_n\to 0_{n\to\infty}$，则 $\forall\ \alpha\in C$，$\alpha\neq 0$，总存在 $x_0\in(0,1]$，x_0 是四进无理点，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x_0)\pi/2}=\alpha$。

定义 3 设 $\{a_n\}$ 是实数序列，$\varepsilon_n(x)$ 的假设同定义 1，$\alpha\in C$，称 $\{x\in(0,1]; \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}$ 为随机级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}$ 的 α 截集。

定义 4 设 $A\subset(0,1]$，若 ε'_{mi+k} 是任意的取值 0，1，2，3 的序列，则总存在 $x\in A$，使 $\varepsilon_{mi+k}(x)=\varepsilon'_{mi+k}$，$i=M,M+1,\cdots$（其中，$x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(x)4^{-n}$），就称 A 为 G(n,k,m) 型集（n，k，m 为非负整

数）。

引理 6 若 $A\subset(0,1]$，并且 A 是 $G(n,k,m)$ 型的，则 $\dim_H A\geqslant 1/n$。

引理 7 若 $A\subset(0,1]$，并且 A 同时是 $G_{(2n+1,1,0)},G_{(2n+1,3,0)},\cdots,G_{(2n+1,2n-1,0)}$ 型的，则 $\dim_H A\geqslant n/(2n+1)$。

§2 主要结果

定理 1 若 $\{a_n\}\in l_2,\{a_n\}\notin l_1$，则 $\forall\ \alpha\in C,\alpha\neq 0,\dim_H\{x\in(0,1];\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}=1$。

证：设 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(x_j)\pi/2}=\alpha\}$，其中 $0<x_j\leqslant 1$。

设 $E'=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E,x_i$ 是由四进无理数，$i=1,2,\cdots,n\}$，对 $x'\in E'$，设 $x\in(0,1]$，$\exists\ x'=T_n(x)=(T_n^1(x),T_n^2(x),\cdots,T_n^n(x))$ 显然，x 是四进无理数，由引理 1 及引理 4，有

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(x'_j)\pi/2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(T_n^j(x))\pi/2}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_{(k-1)n+j}(x)\pi/2}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{i\varepsilon_k(x)\pi/2}$$

设 $\beta(\alpha,\{a_n\})=\{x;x\in(0,1],\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}\}$，

由上推导知 $E'\subset T_n(\beta(\alpha,\{a_n\}))$

又下证：$\dim_H E'\geqslant n-1$。

由题设 $\sum|a_n|=\infty$，$\exists\ j(1\leqslant j\leqslant n)$，使 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{(k-1)n+j}|=\infty$，不失一般性，取 $j=n$。

设 $A_j=\{x\in(0,1];\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(x)\pi/2}$ 收敛$\}$，$j=1,2,\cdots,(n-1)$。

设 $A'_j\subset A_j$，并且 A'_j 中的点是四进无理点

$$A^*=X_{1\leqslant j\leqslant n-1}A'_j(Cartesian\text{ 积})$$

对 $x^*\in A^*$，$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_{n-1}^*)$，

设 $\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(x_j^*)}=\alpha_1$，

由引理 5 存在四进无理数 x_n^*，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+n}e^{i\varepsilon_k(x_n^*)}=\alpha-\alpha_1$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{(k-1)n+j}e^{i\varepsilon_k(x_j^*)}=\alpha_1+\alpha+\alpha_1=\alpha$$

因此，$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)\in E'$，由引理 3，$m(A_j)=(A'_j)=1$（m 是 L 测度），

所以

$$\dim_H A^*=n-1$$

又 E' 在 $X_{1\leqslant j\leqslant n-1}x_j$ 上的投影集包含了 A^*，所以

$$\dim_H E'=n-1$$

又由引理 2，

$$\dim_H\beta(\alpha,\{a_n\})=\frac{1}{n}\dim_H T_n(\beta(\alpha,\{a_n\}))\geqslant\frac{1}{n}\dim_H E'\geqslant\frac{1}{n}(n-1)=1-\frac{1}{n}$$

由 $n>1$ 的任意性知

$$\dim_H\beta(\alpha,\{a_n\})=1。$$

同理还可以考虑：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)2\pi/3}$，$x\in(0,1]$，$x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(x)3^{-n}$，$\varepsilon_n(x)=0,1,2$，并且有

定理 1′　若$\{a_n\}\in l_2$，$\{a_n\}\bar{\in} l_1$，则$\forall\ \alpha=a+ib, a\in R\backslash\{0\}, b\in R\backslash\{0\}$，$\dim_H\{x\in(0,1]; \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)2\pi/3}=\alpha\}=1$。

事实上，只需证明下列引理 5′，用同定理 1 完全相同的方法可证明定理 1′。

引理 5′　若$\sum|a_i|=\infty$，$a_i\to 0, i\to\infty$，则$\forall\ \alpha, \alpha=a+ib, a\in R/\{0\}$，$\exists\ x_0\in(0,1]$，$x_0$ 是三进无理点，使得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x_0)2\pi/3}=\alpha$。

注 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2+i\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\cos\theta+i\sin\theta)e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}$所以，对$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2+i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 有类似于定理 1 的结果。对$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)2\pi/3+i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 有类似于定理 1′的结论。

定理 2　设$\{a_n\}$是有界变差序列($\sum_{i\geqslant 1}|a_i-a_{i+1}|<\infty$)，$\{a_n\}\bar{\in} l_1$，$a_n\to 0$，则$\forall\ \alpha\in C, \neq 0$，有

$$\dim_H\{x\in(0,1]; \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}\geqslant 1/2$$

证：不妨设$a_i>0$。

因为$\{a_n\}\bar{\in} l_1$，以及$\sum_{j=0}^{2n}\sum_{i=1}^{\infty}a_{(2n+1)i-(2n-j)}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$，所以，下列 $2n+1$ 个序列$\{a_{(2n+1)i-2n}\}$，$\{a_{(2n+1)i-(2n-1)}\}$，…中至少有一个不在l_1中，不失一般性，设$\{a_{(2n+1)i}\}\bar{\in} l_1$。

设$s_n=\pm 1$，或$\pm i$，选$S_{(2n+1)i-(2n-j)}(j=0,2,4,\cdots,2n-2, i=1,2\cdots)$是任意取值$\pm 1$，$\pm i$ 的序列，设$S_{(2n+1)i-(2n-j)}=-S_{(2n+1)i-(2n-j-1)}$，又因为$\sum(a_i-a_{i+1})$绝对收敛，所以它的任何子级数$\sum'(a_i-a_{i+1})$绝对收敛，从而，级数$\sum_{i=1}^{\infty}S_{(2n+1)i-(2n-j)}a_{(2n+1)i-(2n-j)}+S_{(2n+1)i-(2n-j-1)}a_{(2n+1)i-(2n-j-1)})$收敛，记其和为$\alpha_{2n-j}$。

$\forall\ \alpha\in C, \alpha\neq 0$，设$\alpha'=\alpha-\sum_{j=0}^{2n-2}\alpha_{2n-j}$，由引理 5，存在$x_0\in(0,1]$，$x_0$ 是四进无理点，使$\sum a_{(2n+1)i}e^{i\varepsilon_{2n+1}(x_0)\pi/2}=\alpha'$，记$S_{(2n+1)i}=e^{i\varepsilon_{2n+1)i}(x_0)\pi/2}=\pm 1$ 或$\pm i$，并且

$$S_{(2n+1)i}a_{(2n+1)i}=\alpha'=\alpha-\sum_{j=0}^{2n-2}\alpha_{2n-j}$$

$$=\alpha-\sum_{j=0}^{2n-2}(\sum_{i=1}^{\infty}S_{(2n+1)i-(2n-j)}a_{(2n+1)i-(2n-j)}+S_{(2n+1)i-(2n-j-1)}a_{(2n+1)i-(2n-j-1)})$$

于是

$$\alpha=\sum_{j=0}^{2n}\sum_{i=1}^{\infty}S_{(2n+1)i-(2n-j)}a_{(2n+1)i-(2n-j)}=\sum_{i=1}^{\infty}s_i a_i$$

注意到$x=\sum\varepsilon_n 4^{-n}$，$\varepsilon_n(x)=0,1,2,3$，$e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\pm 1$ 或$\pm i$ 以及$S_{(2n+1)i-(2n-j)}$，$j=0,2,4,\cdots,2n-2$，$i=1,2,\cdots$是任意选取的，所以$\{x; x\in(0,1], \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}$是 $G(2n+1,1,0)$，$G(2n+1,3,0)$，…，$G(2n+1,2n-1,0)$型的，由引理 7 知

$$\dim_H\{x, x\in(0,1], \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}\geqslant n/(2n+1)$$

又由 n 的任意性，知

$$\dim_H\{x, x\in(0,1], \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)\pi/2}=\alpha\}\geqslant 1/2$$

注，同理还可以考虑：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\varepsilon_n(x)2\pi/3}$，$x\in(0,1]$，$x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(x)\cdot 3^{-n}$，$\varepsilon_n(x)=0,1,2$，并且有与定理 2 类似的结论。

关于MINKOWSI容度的若干例子

陈世荣
（武汉大学数学系）

1、引言

M.L. Lapidus 和 C. Pomerance[1]把“Weyl Berry 猜想”[2,3]的研究转化成了集合的 Minkowski 容度的研究，但关于 Minkowski 容度的研究，基本上还是空白。就我们所知，到目前为此，只有[1]和[4]等很少的几篇文章仅对一维的情况作了非常有限的研究。在文章[4]中，作者给出了几个命题，并在其附注中同时指出，只要把条件稍减弱一点，命题即不成立。本文给出了若干个这方面的反例。

2、符号

关于 Bouligand 维数及 Minkowski 容度的详细定义，请参考文章[4]。

设 $F\subset R^n$ 为非空有界集合，我们仍用 $\triangle(F)$ 和 $\delta(F)$ 分别表示 F 的上 Bouligand 维数及下 Bouligand 维数。若 $\triangle(F)=\delta(F)$，则称此公共值为 F 的 Bouligand 维数，记为 $dimF$。此外，设 $D\geqslant 0$，我们还是用 $M^*(D,F)$ 和 $M_*(D,F)$ 分别表示 F 的 D 级上 Minkowski 容度和 D 级下 Minkowski 容度。若 $M^*(D,F)=M_*(D,F)$，则称此公共值为 F 的 D 级 Minkowski 容度，记为 $M(D,F)$。

若 $dimF$ 存在，则只需研究 $M^*(dimF,F)$ 和 $M_*(dimF,F)$，因而，在本文中如无特殊申明，我们用到记号 $M^*(D,F)$ 和 $M_*(D,F)$ 时，通常意味着 $dimF=D$。

3、例子

例 1　设 $F=\{S_n\}$，S_n 满足

$$S_n-S_{n+1}=\begin{cases}n^{-2}\ln^{-1}n, & n>1,\quad n\neq 2^k,\quad k\in N\\ n^{-2}, & n=2^k,\quad k\in N\end{cases}$$

则

$$M(\frac{1}{2},F)=O.$$

例 2　设 $F=\{S_n\}$，S_n 满足

$$S_n-S_{n+1}=\begin{cases}n^{-2}\ln n, & n\neq 2^k,\quad k\in N\\ n^{-2}, & n=2^k,\quad k\in N\end{cases}$$

则

$$M(\frac{1}{2},F)=+\infty$$

例 1 和例 2 的证明可完全仿照[4]中的证明方法来完成，以下各例也是一样，因此证明均从略。从例 1 可看出，[4]中命题 3 的条件 $C>0$ 不能换成 $C\geqslant 0$，同样从例 2 可看出，[4]中命

题 3 的条件 $C<\infty$ 也不能换成 $C\leqslant\infty$ 否则结论不成立

例 3　设 $F=\{S_n\}$，S_n 满足

$$S_n - S_{n+1} = \begin{cases} n^{-2}, & n \neq 2^k, \quad k \in N \\ n^{-2}\ln n, & n = 2^k, \quad k \in N \end{cases}$$

则

$$1 \leqslant M_*(\frac{1}{2},F) \leqslant M^*(\frac{1}{2},F) \leqslant 2$$

例 3 说明[4]中命题 1 的条件 $C>0$ 不能换成 $C\geqslant 0$，其中条件 $C<\infty$ 不能换成 $C\leqslant\infty$ 是显而易见的。

例 4　设 $F=\{S_n\}$，S_n 满足

$$S_n - S_{n+1} = \begin{cases} n^{-2}, & n \neq 2^k, \quad k \in N \\ n^{-2}\ln^{-1} n, & n = 2^k, \quad k \in N \end{cases}$$

则

$$1 \leqslant M_*(\frac{1}{2},F) \leqslant M^*(\frac{1}{2},F) \leqslant 2$$

例 4 说明[4]中命题 5 的条件 $C<\infty$ 不能换成 $C\leqslant\infty$，而其中条件 $C>0$ 不能换成 $C\geqslant 0$ 也是显然的。

例 5　设 $F=\{S_n\}$，S_n 满足

$$S_n - S_{n+1} = \begin{cases} n^{-2}, & n = 2k-1, \quad k \in N \\ n^{-2}, & n = 2k, \quad k \in N \end{cases}$$

则

$$M(\frac{1}{2},F) = 1$$

例 5 说明[4]中命题 6 的 $C<\infty$ 不能换成 $C\leqslant\infty$。而[4]中命题 7 的条件 $C>0$ 不能换成 $C\geqslant 0$ 亦是显然的。

参考文献

[1] M. L. Lapidus, C. Pomerance, Fonction zêta de Riemann et conjecture de Weyl—Berry pour les tambours fractals, C. R. Acad. Sc. Paris, 1990, t. 310, Série I. p343 348.

[2] M. V. Berry, Distribution of modes in fractal resonators, in Structural Stability in Physics, Berlin Heideberg New York, Springer -Verlag, 1979, p. 51－53.

[3] M. V. Berry, some geometric aspects of wave motion; wavefront dislocations, differaction catastrophes, diffractals, in Geometry of the Laplace Operator, Proc. Symp. Pure Math. 1980, vol. 36, p13－38.

[4] 陈世荣，一类集合的 MINKOWSKI 容度，数学杂志，vol. 13(1993) no. 1, p. 1－14.

一类集合的 Packing 维数

李文侠

武汉大学

【摘要】 本文利用测度的点态维数刻划了一类集合的结构进而求出它们的 Packing 维数. 本文的结果实际上解决了 CM[1]所提出的二个问题并且给出了 CM[1]中主要结论的一个简单证明.

【关键词】 广义 Moran fractals；多重分形分解；点态维数；Packing 维数.

§1 引言

Robert Cawley & R. Daniel Mauldin [1]对 Moran fractals 的多重分形分解进行了细致的研究. 李[2]对更广的一类分形集，称为广义 Moran fractals，研究了其多重分形分解问题. 广义 Moran fractals 下法定义：

设 $C=(c_{ij})_{t\times t}$ 为 0－1 不可约矩阵，令

$$\Omega(C)=\{\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\cdots)\in\prod_{1}^{\infty}\{1,2,\cdots,t\},c_{\sigma(k)\sigma(k+1)}=1,k=1,2,\cdots\};$$

$$S_k^i(C)\{\sigma=(\sigma(1),\cdots,\sigma(k))\in\prod_{1}^{k}\{1,2,\cdots,t\},\sigma(1)=i,\text{且 }c_{\sigma(j)\sigma(j+1)}=1,j=1,2,\cdots,k-1\}.$$

此处 $1\leqslant i\leqslant t,k\in N$. 又若 $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\cdots)$，记 $\sigma|k=(\sigma(1),\cdots,\sigma(k))$.

设 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 为 R^n 中的有界非空开集. 矩阵 $(t_{ij})_{t\times t}$ 满足 $0\leqslant t_{ij}<1$ 且 $t_{ij}\neq 0$ 当且仅当 $c_{ij}=1$. 设 $1\leqslant i\leqslant t$ 已给定，对 $\forall\ \sigma\in S_k^i(C)$ 归纳定义非空紧集 $M_i(\sigma)$ 如下(我们亦常将 $M_{\sigma(1)}(\sigma)$ 简记成 $M(\sigma)$)：

(Ⅰ)当 $k=1$ 时，$M_i(\sigma)=\overline{V}_i$；

(Ⅱ)假设 $k=m$ 时，$M_i(\sigma)$ 已确定. 当 $k=m+1$ 时，令非空紧集族 $\{M_i(\sigma*j):\sigma*j=(\sigma(1),\cdots,\sigma(m),j)\in S_{m+1}^i(C)\}$ 为 $M_i(\sigma)$ 的互不重迭的子集族且 $M_i(\sigma*j)$ 是 $\overline{V}_j$ 在某个相似率为 $\prod_{k=1}^{m-1}t_{\sigma(k)\sigma(k+1)}\cdot t_{\sigma(m)j}$ 的相似压缩映射下的像.

令 $M_i=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\sigma\in S_k^i(C)}M_i(\sigma)$，则 M_i 为非空紧集.

定义 1.1 称 $M=\bigcup_{i=1}^{t}M_i$ 为广义 *Moran fractals*. #

注 1.1 易于验证 *CM*[1] 中所讨论的 *Moran fractals* 即为满足下列(Ⅰ)－(Ⅲ)的广义 *Moran fractals*.

(Ⅰ)对 $1\leqslant i,j\leqslant t$，$c_{ij}=1$；

(Ⅱ)$V_1=\cdots=V_t$；

(Ⅲ)$t_{i_1j}=t_{i_2j}$，$1\leqslant i_1,i_2,j\leqslant t$. #

注 1.2 假设映射族 $\Phi=\{\varphi_{ij}:c_{ij}=1\}$ 满足：

(Ⅰ)$\varphi_{ij}:R^n\to R^n$ 为相似映射，相似率为 t_{ij}；

(Ⅱ)$V_i\supset\bigcup_{j:c_{ij}=1}\varphi_{ij}(V_j)$ 且 $\varphi_{ij_1}(V_{j_1})\cap\varphi_{ij_2}(V_{j_2})=\varnothing$，$j_1\neq j_2$.

如果对 $\forall \sigma \in S_k(C)$，令

$$M_k(\sigma)=\begin{cases} \bar{V}_1 & k=1 \\ \varphi_{\sigma(1)\sigma(2)}\circ\varphi_{\sigma(2)\sigma(3)}\circ\cdots\circ\varphi_{\sigma(k-1)\sigma(k)}(\bar{V}_{\sigma(k)}) & k\geq 2 \end{cases}$$

则称此时的广义 Moran fractals 具有"映射确定"结构.

进一步地，如果 $\varphi_{ij_1}(\bar{V}_{j_1})\bigcap\varphi_{ij_2}(\bar{V}_{j_2})=\varnothing$，$j_1\neq j_2$，则称此时的广义 Moran fractals 具有"两两不交、映射确定"结构. #

对 $\forall \sigma\in\Omega(C)$，令

$$\{g(\sigma)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}M(\sigma|k),$$

则 g 为 $\Omega(C)$ 到 M 上的连续满射.

设 $P=(p_{ij})_{t\times t}$ 为一行随机矩阵（i.e. $p_{ij}\geq 0$，$\sum_{j=1}^{t}p_{ij}=1$）且 $p_{ij}\neq 0$ 当且仅当 $c_{ij}=1$. 对 $\forall q\in R$，令 $\beta(q)$ 为方程

$$det(I_{t\times t}-(p_{ij}^{q}t_{ij}^{\beta})_{t\times t})=0$$

的最大实根. 又对 $\forall q\in R$，令

$$\alpha(q)=\frac{\sum\limits_{c_{ij}=1}\gamma_i(q)u_j(q)p_{ij}^{q}t_{ij}^{\beta(q)}\log p_{ij}}{\sum\limits_{c_{ij}=1}\gamma_i(q)u_j(q)p_{ij}^{q}t_{ij}^{\beta(q)}\log t_{ij}}$$

此处 $(\gamma_1(q),\cdots,\gamma_t(q))$ 及 $(u_1(q),\cdots,u_t(q))'$ 分别为矩阵 $(p_{ij}^{q}t_{ij}^{\beta(q)})_{t\times t}$ 的对应于特征值为 1 的严格正的行及列特征向量. 令

$$f(q)=q\alpha(q)+\beta(q)$$

易验证 $\alpha(q)$ 为严格正的连续函数，$\beta(q)$ 为严格单调下降的连续函数. 记

$$p(\sigma|k)=p_{\sigma(1)\sigma(2)}p_{\sigma(2)\sigma(3)}\cdots p_{\sigma(k-1)\sigma(k)};\qquad t(\sigma|k)=t_{\sigma(1)\sigma(2)}t_{\sigma(2)\sigma(3)}\cdots t_{\sigma(k-1)\sigma(k)}.$$

对 $\forall q\in R$，令

$$\hat{H}_q=\{\sigma\in\Omega(C):\lim_{k\to\infty}\log p(\sigma|k)/\log t(\sigma|k)=\alpha(q)\};\qquad H_q=g(\hat{H}_q).$$

在 $\Omega(C)$ 上建立概率测度 $\hat{\mu}_q$ 使得

$$\hat{\mu}_q(C(\sigma|k))=(\sum_{i=1}^{t}\gamma_i(q)u_i(q))^{-1}\gamma_{\sigma(1)}(q)u_{\sigma(k)}(q)p(\sigma|k)^{q}t(\sigma|k)^{\beta(q)},$$

此处 $C(\sigma|k)=\{\tau\in\Omega(C);\tau|k=\sigma|k\}$ 为以 $\sigma|k$ 为底的 k 级柱集. μ_q 为 R^n 上的由 g 所诱导的像测度.

$$\mu_q(E)=\hat{\mu}_q(g^{-1}(E)),\quad E\subset R^n.$$

在[2]中，我们得到以下关于广义 Moran fractals 的多重分形分解的结果，它推广了[1]的有关结论.

定理 1.2 对 $\forall q\in R$，我们有：

（Ⅰ）$\hat{\mu}_q(\hat{H}_q)=\mu_q(H_q)=1$；　　（Ⅱ）$dim_H H_q=dim_H\mu_q=f(q)$. #

对于 Moran fractals 的情形，[1]中定理 3.3 在较强的条件下，即具有"两两不交，映射确定"结构，用 μ_1 的点态维数刻划了 H_q 的结构. 然而，他们又提出上述条件是否可以不要？此外还提出 $dim_H H_q=dim_P H_q$ 是否成立？本文在下一节中对于广义 *Moran fractals* 的情形将给出

（Ⅰ）对 $\forall q_0,q\in R$，用 μ_{q_0} 的点态维数来刻划 H_q 的结构；

（Ⅱ）$dim_H H_q=dim_P H_q$.

由此并结合注 1.1 可知[1]中所提出的上述二个问题得到证明.

§2 主要结果

在分形几何学中，我们经常讨论一个集合 E 的下列几种维数：Hausdorff 维数 $\dim_H E$，上 Bouligand 维数 $\overline{\dim}_B E$ 及 Packing 维数 $\dim_P E$，它们之间满足：

$$\dim_H E \leqslant \dim_P E \leqslant \overline{\dim}_B E$$

Ta[3] 称满足 $\dim_H E = \dim_P E$ 的集合为 fractal. 关于 Packing 维数，Tr[4] 给出：

命题2.1 $\dim_P E = \inf_{\mu}\{\sup_{x\in E}\{\limsup_{\varepsilon\to 0}\log\mu(B(x,\varepsilon))/\log\varepsilon\}\}$.

此处 μ 为使得 $\mu(E) > 0$ 的有限测度． #

$\hat{\mu}_q$ 的定义及定理 1.2 表明 $\overline{H}_q = M$，故

$$\dim_H H_q = f(q) \leqslant \dim_P H_q \leqslant \overline{\dim}_B H_q = \dim_B M = d \tag{2.1}$$

此处 d 为方程

$$\det(I_{t\times t} - (t_{ij}^d)_{t\times t}) = 0$$

的最大实根.

定理 2.2 设 $q_0, q \in R$ 给定，则对 $\forall x \in H_q$，μ_{q_0} 在 x 处的点态维数为 $q_0\alpha(q) + \beta(q_0)$，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\mu_{q_0}(B(x,\varepsilon))}{\log\varepsilon} = q_0\alpha(q) + \beta(q_0)$$

证明：设 $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots) \in \hat{H}_q$，考察球 $B(g(\sigma),\varepsilon)$. 设 l 是使得

$$M(\sigma(l)) \subset B(g(\sigma),\varepsilon) \tag{2.2}$$

成立的最小整数. 则由 l 的定义可知

$$\operatorname{diam}\overline{V}_{\sigma(l)}/2 \leqslant \varepsilon/t(\sigma|l) < \operatorname{diam}\overline{V}_{\sigma(l-1)}/\min_{c_{ij}=1} t_{ij} \tag{2.3}$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log t(\sigma|l)/\log\varepsilon = 1 \tag{2.4}$$

又由(2.3)、(2.4)可知

$$\begin{aligned}\mu_{q_0}(B(g(\sigma),\varepsilon)) &\geqslant \mu_{q_0}(M(\sigma|l)) \geqslant \hat{\mu}_{q_0}(C(\sigma|l)) \\ &\geqslant C_1\varepsilon^{q_0\alpha(q)+\beta(q_0)}\frac{\hat{\mu}_{q_0}(C(\sigma|l))}{t(\sigma|l)^{q_0\alpha(q)+\beta(q_0)}} \geqslant \frac{C_2\varepsilon^{q_0\alpha(q)+\beta(q_0)}p(\sigma|l)^{q_0}}{t(\sigma|l)^{q_0\alpha(q)}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.4)、(2.5)表明

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\mu_{q_0}(B(g(\sigma),\varepsilon))}{\log\varepsilon} \leqslant q_0\alpha(q) + \beta(q_0)$$

另一方面，对 $\varepsilon > 0$ 及 $\tau = (\tau(1), \tau(2), \cdots) \in \hat{H}_q$，设 h 为使得 $t(\tau|h) < \varepsilon$ 成立的最小整数. 则

$$\varepsilon\min_{c_{ij}=1} t_{ij} \leqslant t(\tau|h) < \varepsilon \tag{2.6}$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log t(\tau|h)/\log\varepsilon = 1 \tag{2.7}$$

设 $S(\varepsilon)$ 为所有有限字码 $(\tau(1),\cdots,\tau(h))$ 所组成的集，则 $S(\varepsilon)$ 为有限集合并且以其元素为底所构成的全体柱集生成 $\Omega(C)$ 的一个分划，即互不相交且并为 $\Omega(C)$. 对于固定的 $j_0 \in \{1,2,\cdots,t\}$，集族 $\mathscr{G}_{j_0}(\varepsilon) = \{M^\circ(\tau|h): \tau(1) = j_0, \tau|h \in S(\varepsilon)\}$ 为不交开集族. 由(2.6)及 $M^\circ(\tau|h)$ 的定义可知存在不依赖于 ε 及 j_0 的常数 C_1 与 C_2 使得每个 $\mathscr{G}_{j_0}(\varepsilon)$ 中的每个开集包含一个半径为

$C_1\varepsilon$ 的球且被一个半径为 $C_2\varepsilon$ 的球所包含. 从而由 Hu[5] 中引理 5.3.1 可知最多存在 $((1+2C_2)/C_1)^s$ 个 $\mathscr{G}_{t_0}(\varepsilon)$ 的元素,它的闭包与 $B(g(\sigma),\varepsilon)$ 相交. 设

$$I_a(\varepsilon)=\{\tau|h\in S(\varepsilon);M(\tau|h)\cap B(g(\sigma),\varepsilon)\neq\varnothing\},$$

则 $I_a(\varepsilon)$ 包含最多 $t((1+2C_2)/C_1)^s$ 个元素. 从而由(2.6)可知

$$\mu_{q_0}(B(g(\sigma),\varepsilon))=\hat{\mu}_{q_0}(g^{-1}(B(g(\sigma),\varepsilon))\leqslant\sum_{\tau|h\in I_a(\varepsilon)}\hat{\mu}_{q_0}(C(\tau|h))$$

$$\leqslant C\varepsilon^{q_0\alpha(q)+\beta(q_0)}\sum_{\tau|h\in I_a(\varepsilon)}\frac{p(\tau|h)^{q_0}}{t(\tau|h)^{q_0\alpha(q)}}\tag{2.8}$$

由(2.7)、(2.8)可得

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\log\mu_{q_0}(B(g(\sigma),\varepsilon))/\log\varepsilon\geqslant q_0\alpha(q)+\beta(q_0)$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\log\mu_{q_0}(B(g(\sigma),\varepsilon))/\log\varepsilon=q_0\alpha(q)+\beta(q_0)\qquad\#$$

由命题 2.1,定理 2.2 及(2.1)式立即可得

定理 2.3 $\dim_H H_q=\dim_P H_q=f(q)$. #

此定理表明集合 H_q 在 *Taylor* 意义下为 *fractal*.

注 2.1 由定理 2.2 及 Young[6]命题 2.1 立即可得 $\dim_H H_q=f(q)$. 从而将[1]中相关结果的证明过程大为简化.

对加权情形下的广义 Moran fractals (见[2]),同法可得

定理 2.2′ 设 $q_0,q\in R$ 给定,则对 $\forall x\in H_{q,\omega}$,$\mu_{q_0,\omega}$ 在 x 处的点态维数为 $q_0\alpha(q,\omega)+\beta(q_0,\omega)+\gamma(q,\omega)$,即

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\log\mu_{q_0,\omega}(B(x,\varepsilon))}{\log\varepsilon}=q_0\alpha(q,\omega)+\beta(q_0,\omega)+\gamma(q,\omega)\qquad\#$$

定理 2.3′ $\dim_H H_{q,\omega}=\dim_P H_{q,\omega}=f(q,\omega)$ #

致谢: 作者衷心感谢余家荣教授、文志英教授的悉心指导.

参考文献

[1]Robert Cawley and R. Daniel Mauldin, Multifractal Decompositions of Moran fractals, Advances in Mathematics, Vol. 92, No. 2 (1992), P196—236

[2]李文侠,准自相似集的若干研究及其应用,武汉大学博士学位论文,1993 年 4 月.

[3]S. J. Taylor, The theory of random fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100(1986), 383—406.

[4]Claude Tricot, Rectifiable and Fractal sets, in *Fractal Geometry and Analysis*, J. Bélair and S. Dubuc (eds.), NATO ASI Series C, (1989), Vol 346.

[5]J. E. Hutchinson, Fractals and Self—Similarity, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 713—747.

[6]L—S. Young, Dimension entropy and Lyapunov exponents, Ergodic Theory Dynamical Systems 2(1982), 109—129.

Stable 分量过程的图集的 Packing 测度

赵兴球

(武汉大学数学系)

摘　要

本文考虑 R^d 中具有如下形式的过程：$X(t)=(X_1(t)),X_2(t),\cdots,X_N(t))$，其中 $X_i(t)$ 为 R^{d_i} 中指标为 α_i 的 Stable 过程 $(1\leqslant i\leqslant N)$，$X_1(t),\cdots,X_N(t)$ 相互独立，$d=d_1+\cdots+d_N$. 我们通过讨论过程 $G(t)=(t,X(t))$ 的逗留时分布的渐近性质，研究图集 $G[0,1]$ 的 Packing 测度函数问题，获得了 $\psi-p(G[0,1])=0$ 或 $+\infty$ 的积分判别法，或者其确切测度函数

关键词　Stable 分量过程　图集　Packing 测度.

§1　引　言

W. E. Pruitt 和 S. J. Taylor 在[1]中研究了 Stable 分量过程的样本轨道性质，获得了其象集、图集的 Hausdorff 测度函数. 本文研究此类过程的图集的 Packing 测度函数问题.

定义 1.1　设 $X_i(t)$ 是 R^{d_i} 中指标为 α_i 的 Stable 过程，$i=1,\cdots,N$，$N\geqslant 2$，且 $X_1,\cdots,X_N$ 相互独立，令 $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_N(t))$，$d=d_1+\cdots+d_N$，则称 $X(t)$ 为 R^d 中具有 Stable 分量的过程. 简称为 Stable 分量过程.

我们不妨设 $0<\alpha_N<\cdots<\alpha_1\leqslant 2$，记 $G(t)=(t,X(t))$，$G(E)=\{(t,X(t)):t\in E\}$

我们获得主要结果如下：

定理 1.1　设 $X(t)$ 如定义 1.1，且 $X_i(t)$ 为严 Stable 过程，$i=1,\cdots,N$，h 为测度函数.

(i) 当 $\alpha_1>d_1>\alpha_2$，$\psi(s)=s^{2-\frac{1}{\alpha_1}}h(s)$　则　$\psi-p(G[0,1])=\begin{cases}0 & a.s.\\ +\infty & a.s.\end{cases}$ 依据 $\int\frac{h^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =+\infty\end{cases}$

(ii) 当 $\alpha_1>d_1$，且 $\alpha_2\geqslant 1$，$\psi(s)=s^{\rho}h(s)$，$\rho=1+\alpha_2(1-\frac{1}{\alpha_1})$　则 $\psi-p(G[0,1])=\begin{cases}0 & a.s.\\ +\infty & a.s.\end{cases}$

依据 $\int\frac{h^{2\gamma}(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =+\infty.\end{cases}$ 其中 $\gamma=\frac{\alpha_1}{2\alpha_1-1}$

(iii) 当 $1<\alpha_1<d_1$，$\psi(s)=s^{\alpha_1}h(s)$，$\alpha_1\neq 2$，则 $\psi-p(G[0,1])=\begin{cases}0 & a.s.\\ +\infty & a.s.\end{cases}$ 依据 $\int\frac{h^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =+\infty.\end{cases}$

(iv) 当 $\alpha_1<1$，$\psi(s)=s$，则 a.s. 对每一 Borel 集 $E\subset[0,1]$，$\psi-p(G((E))=|E|$（$|E|$ 为 E 的 Lebesgue 测度）

此处 $\psi-p(A)$ 表集合 A 的 ψ—packing 测度，下同.

定理 1.2　设 $X(t)$ 如定义 1.1，且 $X_i(t)$ 为严 Stable 过程，$i=1,2,\cdots,N$，$2=\alpha_1<d_1$，$\psi(s)=s^2(\log|\log s|)^{-1}$，则 a.s 对每一 Borel 集 $E\subset[0,1]$，

(i) $\psi-p(X(E))=c|E|$，(ii) $\psi-p(G(E))=c|E|$

定理 1.3　设 $X(t)$ 如定义 1.1，$X_1(t)$ 为 R^{d_1} 中严非对称柯西过程，则 a.s. 对每一 Borel 集 $E\subset[0,1]$，(i) 当 $d_1\geqslant 1$，$\psi(s)=s|\log s|^{-1}$，$\psi-p(G(E))=c|E|$，(ii) 当 $d_1\geqslant 2$，$\psi(s)=s|\log s|^{-1}$，$\psi-p(X(E))=c|E|$.

这里测度函数与 ψ-测度 P、P^{**}、外测度 P^{**}、Packing 测度 p 的定义及其关系均见[5]. 文

中所出现的常数 c 在不同处可表示不同值

§2 定理的证明

由于篇幅所限，这里只给出定理 1.1 的证明

设 X 为任一随机过程，令 $T(a,s)=|\{0\leqslant t\leqslant s;|X(t)|\leqslant a\}|$，$T(a)=|\{t\geqslant 0;|X(t)|\leqslant a\}|$

引理 2.1 假设 $1<\alpha_1\leqslant 2$，$\beta=1-\frac{1}{\alpha_1}$，$X(t)$ 为 R 中指标为 α_1 的 Stable 过程，$L(x,s)$ 是它的连续局部时，$0<\alpha_2<\alpha_1$，$0<\gamma_0<\infty$，则对 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}(\alpha_1-1-\alpha_2(1-\frac{1}{\alpha_1}))$，$\gamma\leqslant\gamma_0$，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{L(\gamma 2^{\ldots},\gamma 2^{k\alpha_2})}{2^{k\alpha_2\beta}}\quad a.s.$$

若记 $H(a)=\{\sup_x L(x,\gamma a^{\alpha_2})\leqslant 1\}$，则还存在 a_0，使当 $0<a\leqslant a_0$，

$$E\left[\frac{T(a,\gamma a^{\alpha_2})-2aL(0,\gamma a^{\alpha_2})}{a^{\ldots}}I_H(a)\right]\leqslant ca^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

令 $T_1(a,s)=T(a,s)$，$T_2(a,s)=|\{-s\leqslant t\leqslant 0;|X'(t)|\leqslant a\}|$，$X'(-t)$ 与 $X(t)$ 独立同分布

推论 2.1 假设 h 为单调函数且满足 $s^{\ldots}h(s^{\alpha_2})\to\infty$，(当 $s\downarrow 0$)，$h_1(s)$ 为测度函数，对于 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}(\alpha_1-1-\alpha_2(1-\frac{1}{\alpha_1}))$，则有

(i) $\limsup_{a\to 0}\frac{T(a,a^{\alpha_2}h_1(a))}{ah(a^{\alpha_2})}=2\limsup_{a\to 0}\frac{L(0,a^{\alpha_2}h_1(a))}{h(a^{\alpha_2})}$ a.s.；

(ii) $\liminf_{a\to 0}\frac{T(a,a^{\alpha_2}h_1(a))}{ah(a^{\alpha_2})}=2\liminf_{a\to 0}\frac{L(0,a^{\alpha_2}h_1(a))}{h(a^{\alpha_2})}$ a.s.；

$\liminf_{a\to 0}\frac{T_1(a,a^{\alpha_2}h_1(a))+T_2(a,a^{\alpha_2}h_1(a))}{ah(a^{\alpha_2})}=2\liminf_{a\to 0}\frac{L_1(0,a^{\alpha_2}h_1(a))+L_2(a,a^{\alpha_2}h_1(a))}{h(a^{\alpha_2})}$ a.s.；

引理 2.2 设 X 如定理 1.1，当 $\alpha_1>d_1>\alpha_2$，$\psi(s)=s^{2-\ldots}h(s)$，$h(s)$ 为测度函数，则

$$\liminf_{a\to 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=\begin{cases}0 & a.s.\\ +\infty & a.s.\end{cases}\qquad 依据\int_{0+}\frac{h^2(s)}{s}ds\begin{cases}=+\infty,\\ <\infty.\end{cases}$$

其中 $T_1(a,a)=T(a,a)$，$T_2(a,a)=|\{-a\leqslant t\leqslant 0;|X(t)|\leqslant a\}|$，$X(-t)$ 与 $X(t)$ i.i.d.。

证明 设 $X_0=(X_2,\cdots,X_N)$，$X_{01}=X_0$，$X_{02}(-t)$ 与 $X_{01}(t)$ i.i.d.，

$T_{i1}(a)=|\{t\geqslant 0;|X_{i1}(t)|\leqslant a\}|$，$T_{i1}(a,s)=|\{0\leqslant t\leqslant s;|X_{i1}(t)|\leqslant a\}|$

$T_{i2}(a)=|\{t\leqslant 0;|X_{i2}(t)|\leqslant a\}|$，$T_{i2}(a,s)=|\{-s\leqslant t\leqslant 0;|X_{i2}(t)|\leqslant a\}|$

$X_{11}=X_1$，$X_{12}(-t)$ 与 $X_{11}(t)$ i.i.d.。

(i) 设 $\int_{0+}\frac{h^2(s)}{s}ds=+\infty$，由 $T_j(a,a)\leqslant T_{1j}(a,a)(j=1,2)$ 及[2]定理 2.4 得

$$\liminf_{a\to 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=0\quad a.s.$$

(ii) 设 $\int_{0+}\frac{h^2(s)}{s}ds<+\infty$，$\forall\gamma>0$ 令 $E_n=\{\omega;T_1(2^{-n},2^{-n})+T_2(2^{-n},2^{-n})<\gamma\psi(2^{-n+1})\}$，

$D_{j,n}=\{\omega;T_j(2^{-n},2^{-n})<\gamma\psi(2^{-n+1})\}$，$j=1,2$ 则 $E_n\subset D_{1,n}\cap D_{2,n}$，$D_{1,n}$ 与 $D_{2,n}$ 独立

因为

$$D_{j,n}\subset\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 2^{-n}}|X_{0j}(t)|>2^{-n}\}\cup\{T_{1j}(2^{-n},2^{-n})<\gamma\psi(2^{-n+1})\}$$

所以 $P(D_{j,n})\leqslant p_{n1}+p_{n2}$，而由[1]引理 1.3 和[3]引理 7 得 $p_{n1}\leqslant c2^{-n(1-\alpha_2)}$，故有 $\sum p_{n1}<\infty$

现在我们估计 p_{n2}，不妨设 $a^{-\frac{1}{2}\varepsilon}h(a)\to\infty$（当 $a\downarrow 0$）$(0<\varepsilon<\frac{1}{4}(\alpha_1-2-\frac{1}{\alpha}))$

令 $H_j(a)=\{\omega;\sup_x L_j(x,a)\leqslant 1\}$，则由[2]中 P.354 知当 $2^{-n}<a$，

$P\{T_2(2^{-n},2^{-n})<\lambda\psi(2^{-n-1})\}\bigcap H_2(a))\leqslant ch(2^{-n})$,

因此 $\sum P(E_{\lambda,n}\bigcap H_1(a)\bigcap H_2(a))<\infty$. 从而得到 $\liminf\limits_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=+\infty$ a. s.

引理 2.3 设 X, h 如定理 1.1, 且 $1<\alpha_1<\alpha_2$, $\psi(s)=s^{\alpha}h(s)$, $\alpha_1\neq 2$, 则

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=\begin{matrix}0 & \text{a. s.}\\ +\infty & \text{a. s.}\end{matrix}\qquad 依据\int_{0^+}\frac{h^2(s)}{s}ds\begin{matrix}=+\infty,\\ <\infty.\end{matrix}$$

引理 2.4 设 X, h 如定理 1.1, $\alpha_1<\alpha_2$, 且 $\alpha_2\geqslant 1$, 则当 a 充分小时 $T(a,a)=T(a,a^{\alpha}h(a))$ a. s.

引理 2.5 设 X, h 如定理 1.1, $\alpha_1>\alpha_2$, 且 $\alpha_2\geqslant 1$, $\psi(s)=s^{\gamma}h(s)$, $\gamma=1+\alpha_2(1-\frac{1}{\alpha_1})$, $\gamma'=\frac{\alpha}{2\alpha_1-1}$, 则

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=\begin{matrix}0 & \text{a. s.}\\ +\infty & \text{a. s.}\end{matrix}\qquad 依据\int_{0^+}\frac{h^{2\gamma'}(s)}{s}ds\begin{matrix}=+\infty,\\ <\infty.\end{matrix}$$

证明 (i) 设 $\int_{0^+}\frac{h^{2\gamma'}(s)}{s}ds<\infty$. $\forall\lambda>0$, 令 $E_{\lambda,n}=\{\omega: T_1(2^{-n},2^{-n})+T_2(2^{-n},2^{-n})<\lambda\psi(2^{-n-1})\}$, $D_{j,\lambda,n}=\{\omega: T_j(2^{-n},2^{-n})<\lambda\psi(2^{-n-1})\}$ $j=1,2$.

则 $E_{\lambda,n}\subset D_{1,\lambda,n}\bigcap D_{2,\lambda,n}$, 且 $D_{1,\lambda,n}$ 与 $D_{2,\lambda,n}$ 独立 由于

$D_{1,\lambda,n}\subset\{T_1(2^{-n},2^{-(n+1)\alpha_2}h^{\gamma}(2^{-n-1}))<\lambda\psi(2^{-n-1})\}$

$\subset\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 2^{-(n+1)\alpha_2}h^{\gamma}(2^{-n-1})}|X_{0j}(t)|>2^{-n-1}\}\bigcup\{T_{1j}(2^{-n-1},2^{-(n+1)\alpha_2}h^{\gamma}(2^{-n-1}))<\lambda\psi(2^{-n-1})\}$

若令 $H_1(a)=\{\omega:\sup\limits_{x}L_{1j}(x,a^{\alpha}h(a))\leqslant 1\}$, 则利用引理 2.1, 仿引理 2.2(ii) 可证

$P(D_{1,\lambda,n}\bigcap h_1(a))\leqslant ch^{\gamma}(2^{-n})$

从而得到 $\liminf\limits_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=+\infty$ a. s.

(ii) 设 $\int_{0^+}\frac{h^{2\gamma'}(s)}{s}ds=+\infty$. 由引理 2.4 和推论 2.1 及[5]引理 5 可得

$\liminf\limits_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\psi(2a)}=0$ a. s.

定理 1.1 的证明.

(i)、(ii)、(iii)的证明: 分别利用引理 2.2, 引理 2.5, 引理 2.3, 采用[2]定理 2.5 之方法即可.

(iv) 当 $\alpha_1<1$, $\psi(s)=s$, 由于 $\alpha_N<\cdots<\alpha_1<1$,

$J=\sum\limits_{t\in[0,1]}|X(t)-X(t-)|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{t\in[0,1]}|X_i(t)-X_i(t-)|<\infty$

其余的证明与[2]定理 2.6 的证明完全类似.

本文是在导师胡迪鹤教授的指导下完成的, 在此表示衷心的感谢.

参考文献

1. W. E. pruitt, S. J Taylor, Z. W. 12(1969), 267-289.
2. F. Rezakhanlou, S. J. Taylor. Asterisque(1988), 157-158, 341-362.
3. S. J. Taylor, J. Math. Mech. 16(1967), 1229-1246.
4. S. J. Taylor, Stoch. Proc. Appl. Springer, Lect. re Notes 1203(1985), 214-222.
5. S. J. Taylor, C. Tricot Trans. Amer. Math. Soc 288(1985), 679-699.

一类广义的 MW 函数图象的 BOX 维数

华 宇 明

（上海铁道学院，上海 200333）

自从 B. B. Mandelbrot 的" Fractal Geometry of Nature" 一书出版后，分形几何已在许多领域得到了广泛的应用。人们发现，一些在理论上和应用上都很有意义的分形是以函数形式出现的，许多现象被描述成时间的函数时，就显示出分形的特性，因此函数图象维数的研究一直是分形研究中的一个课题。经典的形如

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t), \qquad 1 < s < 1, \lambda > 1$$

的 Weierstrass 函数已被获知是分形曲线，Box 维数是 s，且很大程度上猜测其 Hausdoff 维数也是 s。Mandelbrot 在 70 年代对经典的 Weiersrass 函数进行了推广，提出了形如

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} [1 - \cos(\lambda^k t)]$$

的函数，现称它为 Mandelbrot－Weierstrass 函数（简称 MW－函数），并猜测其图象的 Hausdorff 维数是 s，1982 年，Berry 和 Lewis 指出了它的物理意义。本文对 MW 函数进行了推广，给出了一类广义的 MW 函数，并得到如下定理，此结果对维数的算法研究，信号处理等方面有应用价值。

定理：设 ϕ_t 是 R 上的 Lipschitz 函数，$t \in T$，T 可以是有限集，可列集，或不可列集，且满足

$$|\phi_t(x_1) - \phi_t(x_2)| \leqslant C_t |x_1 - x_2|, \text{且 } Sup\, C_t = C,$$

$$\phi_t(x+1) = \phi_t(x),$$

$$\phi_t(0) = 0,$$

$$\| \phi_t \| = l_t, \; l_1 \leqslant l_t \leqslant l_2,$$

设函数 $MW(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{-\alpha} [\phi_{t_n}(b_n x + \theta_n) - \phi_{t_n}(\theta_n)]$ 式中

$0 < \alpha < 1$,

$t_n \in T$,

θ_n 为随机相位，

$1 < \lambda_1 \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \lambda_2$, b_n 为实数，

$\mu_1 b_n \leqslant a_n \leqslant \mu_2 b_n$, $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2$, a_n 为实数，

则当 λ_1 充分大时，$MW(x)$ 在 [0, 1] 上的图象 Γ_{MW} 的 Box 维数 $DIM_B \Gamma_{MW} = 2 - \alpha$。

证明　先证明引理 1

引理 1　令 $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{-\alpha} \phi_{t_n}(b_n x + \theta_n)$，其余假设同定理，

则　$DIM_B \Gamma_{MW} = DIM_B \Gamma_W$。

证明　易证 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-\alpha}\phi_{i_n}(\theta_n)$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-\alpha}\phi_{i_n}(b_n+\theta_n)$

及 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{-\alpha}[\phi_{i_n}(b_n x+\theta_n) - \phi_{i_n}(\theta_n)]$ 一致收敛，因此可以令

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{-\alpha}[\phi_{i_n}(b_n x+\theta_n) - \phi_{i_n}(\theta_n)] - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-\alpha}\phi_{i_n}(\theta_n)$$

$\because$　$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant c\,\mu_1^{-\alpha}\sum_{-\infty}^{-1} b_n^{1-\alpha}|x_1 - x_2|$

$\therefore$　$g(x)$ 是 Lipshith 函数。由［3］可知 $DIM_B\Gamma_{MW} = DIM_B\Gamma_W$。

引理 1 证毕。

于是定理的证明归结为证明 $DIM_B\Gamma_W = 2-\alpha$。

将区间［0，1］分成［b_n］个区间，［b_n］是 b_n 的取整。

令　$I_{n,j} = [j[b_n]^{-1}, (j+1)[b_n]^{-1}]$，　$j = 0,1,2,\cdots,[b_n]-1$。

记 $W(x)$ 在 $I_{n,j}$ 上的上确界为 $supW(x)$，下确界为 $infW(x)$，其余类同。下面证明引理 2。

引理 2　$supW(x), infW(x)$ 如上所设，则

$$r_1 b_n^{-\alpha} \leqslant supW(x) - infW(x) \leqslant r_2 b_n^{-\alpha}$$

其中 r_1, r_2 为正数。

证明　记 $u_k(x) = a_k^{-\alpha}\phi_{i_k}(b_k+\theta_k)$。将 $W(x)$ 写成 $W(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) + \sum_{k>n} u_k(x)$

因为 ϕ_{i_k} 是 Lipschith 的，所以当 $x\in I_{n,j}$ 时

$$sup\,\phi_{i_k}(b_k+\theta_k) - inf\,\phi_{i_k}(b_k+\theta_k) \leqslant c_{i_k} b_k[b_n]^{-1} \leqslant cb_k[b_n]^{-1}$$

于是　$sup\,u_k(x) - inf\,u_k(x) \leqslant cb_k[b_n]^{-1}a_k^{-\alpha} \leqslant c\mu_1^{-\alpha}b_k^{1-\alpha}[b_n]^{-1}$

$\leqslant c\mu_1^{-\alpha}\lambda_1^{-(n-k)(1-\alpha)}b_n^{1-\alpha}[b_n]^{-1}$

$\leqslant 2c\,\mu_1^{-\alpha}\lambda_1^{-(n-k)(1-\alpha)}b_n^{-\alpha}$　（当 n 充分大时）

$sup\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - inf\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leqslant 2c\,\mu_1^{-\alpha}b_n^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\lambda_1^{-(n-k)(1-\alpha)}$

$\leqslant 2c\,\mu_1^{-\alpha}\lambda_1^{1-\alpha}(\lambda_1^{1-\alpha}-1)^{-1}b_n^{-\alpha}$

当　$k>n$ 时

$sup\,\phi_{i_k}(b_k+\theta_k) - inf\,\phi_{i_k}(b_k+\theta_k) \leqslant 2l_{i_k} \leqslant 2l_2$

$sup\,u_k(x) - inf\,u_k(x) \leqslant 2l_2\mu_1^{-\alpha}b_k^{-\alpha}$

$sup\sum_{k>n} u_k(x) - inf\sum_{k>n} u_k(x) \leqslant 2l_2\mu_1^{-\alpha}(\lambda_1^{\alpha}-1)^{-1}$

$sup\,W(x) - inf\,W(x) \leqslant r_2 b_n^{-\alpha}$

式中　$r_2 = 2c\,\mu_1^{-\alpha}\lambda_1^{1-\alpha}(\lambda_1^{1-\alpha}-1)^{-1} + 2l_2\mu_1^{-\alpha}(\lambda_1^{\alpha}-1)^{-1}$

现在再将 $W(x)$ 写成 $W(x) = u_n(x) + h(x)$，其中 $h(x) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x) + \sum_{k>n} u_k(x)$

由前面讨论可知

$$sup\,h(x) - inf\,h(x) \leqslant b_n^{-\alpha}[2c\,\mu_1^{-\alpha}(\lambda_1^{1-\alpha}-1)^{-1} + 2l_2\mu_1^{-\alpha}(\lambda_1^{\alpha}-1)^{-1}]$$

当　$x\in I_{n,j}$ 时，$sup\phi_{i_n}(b_n x) - inf\,\phi_{i_n}(b_n x) \geqslant l_{i_n} \geqslant l_1$

$sup\,u_n(x) - inf\,u_n(x) \geqslant l_1\mu_2^{-\alpha}b_n^{-\alpha}$

$$sup\, W(x) \quad inf\, W(x) \geqslant r_1 b_n^{\ \alpha}$$

其中 $r_1 = l_1 \mu_2^{\ \alpha} \quad 2\, \mu_1^{-\alpha}[c(\lambda_1^{-\alpha} - 1)^{-1} + l_2(\lambda_1^{\alpha} - 1)^{-1}]$

对固定的 $c, \mu_1, \mu_2, l_1, l_2$，只要 λ_1 取得充分大，总能使 r_1 是一个正常数。因此，

当 $x \in I_{n,j}$ 时， $r_1 b_n^{\ \alpha} \leqslant supW(x) - infW(x) \leqslant r_2 b_n^{\ \alpha}$

引理 2 证毕。

记 $\Gamma_{n,j}$ 为 $W(x)$ 在 $I_{n,j}$ 上的图象，则 $\Gamma_w = \bigcup_{j=0}^{b_n m_n} \Gamma_{n,j}$

记N（E，δ）表示集合 E 与 δ—mesh 相交的个数，则有

$$r_1 b_n^{\ \alpha} \leqslant N(\Gamma_{n,j}, b_n^{-1}) \leqslant r_2 b_n^{1-\alpha}, \qquad r_1 b_n^{2-\alpha} \leqslant N(\Gamma_w, b_n^{-1}) \leqslant r_2 b_n^{2\ \alpha}$$

任给 $\delta > 0$，设 $b_{n+1}^{-1} \leqslant \delta < b_n^{\ 1}$，则 $l_n b_n < l_n \delta^{-1} \leqslant l_n b_{n+1}^{-1}$

易得到 $r_1 b_n^{2-\alpha} \lambda_2^{-(2\ \alpha)} \leqslant N(\Gamma_w, \delta) \leqslant r_2 b_n^{2-\alpha} \lambda_2^{2-\alpha}$

于是由 box—counting 维数的计算公式

$$DIM_B \Gamma_W = \lim_{\delta \to 0} \frac{log\ N(\Gamma_w, \delta)}{log \delta}$$

令 $n \to \infty$ 得 $DIM_B \Gamma_{MW} = 2 - \alpha$。证毕。

参考文献

[1] Mandelblot. B. B The Frectal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco 1982

[2] Falconer. K. J Fractai Geometry, Mathematical foundations and aplications, John Wiley & sons 1990

[3] R. D. Mauldin and S. C Williams On the Hausdorff dimension of some graphs, Trans. Amer. Math, Soc. 298(1986)

[4] 李家龙 变尺度断片集与 Weierstrass 曲线维数的若干研究，博士学位论文，武汉大学 1991

[5] 华宇明 两类函数图象的 Hausdorff 维数的研究，上海铁道学院学报 1992, 13, (3): 1～9

平面上的不可求积曲线及其分维

李崇靖　安肇瑛　　　　杨多立

(云南民族学院数学系)　　(云南民族学院学报)

摘要　本文讨论了平面上不可求积曲线的构作，并给出了公式计算它们的分维数

关键词　简单 Jordan 弧　不可求积曲线　分形　分维　C-S 型集

Ⅰ　引　言

平面上的求积问题，是一个既古老又复杂的问题．微积分学的建立，使求积问题取得了巨大的进展，我们可以应用微积分学基本定理，解决了很多求积问题．然而我们也知道，在解决求积问题中，求积图形的边界曲线是有所限制的．有的图形边界曲线很特殊，可能会影响到图形的求积，即使图形不可求积．有下列命题：

定理 1　平面有界图形 P 可求面积的充分必要条件是：P 的边界 C 的面积为零．

平面图形的边界，一般是一条平面曲线，若说这一边界具有正的面积，这与"曲线是没有宽度的长"是相悖的，也是我们直觉难以想象的，似乎是呈现了一种"病态"．

分形分维(Fractal)理论的建立，使人们对过去的所谓病态函数，病态曲线有了新的认识，研究表明所谓病态函数、病态曲线是反映了客观世界更深层次的数量关系．诸如 peano 曲线、Koch 曲线、都具有自相似的分形结构，而且还具有大于 1 的维数．

我们的研究表明平面上的不可求积曲线，也具有自相似或广义自相似的分形结构，同样也具有大于 1 的维数．

Ⅱ　曲线的构作

我们构作两条有代表性的曲线，构造手续很大部分类似于我们的论文(Ⅰ)[1]、(Ⅱ)[2]、(Ⅲ)[3]中 C-S 集广义 C-S 型集的构作．

1. 平面上一条封闭的无重点的 Jordan 曲线

设 S_0 为平面上一个简单的封闭的无重点的多边形，其面积也记为 S_0．在 S_0 内任取 K_1 个无公共点的简单的封闭的无重点的多边形，称为一级子图形，以 S_1 来代表它们及它们的面积之和，再在每一个一级子图形中，又作有限个(个数可各不相等)无公共点的简单的封闭的无重点的多边形，称为二级子图形，其总数为 K_2，用 S_2 来代表它们及它们的面积之和，如此无限进行下去．这里各个 K_1、K_2、$\cdots K_m$，$\cdots$ 可不相等，记第 m 级子图形的最大直径为 d_m，即 $d_m = \max = \{d_1^{(m)}, d_2^{(m)}, \cdots d_{k_m}^{(m)}\}$，其中 $d_i^{(m)}$ 是 m 级子图形中第 i 个小子图形的直径，$(i = 1, 2, \cdots k_m)$ 各 $d_i^{(m)}$ 也可相同，构作时必须满足 $0 \leqslant d_m < d_{m-1} (m = 1, 2, \cdots)$．

任取一条简单 Jordan 弧连接在 S_0 边上，并延长到 S_0 的内部，使之连接到任意两个不同的一级子图形的边上，再把其余那些子图形都用一些没有公共点的简单 Jordan 弧

彼此连接起来，使每个一级子图形都用一条线连接到另一个上，然后我们再对每一个二级子图形用简单 Jordan 弧施以如上的手续连接起来，依此类推将这种手续无限进行下去

令

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

显然 S 是我们在文〔Ⅲ〕[3] 中所定义的的广义 $C-S$ 型集，易知 S 也是一个处处不连续的完备集.

我们以 l_i 表示连接第 i 级子图形的所有简单Jordan弧，令

$$l = \bigcup_{i=0}^{\infty} l_i$$

$$L = l \bigcup S$$

定理2 L是平面上一条封闭的无重点的Jordna曲线

证明 由 Jordan 曲线的定义，取闭区间〔0，1〕在构作各级子图形时，同时分割〔0，1〕构作映射不难得到证明

2 平面上一条不封闭的无重点的Jordan曲线.

在平面上任取 k 个（k 为正整数）简单的无重点的封闭的多边形，用 1 中的同样手续，在每个多边形中构作各级子图形，则得到 k 个 $C-S$ 型集，现记为 P_1，$P_2 \cdots P_{k}$ 然后用 $K+1$ 条互不相交的简单 Jordan 弧将这 k 个多边形串连起来，再用简单 Jordan 弧在每一多边形中施以 1 中构作 L 曲线时相同的手续，把各多边形中的各级子图形连接起来，依此类推将这种手续无限进行下去．以 f 表所有的简单 Jordan 弧．

令

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

$$F = f \bigcup P$$

定理3 F为平面上一条不封闭的无重点的Jordan曲线

证明 亦如定理1一样不难得证

如果我们用相似变换，在曲线 L 和 F 的构作中，取的各级多边形都是相似多边形，则 S 与 P_1，$P_2 \cdots$，P_k 就成为我们文〔Ⅰ〕[1] 与〔Ⅱ〕[2] 中的 $C-S$ 集与 $C-S$ 型集．若对连接多边形的简单 Jordan 弧也做特别选取，则 S 与 P_1，P_2，$\cdots P_k$ 将具有无限自相似的结构，那么曲线 L 与 F 也将具有无限自相似的结构

Ⅲ、曲线的维数

为简明起见，我们只考虑构作曲线时 S 与 P_1，P_2，$\cdots P_k$ 都是广义 $C-S$ 型集的情形，下面我们将计算曲线 L 与 F 的分维数时，要引用文(Ⅲ)[3] 中的结果列举于下:

定理 4 设 $V \subset R^n$，V 为广义 $C-S(1)$ 型集，且 $\lim\limits_{m\to\infty} d_m = 0$，则 $0 < D_c(V) < n$，即 V 是一个分形．

定理 5　设 $V \subset R^n$，V 为广义 $C-S(1)$ 型集，且正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a < V_0$，则 $D_c(V) = n$，即 V 为一胖分形．

定理 6　设 $V \subset R^n$，V 为广义 $C-S(2)$ 型集，且 $\lim_{m \to \infty} d_m = 0$，则 $D_c(V) = 0$.

定理 7　设 $V \subset R^n$，V 为广义 $C-S(1)$ 型集，且 $\lim_{m \to \infty} d_m = 0$，则 $D_c(V) = n - j$，$j \in (0, n)$ 的充分必要条件为：

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\ln(1 - \sum_{i=1}^{m} a_i)}{\ln C_m k_m} = \frac{j}{j-n}$$

定理 8　设 $V \subset R^n$，V 为一广义 $C-S(2)$ 型集，且 $\lim_{m \to \infty} d_m = \eta$，（$\eta$ 为正的常数）

1°　若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A < V_0$，则 $D_c(V) = n$，即 V 为一胖分形．

2°　若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A = V_0$，则 $D_c(V) = p$，（p 为小于 n 的正整数），即 V 为一瘦分形

定理 4 到定理 8 的结论都是在 n 维欧氏空间 R^n 中成立的，现在我们考虑的是平面曲线的问题，即 $n=2$ 的情形，显然前面所讨论的广义 $C-S$ 型集 S 与 P_1，P_2，$\cdots P_k$，只要定理的条件满足，S 与 P_1，P_2，$\cdots P_k$ 的分维数就由定理的结果给出，简单 Jordan 弧的维数易知为 1，所以有结论：

定理 9　若 S 为一胖分形，即 $1 < D_c(S) \leqslant 2$．则 L 是一条不可求积曲线；若 S 为一瘦分形，即 $0 \leqslant D_c(S) \leqslant 1$，则 L 是一条可求积曲线．

定理 10　若 P_1，P_2，$\cdots P_k$ 有一为胖分形，即 $\forall i (i = 1, 2, \cdots, k)$，$1 < D_c(P_i) < 2$，则 F 是一条不可求积曲线；若对 $\forall i (i = 1, 2, \cdots, k)$，$P_i$ 都是瘦分形，即对 $\forall i (i = 1, 2, \cdots, k)$．$0 \leqslant D(P_i) \leqslant 1$，则 F 是一条可求积曲线．

定理9与定理10的证明由前面的定理显然可得．

参　考　文　献

1　李秉靖，安肇琰　n 维欧氏空间 R^n 中的 $C-S$ 集．$C-S$ 分形及其分维 (I)，第二届全国分形理论及应用学术讨论会论文集　武汉．1990

2　李秉靖，安肇琰．n 维欧氏空间 R^n 中的 $C-S$ 集，$C-S$ 分形及其分维 (Ⅱ)　全国分形理论讲习暨专题学术讨论会论文集　成都．1990

3　安肇琰，李秉靖　n 维欧氏空间 R^n 中的 $C-S$ 集 $C-S$ 分形及其分维 (Ⅲ)－－广义 $C-S$ 型集　云南民族学院学报．1993，2(1)：9－14

Lauwerier吸引子的Hausdorff维数和分形维数

卢钦和　谢惠民
苏州大学数学系

Lauwerier在[1]中提出了一个马蹄型的迭代映射L，它将单位正方形映入自身，表达式为

[illegible]

其中 [illegible] 在[1]中Lauwerier证明了 [illegible] 是奇怪吸引子，并求出了它的Lyapunov维数

[illegible]

Lauwerier猜测这个值也就是奇怪吸引子的分形维数和Hausdorff维数。

本文在 [illegible] 时计算了Lauwerier吸引子的分形维数 $D_c(F)$ 和Hausdorff维数 $\dim_H F$，结果表明Lauwerier的猜测是正确的。

1 Hausdorff维数的计算

由于映射L不是一个微分同胚，因此奇怪吸引子Hausdorff维数的计算不能用现有的理论结论[2]。

记F与 [illegible] 的交为 [illegible]，相应的记 [illegible] 与 [illegible] 的交为 $E_n(\cdot)$。这时 $E_n(\cdot)$ 由 2^n 个互不相交的闭区间组成，我们称它们为第n级基本区间。在每个第n级基本区间中含有两个第n+1级基本区间。[illegible] 是Lebesgue测度为0的Cantor集[1]。对于 $E(\cdot)$ 我们得到了下面的定理。

定理1　对于 [illegible] 的Hausdorff维数

(4)　$\dim_H [illegible] = \frac{[illegible]}{\log(2/b)}$

证明　映射L将平行x轴的直线段映为平行x轴的直线段，比例为 [illegible]，这样就可以求出第n级的 2^n 个基本区间的长度公式

(5)　[illegible] $K=1,2,\cdots,2^n$

这里 [illegible] 按条件 [illegible] 确定。

用这 2^n 个基本区间覆盖 [illegible]，求出和式

(6)　$\sum_{k=1}^{2^n} [illegible]$

$=(\sin\pi\alpha)^s \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n [\sin(2\pi(\alpha+K)/2^n)]^s}$

这里利用了 [illegible]。

由于 $u\in(0,1/2)$ …，在(5)中令 $n\to\infty$，这样得到

$$\mathcal{H}^s(E(y))\leq C(s)[4y(1-y)]^{s/2}$$

其中 $C(s)=\int_0^1(1-\sin^2\pi x)^{s/2}dx=\Gamma((1+s)/2)/\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+s/2)$ 因此得到维数的上界：

$$D_H(E(y))\leq s.$$ □

为了得到 $D_H(E(y))$ 的下界估计，我们证明了下面的引理。

引理1 设 $\mathscr{I}=\{I_i\}$ 是 $E(y)$ 的任何一个基本区间复盖，那么成立不等式

(6) $$\sum_{I_i\in\mathscr{I}}|I_i|^s\geq[4y(1-y)]^{s/2}$$

利用引理我们证明了：

定理2 $0<y<1$ 时 F … 集

证明．设 $\mathscr{U}=\{u_i\}$ 是F的任何一个有限开复盖，由定理1，只要证明 $\sum_{u_i\in\mathscr{U}}|u_i|^s$ 有正下界．不妨设 $\max_i\{|u_i|\}$ 小于 F_1 两个基本区间之间的距离．

任取一个 u_i，它只可能与一个第一级基本区间相交．另一方面每一个 $x\in E$ 是一个长度收缩到零的基本区间套的唯一公共点，因此n充分大时，u_i 中至少含两个第n级基本区间．

记 $S(i)$ 为具有下列性质的自然数：u_i 对于 $1\leq l\leq S(i)$ 的每个 l 都只与一个第 l 级基本区间相交．设 u_i 与 $S(i)$ 级基本区间 I 相交，根据 $S(i)$ 的取法，u_i 与 I 中两个 $S(i)+1$ 级基本区间 J_1 和 J_2 都相交，从而 $|u_i|$ 大于 J_1 和 J_2 之间的距离

$$(1-2b)b^{-1}|J_1|$$

于是估计出

(7) $$|u_i|^s\geq 1/2[(1-2b)/b]^s(|J_1|^s+|J_2|^s)$$

这样将 u_i 用基本区间 J_1 和 J_2 代替，利用引理得

$$\sum_{u_i\in\mathscr{U}}|u_i|^s\geq 1/2[(1-2b)/b]^s[4y(1-y)]^{s/2}$$

可见有正下界。 □

利用F与 $E(y)\times(0,1)$ 局部同胚，可构造出双向Lipschitz变换，从而得到 $D_H(F)=1+s$

2 分形维数的计算

这里所讲的分形维数(fractal dimension)[4]，也叫作容度(capacity)，其定义为：设集 $X\subset R^n$，那么

(8) $$D_C(X)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

其中 ε 是复盖用的球的半径，$N(\varepsilon)$ 是复盖X所需的最少球数。可以将分形维数的概念看作Housdorff维数的一种简化，但在具体计算时，往往和Housdorff维数的计算有很大的差别，也有相当的难度[5]。

为了计算分形维数，我们先建立以下几个命题：

命题1 $D_C(X)=\inf\{s\mid\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}N(\varepsilon)\varepsilon^s=0\}$。

命题2 如果 $\{\varepsilon_n\}$ 是一个单调减少收敛于零的数列，又满足条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$ … 那么

$$D_C(X)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log N(\varepsilon_n)}{\log(1/\varepsilon_n)}。$$

命题3 在分形维数 D_c 的定义(8)中，可以作以下等价修改：1)(在 $X\subset R^2$ 时)用正方形

代替圆，或者其他确定的凸多边形代替圆作复盖单元； 2）ε 或取为复盖单元的直径，或是表征复盖单元大小而与直径成比例的其他量都是可以的。

命题4 设 $f: X \to Y$ 为满射，且存在 $c>0$，使对任意 $x, y \in X$ 成立

$$|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|,$$

那么 $D_c(X) \geq D_c(Y)$。

和Housdorff维数计算时一样，我们先证明

定理3 对任意 $b \in (0, 1/2)$，任意 $y \in (0, 1)$，有

$$D_C(E(y)) = \frac{\log 2}{\log(b/2)}$$

证明中需引用命题 2 。

引理2 任意 $\delta \in (0, 1/2)$，F_n 的边界 ∂F_n 在 $\{(x, y) \mid \delta < y < (1-\delta), 0 \leq x \leq 1\}$ 中任何点处的曲线的切线斜率 t 满足下面不等式

$$|t| \geq 2(2-b)\delta.$$

下面的引理 3 建立了基本区间 J_k 的长度 $|J_k(y)|$ 与 y 的关系

引理3 1）在 $k=0$、$2n-1$ 时，$|J_k(y)|$ 是 $[0, 1]$ 上的单调递减函数，

2）对其他 k 值，$|J_k(y)|$ 于某点 $y_k \in (0, 1)$ 上达到最大值，在 $[0, y_k]$ 上严格单调递增，在 $[y_k, 1]$ 上严格单调递减。

3）点 y_k 满足不等式 $1/4 < y_k < 3/4$。

利用引理 2 和引理 3 我们证明了

定理 4 . 在 $0<b<1/2$ 时，映射L的奇怪吸引子F的分形维数 $D_C(F) = D_L(F)$。

参考文献

[1] Lauwerier, H.A., Physica 21D (1986), 146-154.

[2] Falconer, K.J., The Geometry of Fractal Sets, Combridge Univ. Press (1985).

[3] Falconer, K.J., Fractal Geometry, Wiley, N.Y. (1990).

[4] Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature. San Francisco, W.H. Freeman & Co. (1982).

[5] Young, L.-S., Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol.1, (1981), 381-388.

分形及其计算机生成*

齐 东 旭

（北方工业大学 CAD 研究中心，北京 100041）

1. 引言　计算机处理图形的技术进步，极其有力地促进了对分形的研究。今天，人们能"身临其境"地进入曼德布劳特集合及尤里亚集合，去体会如此复杂的精细结构，这是计算机的功劳。通过计算机制作的动态画面包含更高数量级的视觉信息，引起你更深入的思维活动和更丰富的联想。（〔1〕，〔2〕，〔5〕，〔7〕，〔8〕）

有人说，混沌与分形是过程的科学，而不只是状态的科学；是演化的科学，而不只是存在的科学。对过程和演化的模拟与仿真，就今天的认识而言，它离不开计算机。

表达、再生与复现已经存在的客体的形状、景观、印象，以及创造（或说臆造）一个不存在的图形世界，是计算机图形学研究的两个使命。前者可谓客观图形学，后者有称主观图形学。我们不陷在名词与定义的泥潭中，因为认真起来，什么叫图形，恐怕谁都明白却谁也说不清楚。（〔3〕，〔12〕）

绘图是一件大事，艺术家先于数学家发明了投影。工程图学离不开欧几里德几何的框架，据说那是因为欧氏几何表现的东西才是"真"的。那么，什么是"真"？任何图示，除了它自身而外，恰好因为它并不是"真"的，才有价值。传统的数学支持了工程绘图，分形几何的诞生使绘图的范围大大扩展。现在可以绘制出真实感很强，且有很高层次精细结构的分形山、云、树等等，这是传统的几何学无能为力的。

分形，加计算机，现在开始"侵入"艺术领地。这个学科的交叉，跨的是大了一点，它引起争论与异议是必然的。说来不奇怪，科学与艺术从来也不是严格分家的，是融合的关系，是分工的区别而已。艺术强调思想，表达思想要靠技巧，技巧的实现要靠工具。这"工具"往往是数学的、物理的、化学的、电子学的等等。水墨丹青附着的宣纸，产生了浸润喧染和飞白写意效果；丙烯涂料，可表现明亮光感；一种特制的喷笔，使雾状的点集轻易地盖在画纸上。今天的科技进步向艺术家奉献了一部计算机，这个与往常的任何工具不可同日而语的新工具，应该被拒绝吗？（〔3〕，〔4〕，〔6〕，〔7〕，〔13〕）

让计算机这个"死"的东西尽量"活"起来，要靠算法，它涉及到物理过程的模拟，这又是数学了。总之，有各种各样的图形，分形在图形中有特殊地位。

2. 迭代法　迭代是计算机上制造分形的重要手段，典型的分形生成方法都基于迭代的思想。通常一个非线性离散动力系统可表示为

$X_{n+1}=\varphi(X_n;C)\quad n=0,1,2,\cdots$　X_0 是给定的初始输入，C 为系统参数。

费根堡（Feigenbaum M.）研究了简单的实二次映射；曼德布劳特（Mandelbrot B.）研究了简单的复二次映射，导致了目前众所周知的精彩发现。（〔1〕，〔10〕，〔11〕）

一类矩阵迭代可以产生分形。设 A 为 p×q 矩阵，B 为 r×s 矩阵。迭代过程为

* 国家自然科学基金资助项目（编号 19071003）

$A_{n+1} = A_n * B \quad n = 0,1,2,\cdots \quad A_0 = A$

其中，运算 * 并不是通常矩阵乘法。

(1) 令 * 为 Kronecker 乘积(简称 K 乘积)。例如，如果取 $A = (1)$，$B = (1,0,1)$，则 A_n 相应于康托三分集；适当地选取 A、B，则可生成相应于 Seirpinski"地毯"或"垫片"的数据结构。

(2) 令 * 为广义 K 乘积。例如，如果 a,b 为二个实数，设定如下规则

(1) $a * b = ab$(即运算 * 为普通乘法)；

(2) $a * b = a \& b$，& 表示 a,b 的二进制按位与(AND)运算；

(3) $a * b = a \mid b$ 表示 a,b 的二进制按位或(OR)运算；

对每一种规则，相应地引入矩阵的广义 K 乘积

$C = A \times B$，$C = A \& B$，$C = A \mid B$

迭代函数系(IFS)可以定义分形。它是利用仿射变换建立几何对象各部分之间、整体与局部之间的联系。这里，寻求收缩的仿射变换及设定概率集合会有各种技巧。([2]，[8])

熟知的生成元技巧，Barnsley 插值法等，也是迭代程序。考虑非线性的几何变换代替仿射变换有可能减少变换的数量，当然这是以算法复杂性为代价。在迭代设计中利用小波变换有可能更有效突出细节，应该说这是有希望成功的发展方向。

3. **L－系统** 美国植物学家林丹梅耶(Lindenmayer A.，1925—1989)在 1968 年提出用形式语言描述植物生长的方法，1984 年史密斯(Smith R. A)等将其引入计算机图形学。理论上说，L－系统可生成无限嵌套的结构，是特别类型的迭代过程。它不只用于植物的生长模拟，也可以在物质结构、电子线路设计等方面有使用价值。L－系统强调植物的拓扑结构，中心概念是重写。它是一类形式语言，要通过解释进行造型。一个符号串是由 F，f，+，－，[，]等组成，各符号元素规定为

F： 向前走一步，步长为 d，画线；

f： 向前走一步，步长为 d，不画线；

+： 向左(逆时针方向)转 δ 角；

－： 向右(顺时针方向)转 δ 角；

[： 压栈；

]： 从栈中弹出，等等。

例如，取 $\delta = 60^\circ$，ω 表示图形生成，p 表示规则，令

ω： $F--F--F$

p： $F \to F+F--F+F$

开始时，ω 表示一个正三角形，这是初始图形(简称 0 级)。然后按 p 修改 ω，执行新的 ω 的结果生成 1 级图形。再次修改 ω，得 2 级图形等等。每次修改，相应改变步长 d，这里取 $d_1 = d/3$。上面的具体规则便生成熟知的 von koch 曲线。

改进 L－系统，出现各种变体。随机 L－系统着眼于字符替代的随机性，生成的图形避免呆板；参数化 L－系统大大缩短字符串长度及产生式的数目。

将 L－系统扩展到空间情形，自然要考虑空间的向量及借助旋转矩阵控制方向。L－系统用于实际造型，往往结合曲面造型的计算几何方法；出于视觉的考虑，还应结合着色、纹理、光照等图形学技术。([9])

4. **调配函数** 计算几何中的调配函数方法可以引进分形造型中。Lagrange 插值、B

spline、Bernstein－Bezier 拟合等，都可以统一表达为(以曲线为例)

$$P(t)=\sum P_j\varphi_j(t) \qquad t\in[\alpha,\beta]$$

$\{P_j\}$，$j=0,1,\ldots,N$，为给定型值点或控制点，$\{\varphi_j(t)\}$ 为调配函数，上述各方法之区别在于调配函数选取的不同。采用有限支集的调配函数，并令

$$\varphi_j^{n+1}(t)=\varphi_j^n(2^k t), \qquad n=0,1,2,\ldots$$

k 为给定正整数

则可构造迭代格式

$$P^{n+1}(2^k m)=P^n(m)$$

$$P^{n+1}(2^k m+r)=\sum P^n(j)\varphi_j^n((r+j)2^k)$$

$$r=1,2,\ldots,2^k-1; \qquad m=0,1,2,\ldots,N; \qquad n=0,1,2,\ldots$$

一般来说，令 $\varphi_j(t)=\varphi(t-j)$，$\varphi(t)$ 满足

$$\varphi(u)=\begin{cases}1 & u=0\\ 0 & u=\pm1,\pm2,\ldots,\pm s\\ 0 & |u|\geqslant s\end{cases}$$

令

$$\varphi(\beta;u)=[I+2\mu(1/2)+2(1/2-\beta)\mu(3/2)]\lambda(\mu),$$

其中 $\lambda(\mu)=\lambda_0(2\mu)$，$\lambda_0(\mu)=(1-|\mu|)_+$，$I$，$\mu$ 分别为不变算子与平均算子。$\beta=1/2\pm\alpha$。$\alpha=0$ 及 1/16，3/16，5/16，分别给出的支集 $s=1$ 及 $s=2$。调配函数方法与四点格式结合起来，搭起了计算几何与分形几何在造型应用中的桥梁。([12])

5. **复函数** 熟知的曼德布劳特集合与尤里亚集合是复平面上重要分形，它的变体与推广大量地出现在学术论文中。复平面上分形的研究有广泛的背景，例如，在衍射理论及通讯中高斯和序列有很大应用价值，然而计算高斯和并不容易。利用计算机对它进行绘制，一个基本典型是柯扎里诺夫(Kozarinoff N. D.)1986 年给出的，这就是一个四重和式

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}e^{-an}$$

其中取 $m=8$，$a=15-224$，$n=p^4+q^4+r^4+s^4$，按累加各项时分别得到的点顺次连结，得到的图形呈现了螺形环绕的各种层次下自相似性。([1]，[12])

这里介绍一下与数学似乎相离甚远的艺术作品，这便是引起轰动的荷兰版画家埃舍尔(Escher M. C. 1898－1971)的木刻。埃舍尔本人最初不被注意，甚至倍受冷落，是数学家与物理学家“发现”了他。被人经常引用的作品“极限圆 IV”(1960 年)，事实上表达了分形的思想。图中出现黑色的魔鬼与白色天使，它们交叉嵌满了整个平面。这些黑魔鬼看起来大小不同，而按庞加莱(Poincare H. 1854－1912)模型来说，它们的 P 长度都是合同的，画中的白天使也是同样情形。庞加莱平面简记 P 平面。P 平面指一个圆周 Γ 的内域，Γ 称为 P 平面的绝对。规定 P 直线就是与 Γ 垂直的圆弧。复平面上，以 $|Z|=1$ 为 Γ，P 平面就是 $|Z|<1$。P 平面上的运动定义为 $W=e^{i\theta}Z-a/1-\bar{a}Z$，$\theta$ 为实数，a 为复数且 $|a|<1$。这样一来，在 P 平面趋向绝对(相当于无穷远处)，图形具有无限嵌套的精细的自相似结构。

把复函数推广到四元数情形，计算机作图帮助人们观察到推广了的曼德布劳特集合与尤里亚集，这极其复杂的结构是很难只凭推理而想象清楚的。([6])

6. **几点看法** 分形的研究与应用与计算机关系极密切。围绕计算机作图，已形成了许多有效的数学方法和应用软件。然而，数学模型的研究永无休止，一张铁皮，可以被认为是规则的曲

面，用 Bezier 方法、样条函数方法都可以描述它。但是，如果有人关心的是这张铁皮表面受腐蚀的锈斑，传统的方法就不适用了，于是人们会考虑分形几何工具。人们常把计算几何与分形几何说成是分别描述“规则”与“非规则”的对象。事实上，有谁能把图形清晰地分成“规则”与“非规则”两大类型呢？在什么层次、什么需求之下看待给定的对象，结论往往不同，关键是尺度。因此，计算几何与分形几何应是互相沟通的。

分形几何的理论基础的完善也许还要经历一个艰苦的过程。一方面，数学家从理论上作研究，不要急于指责他们“脱离实际”，他们的一系列 game（游戏）可能在出乎意料的场合产生出乎意料的效益。另一方面，工程界的勇士不会等待那满载公理与定理的列车，他们早就上路了，大胆的应用带来科学上的生机，说他们是勇士不谓过分。还有第三种人，他们不想为分形理论本身的奠基挥锹舞镐，也不想在大千世界探求分形的应用。对分形的入迷，可能只因为他们为分形之美所陶醉。在欣赏变幻神奇的分形结构和接受维数的挑战中，思索着有穷与无穷、离散与连续、混沌与有序这些内涵与哲理。这样的追求可能诞生与养育另外枝头上的鲜花与硕果。

7. 注记　本文是摘要稿。随发言的演示资料包括：**幻灯片**：L 系统生成的分形作品；调配函数方法生成的分形作品；埃舍尔的作品；近年美国图形学会议有关作品，欧洲图形学会议作品等 100 余张。**录像带**：Mandelbrot 集与 Julia 集的动态演示（国外）；北方工业大学与北京科学教育电影制片厂合作完成的国内首部全电脑 10 分种科教电影《相似》（1992），其中分形是一个主要内容，并且在立体动画制作中采用了分形方法生成画面。北方工业大学幻灯片画面及《相似》影片和动画电视片电脑制作人员有：史元，张方，古梅，戈建涛，徐迎庆，迟宝山，黄心渊，施寅，邢丽萍，崔振文，王方石，王政慧，毛明志，朱科雷等，特此说明。

主要参考文献

[1]Mandelbrot R. B. ,The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company, San Franciscoo, 1982

[2]Barnsley M. F. ,Fractals Everywhere, Academic Press Inc. ,1988

[3]Foley J. D. ,van Dam A. 等,Computer Graphics, Principles and Practice, Addison Wesley Pub. Company, New York, 1990

[4]Kappraff J. ,Connections, the geometric brige between art and science, McGraw—Hill Inc. ,1991

[5]Edgar G. A. ,Measure, topology and fractal geometry, Springer—Verlag, New York, 1990

[6]Emmer M. Visual Mathematics, LEONARDO, Special Issue, Vol. 25, No. 3 and 4, 1992

[7]Shearer R. R. ,Chaos Theory and Fractal Geometry: Their Potential Impact on the Future of Art. LEONARDO, Vol. 25, No. 2, 1992

[8]Falconer K. ,Fractal Geometry, Math. Foundations and Applications,中译：曾文曲、刘世耀，东北工学院出版社，1991

[9]Prusinkiewicz P. and Lindenmayer A. ,The Algorithmic Beauty of plants, Soringer—Verlag, 1990

[10]Peitgen H. O. and Richter P. H. ,The Beauty of Fractals, Springer—Verlag, 1986

[11]Peitgen H. O. and Saupe D. ,The Science of Fractal Image, Springer Verlag, 1988

[12]齐东旭，梁振珊，马驷良，图形及其计算机探索，吉林大学出版社，1989

[13]齐东旭，数学·电脑·艺术（即将出版），和平出版社

点集序列与分形结构的计算机生成*(摘要)

齐东旭　　戈建涛

(北方工业大学 CAD 研究中心，北京，100041)

几何造型的数学方法是计算机图形学的基本问题. 针对"规则"对象(如机械零部件，飞机、汽车、船体外形等)的数学研究，是计算几何学的内容；针对"非规则"对象(如山，云，断裂、花草树木等)，则归入分形几何学. 事实上，"规则"与"非规则"很难清晰地区分开来，它们也没有严格的定义. 我们的兴趣是研究计算几何与分形几何在造型方法上的联系.

本文讨论的格式既可用于规则几何造型，也可用于分形造型. 讨论针对平面，它可以推广到空间情形.

1.　四点格式

文献[1][2]研究的四点格式，旨在拟合 C^1，C^2 或 GC^1，GC^2 曲线与曲面，这是计算几何学的有效方法. 设给定有序点列 $P_0, P_1, \cdots, P_n$，它们扩充有两类：

(1)　闭型，规定 $P_{-1}=P_n, P_{n+1}=P_0$；

(2)　开型，规定 $P_{-1}=P_0, P_{n+1}=P_n$. 记 $S_0=\{P_{-1}, P_0, \cdots, P_n, P_{n+1}\}$.

Sato(1985)、Dyn　Levin(1986)递归加倍插点格式为

$P^k_{2m}=P^{k-1}_m$

$P^k_{2m+1}=(1-\delta)(P^{k-1}_{m-1}+P^{k-1}_{m+2})/2+\delta(P^{k-1}_m+P^{k-1}_{m+1})/2$

$m=0,1,2,\cdots$；　$k=1,2,3,\cdots$；　$P^0_j=P_j, j=0,1,2,\cdots,n+1$.

记 $u^k_j=\frac{j}{2^k}$，$P^k_j=P(u^k_j)$，$S_k=\{P^k_j, j=-1,0,1,\cdots,n,n+1\}$. 由于由 $\{u^k_j\}$ 是实数的稠密集知适当的参数 δ 之下 S_∞ 为曲线，且 $1<\delta<\delta_0=(3+\sqrt{5})/4$ 时 S_∞ 是 C^1 连续的. 我们研究 $\delta<1$ 及 $\delta>\delta_0$ 的情形.

图 1－4 给出不同参数 δ 的 Sr.(初始点为正六边形六个顶点)



图 1　n＝6，　δ＝0.02，　r＝16.

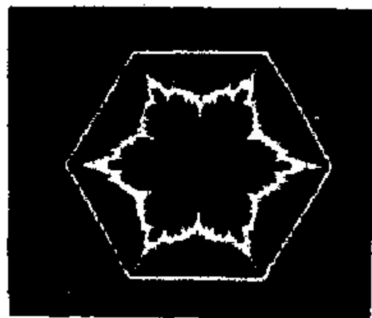


图 2　n＝6，　δ＝0.4，　r＝16

* 国家自然科学基金资助项目. No. 19071003.

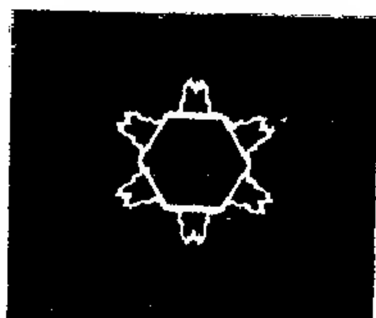


图 3　$n=6$，　$\delta=1.55$，　$r=16$.



图 4　$n=6$，　$\delta=.85$，　$r=16$

2.　两点格式

设复平面上给定二个复数，记为 $Z_0^{(0)}, Z_1^{(0)}$. 令 $Z_0^{(1)}=Z_0^{(0)}, Z_2^{(1)}=Z_1^{(0)}, Z_1^{(1)}=(1-\lambda)Z_0^{(0)}+\lambda Z_1^{(0)}$，于是有：

$$S_0=\{Z_0^{(0)}, Z_1^{(0)}\}$$

$$S_1=\{Z_0^{(1)}, Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}\}$$

$$S_2=\{Z_0^{(2)}, Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)}, Z_3^{(2)}, Z_4^{(2)}\}$$

一般地，迭代格式为

$$S_n=\{Z_0^{(n)}, Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}, \cdots, Z_{2^n}^{(n)}\}$$

$$Z_{2m}^{(k)}=Z_m^{(k-1)}$$

$$Z_{2m+1}^{(k)}=(1-\lambda)Z_m^{(k-1)}+\lambda Z_{m+1}^{(k-1)} \qquad m=0,1,2,\ldots,n \qquad k=1,2,3,\cdots$$

特殊情形：取

$$\lambda=\frac{\rho+\bar\rho}{2}+(-1)^k\frac{\rho-\bar\rho}{2}, \qquad \rho=\frac{1}{(1+e^{i\theta})}, \qquad \theta=\frac{\pi}{3}$$

则 S_∞ 为 von Koch 曲线

图 5—8 给出不同参数 θ 之下 von Koch 曲线的变体 Sr.（初始点为正三角形三个顶点）



图 5　$n=3$，　$\theta=\frac{5\pi}{12}$，　$r=6$.

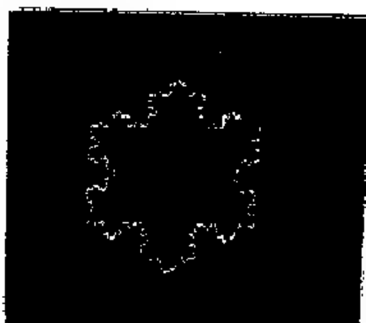


图 6　$n=3$，　$\theta=\frac{\pi}{3}$，　$r=16$.



图 7　$n=3$，　$\theta=\frac{\pi}{6}$，　$r=16$.



图 8　$n=3$，　$\theta=\frac{\pi}{3}$，　$r=16$.

主要参考文献

〔1〕 Sato M. Recursive Interplation, Science on Form, (Ishizaka S. ,eds.) KTK Scientific Publishers, Tokoy 1987

〔2〕 Dyn N. , Levin D. and Gregory J. A. , A 4－point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design, CAGD, V01. 4, pp. 257－268, 1987

复平面上曲线族极限特征的计算机探索*

齐 东 旭　迟 宝 山

（北方工业大学 CAD 研究中心，北京，100041）

1. 首先考虑复平面上周期点列的拟合问题. 基于 Bernstein－Bezier 多项式理论，文[1]给出无穷的周期性的控制点列导致的曲线族呈现自相似结构. 本文研究复平面上的类似结果，文[1]的某些结果相当于这里的特殊情况.

令控制点 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}^d$, $n \geqslant 1$,

且有 $b_{j+kn} = b_j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{Z}$ 即从 $\{b_j\}$ 形成无穷的周期点列.

记，$\beta_j^{(r)}(t) := \binom{r}{j}(1-t)^{r-j}t^j$, $0 \leqslant j \leqslant r$, $t \in [0,1]$

$$\bar{b} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} b_j, \quad f_r(t) := \sum_{j=0}^{r} b_j \beta_j^{(r)}(t)$$

文[1]证明了：对任意 $t \in (0,1)$ 有 $\lim_{r\to\infty} f_r(t) = \bar{b}$.

在复平面上，设控制点为 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{n-1}$. 并且记 $t = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{i\theta}}$,

$$(1) \quad F_r(\rho,\theta) := \sum_{j=0}^{r} Z_j \beta_j^{(r)}(\rho,\theta), \rho \in [0,\infty).$$

我们考虑 $Z_{j+kn} = Z_j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{Z}$.

对 θ 的不同选择，将得到不同的曲线族. 本文得到文[1]的平行结果. 作为图例，给出 $n = 2, 3, 4$ 情形，特别当 $n = 2$ 时，在计算机上显示 Z_0, Z_1 中点 $\bar{Z}$ 附近的精细结构；



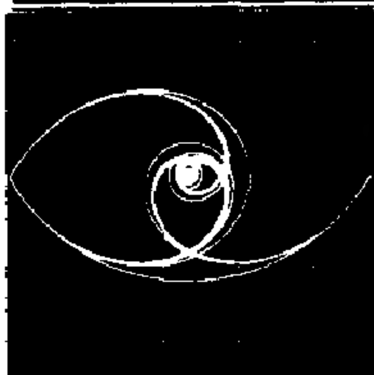
$n = 3$

$\theta = 30°$



$n = 4$

$\theta = 40°$



$n = 2$

$\theta = 60°$



$n = 2$

$\theta = 60°$

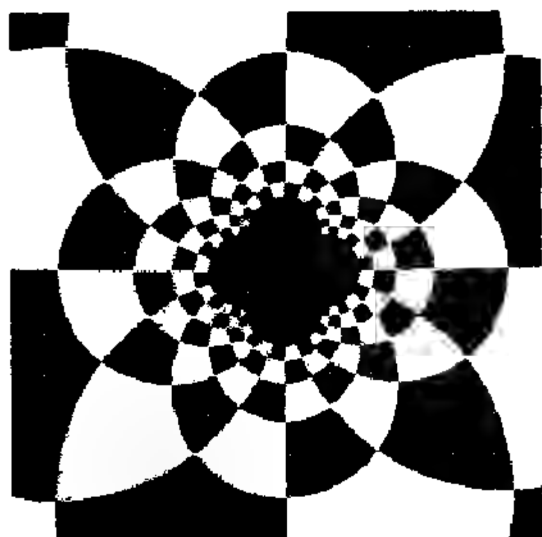
* 国家自然科学基金资助项目（编号 19071003）

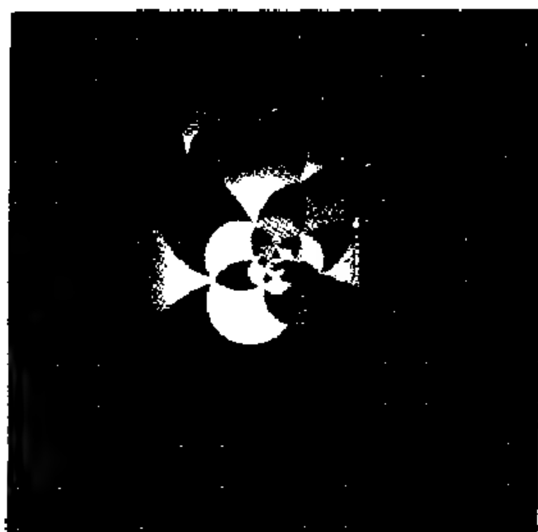
这种拟合可以应用于不规则曲线的绘制，例如在地图的表示中，可以减少数据.

2. 为了观察无限边界画面的特征，我们探索了一类变换下图象变化. 设画面在Z平面上给出，而绘制在W平面上进行，采用的变换为

(2) $W = \frac{Z - a}{1 - \bar{a}Z}$, a为复数且$|a|<1$

下面的图例，分别是Z平面上无限边界的黑白相间"棋盘"以及套迭的五角星向W平面的映像，这里$a = \frac{(1+i)}{2}$.





3. 注记：

(i) 令$t = \rho e^{i(1-\rho)\theta}$，则(1)式给出的曲线相应于$\rho \in [0,1]$. 这是平面BB曲线的推广，属于很广的一类Polya集[2].

(ii)对Escher M. C. 作品[3]给出数学上的分析是有意义的. 本文仅是在变换(2)之下的初步探索，Escher图形的分形结构尚待深入研究.

主要参考文献

[1] Dongxu Qi and Robert Schaback, Limits of Bernstein—Bezier Curves for Periodic Control Nets, 德国克拉兹八十寿辰学术会议宣读，哥廷根大学，1990

[2] Goldman R. N., An Urnful of Blending Functions, IEEE Computer Graphics and Applications, Geometric Modeling, Vol. 3, No. 7, 1983

[3] Bruno Ernst, Der Zauberspiegel des Maurits Cornelis Escher, TACO, Berlin, 1978

自相似结构与幻方(摘要)*

齐东旭 [illegible]
[illegible]工业大学CAD研究中心,北京100041

本文研究矩阵迭代过程产生的分形,矩阵迭代生成具有自相似结构的图象,易于在计算机上实现。将矩阵迭代构造应用于幻方,给出产生高阶幻方的技巧。[illegible]关高阶幻方导致分形[illegible]有奇妙独特性[illegible]本文是[illegible]未见有过的问题

1 矩阵的Kronecker乘积

设$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵,$B=(b_{ij})$为$p\times q$矩阵,则$mp\times nq$矩阵C定义为$C=(a_{ij}B)$,C称为A与B的Kronecker乘积,记为$A\times B$。

设计算机屏幕的象素为1024×1280,这便是一个矩阵,一切屏幕上的图象都将表成如此矩阵,矩阵元素的数值对应于灰度或颜色,图象的生成或处理,就是对矩阵进行的各种变换。而特定安排的一族矩阵变换序列便产生[illegible]矩阵的Kronecker乘积给出的一族矩阵[illegible]般说来阶数逐次增高,以至无穷,[illegible]相应于图象的无限加细的过程。因此,选定简单的[illegible]低阶的矩阵A_0,A_1,A_2

令 $F=A_0\times A_1\times A_2$

那么,F对应一幅图象,虽然F只能以计算机所能显示分辨率为最大限度,但采用窗口技术,可以将任意指定的局部画面放大成全屏幕,从这个意义上说,计算机可以显示F的任意给定[illegible]的细节

2 典型例题

(1)设$A_0=(1)$,$A_1=A_2=A_3=\cdots=(1,0,1)$,则F相应于Cantor三分集

(2)设$A_0=(1)$,$A_j=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$j=1,2,3\cdots$,则F相应于Sierpinski"方毯"

(3)设$A_0=(1)$,$A_j=$[illegible],$j=1,2,3\cdots$,则F相应于Sierpinski三角形"垫片"

(4)设$A_0=(1)$,$A_j=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$j=1,2,3\cdots$,则F相应于Cantor集的平面张量积形式[illegible]推广[2]

3 广义Kronecker乘积

设a,b为二个实数,定义运算*

定义1 $a*b=a\cdot b$,这将是通常的Kronecker乘积。

定义2 $a*b=a\&b$,&表示a,b的二进制表示的按位与运算(AND)。

*国家自然科学基金资助项目,No.1907[illegible]003

定义3 $a \cdot b = a \mid b$，|表示a, b的二进制表示的按位或运算(OR)；

定义4 $a \cdot b = a \hat{} b$，^表示a, b的二进制表示的按位异或运算(XOR)

定义5 $a * b = (a \times b) \bmod N$，N为给定正整数

还可以定义其它运算，对于上述*，定义A·B分别为A∝B, A&B, A | B, A^B, (A×B) mod N等等。例如，按定义5，令

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + A_0$$

则$K_3 = A_0 * A_1 * A_2 * A_3$的图形将出现包含von Koch曲线的图案[2]

4 幻方

如果实元素n阶方阵A的各行元素之和，各列元素之和，主对角线上元素之和都为同一常数，则称A为n阶幻方。古今中外对幻方都有研究，并且从被认为仅仅是"神奇的现象"而逐渐发现了它的应用价值。通常关心的n阶幻方是指元素为1, 2, 3, …, n^2的满足上述条件的排列，本文称之为n阶标准幻方。我们有如下结果[3]

定义6 设A, B分别为m阶与n阶标准幻方，Y为元素皆为1的n阶方阵。若A中元素1, 2, 3, …, m^2的位置分别以下列矩阵置换

$B, B+n^2Y, B+2n^2Y, \cdots, B+(m^2-1)n^2Y$

则得到的m×n阶方阵记为$C = A \cdot B$

定理1 设A为m阶幻方，B为n阶幻方，则A×B为m×n阶幻方，且幻方不变量

$$\rho(A \propto B) = \rho(A)\rho(B)$$

定理2 设A, B分别为m阶与n阶标准幻方，则按定义6得到的A·B为m×n阶标准幻方，因此有

$$\rho(A \cdot B) = mn(1 + m^2n^2)/2$$

定义7 设A为n+1阶幻方，$\varphi_j(t)$为n阶Bernstein-Bézier函数

$$\varphi_j(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \ j=0, 1, 2, \cdots, n, \quad t \in [0, 1]$$

记

$$U(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$$

则称曲面

$$B_n(A, u, v) = U(u) A U(v)^T$$

为n阶幻曲面[3, 4]

定理3 对定义7给出的曲面$B_n(A; u, v)$，有

$$\int_0^1 B_n(A; u, v)\,du = \int_0^1 B_n(A, u, v)\,dv = C,$$

其中

$$C = \rho(A)/(n+1)$$

幻曲面因此命名[3]

定理4 令$A = A/(n+1)^2$，则

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 B_n(A, u, v)\,du = 1/2$$

5 自相似幻像

设有矩阵，$A_0, A_1, A_2 \cdots$ 阶数皆不小于2，它们的Kronecker乘积记为

$F_n = A_0 * A_1 * A_2 * \cdots * A_n$，考虑 $n \to \infty$ 时F_n的性质。在计算机显示的最高分辨的限定之下，得到的F_n便是一幅图象。当A_i为幻方时，称之为幻图。

幻图具有自相似结构，因为这种生成手续相当于生成元方法的嵌入迭代过程。

表达幻图自相似结构的最好方式是采用特定RGB代码之下的N个灰度级。如果$N = 2^{20}$，在目前设备条件下这是办不到的，于是求助于不同的RGB代码，这样一来，自相似性的视觉效果反而不直观。

我们在SGI 4D 25上作了，完成了本文各步生成的实验。这些实验结果在本学术会议发言中以幻灯片及录像带给予介绍。

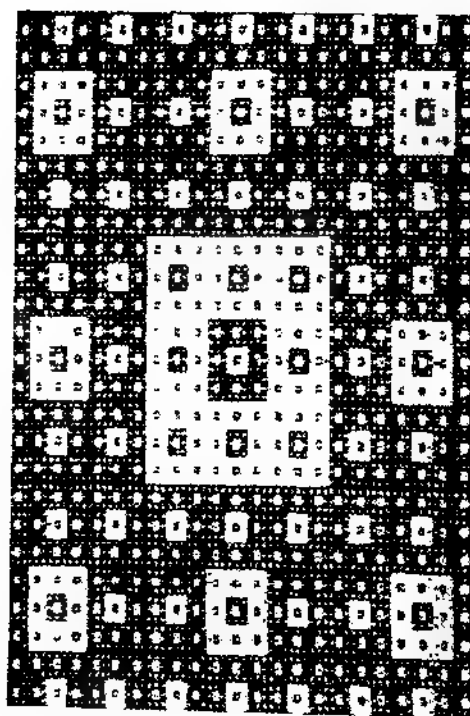
参考文献

[1] 齐东旭 从幻方到幻曲面，北方工业大学学报 Vol 4 No 3 1992

[2] 邢丽萍 分形的迭代生成与自然景物模拟(博士学位论文) 吉林大学 1992

[3] 齐东旭 幻方与Bernstein多项式(研究通讯)，自然杂志，Vol 14，No 8，199.

[4] 齐东旭 邢丽萍 自相似结构矩阵及幻曲面，第 届全国分形理论及应用学术讨论会文集 分形理论及其应用，华中理工大学科学技术学会编，1991





Dehlinger 线画艺术的分形结构探讨*

徐 迎 庆　　黄 心 渊

（北方工业大学 CAD 研究中心，北京，100041）

本文讨论了复平面上的一类曲线，在分式线性映射下所呈现的分形结构，并在计算机上绘制一组图象.

1. Dehlinger 线画艺术**

Dehlinger 线画艺术是由德国 kassel 大学教授 Hans Dehlinger 博士提出的[1]，他从设计美学的理论研究引发出一类线画艺术的设计与计算机生成. 线画艺术实质上是一种利用计算机进行创作的新的艺术形式，在进行创作时，只使用折线作为构图的基本元素. 在 80 年代，其作品被 SIGGRAPH Travelling Art Show 89′选中，在欧美十几个国家巡回展出，并引起观众极大的兴趣(见图 1).

本文中，我们不讨论线画艺术的美学价值，而从分形的角度，探讨其结构的某种性质.

2. D－曲线

在文〔2〕中，我们引出了 D－曲线的概念. 称满足下列条件的一类折线为 D－曲线(见图 2).

(1) 折线以某指定点 O 为出发点生成，称点 O 为起始点；

(2) 折线在以点 O 为顶点，夹角为 α 的区域 D 内沿某一方向随机漫游；

(3) 折线中的每段长度在〔a，b〕之间随机变化；

(4) 折线中相邻段之间的斜率变化不大.

一般来说，线画艺术是一族 D－曲线的组合.

3. 复平面上的 D－曲线及在分式线性映射下的分形结构

我们以前讨论过的 D－曲线，只考虑实平面上的有限长折线. 在这里，把 D－曲线的概念推广到复平面上，并考虑无限长的折线. 在上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 生成一个 D－曲线集 D_1，如图 3 所示，其起始点为 $z=i$，利用分式线性变换 $W=\frac{z-i}{iz-1}$，把其映射到单位圆 $|W|<1$ 中，如图 4 所示，起始点被映射到 $W=0$. 在图中，出现了环形空白区域，空白区域放大后，可以看出，实际上该处仍有 D－曲线存在. 有趣的是空白环是呈现周期性的，它们包围着一个吸引点. 在该点的任何 δ 邻域内，都存在与 D_1 相似的线画结构. 图 5 给出窗口放大后的显示.

---

* 国家自然科学基金资助项目 No. 19071003

** Prof. Dr. Hans Dehlinger，1939－

现任德国 kassel 大学设计、艺术与计算机研究所所长. kassel 大学产品设计系教授，kassel 大学建筑设计系教授.

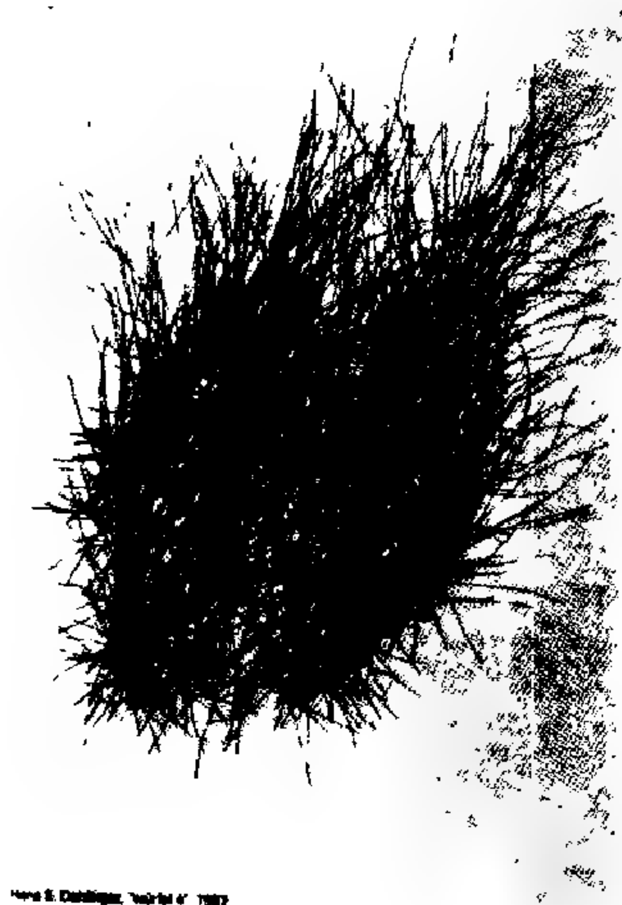


图 1　Line－Art 作品



图 2　D—曲线



图 3　复平面上的 D　曲线(局部)



图 4



图 5

齐东旭教授对本项工作给予了热忱指导,Hans Dehlinger 教授为本文提供了背景料材,作者向他们表示感谢.

参考文献

〔1〕 H. E. Dehlinger, Bildnerische Experimente mit der geplotteter linie, Kassel University (Ghk), Germany 1991.

〔2〕 D. X. Qi, Y. Q. Xu, Mathematical Modelling of Dehlinger's Line—Art, FISEA93', USA, 1993

分形纹理映射的应用*

占 梅　　张 方
(北方工业大学 CAD 研究中心,北京 100041)

1. 分形几何为自然景物的描述提供了有效手段.自然景物的计算机生成是计算机图形学的重要研究课题.自然纹理在真实感图形或抽象图形绘制时具有很高应用价值.绘制自然纹理的方法与技术已有很多研究[1],但由于问题本身的复杂性,尚需提供更为多样的技术.

自然纹理的内容丰富,诸如大理石花纹、云形、断裂、浸润、烧痕、污垢等等,很难用统一理论作为指导.给出特殊的技巧只要能有效生成一类自然纹理,就有其实用价值.

本文提供的方法有两类,其一是构造分形集产生自然的非规则图象,适应特定场景的需要;其二是计算机绘画的"手工分形",作成需要的图象.不论哪种图象,都将它们映射到几何客体的表面上,形成以假乱真的景物.本文的做法,已有效地应用于三维电脑动画.

2. 本文研究的是平面纹理.立体表面的纹理是通过映射实现的.我们的目的是产生 xy 平面或复平面上的分形,形成纹理库.在应用中针对不同需要调用库函数.这些方法包括:

(1) 生成元方法:给初始图,设定生成元,递归绘图;

(2) 非线性迭代的参数分布显示:类比于 Mandelbrot 集及 Julia 集的生成[2],改变非线性映射的具体形式,产生大量的神奇的分形.这种图形的数学内涵并不是我们最关心的.我们感兴趣的是这类分形精细美观的视觉感受.这种分形似乎是科学与艺术融合的较高层次的审美境界,这是任何常规创作手段无法达到的.

(3) 仿射变换.这类几何变换是 IFS 的基础,与概率分布匹配,可以形成多变的几何形态[3].平面纹理的设计与创意者主观思考和效果的追求紧密相关,它没有固定的模式.因此上述方法提供的仅是手工绘制得不到的纹理,设计人员往往对参数进行人工干预,确定最后的选择.

3. "手工分形"是相对于计算机编程自动完成的分形绘图而言的,它仍然由计算机完成,不同的是采用交互式人机对话,完成是画家绘画方法[4].如果没有计算机,人工作分形的模拟将很困难.这种人机结合的绘制过程掌握起来较难,它很大程度上取决于设计者的个人技术.

可以自行设计绘画软件,也可以在图形工作站上诸如 Quickpaint 这类模块上添置功能作二次开发.应该指出,这种方法从理论上说并不具备无限嵌套的精细结构,只是在一定尺度下被选定,也难于讨论它的分形维数问题.

4. 图例,所附图例都是在 SGI 图形工作站上完成的,其中一些已用于动画设计.

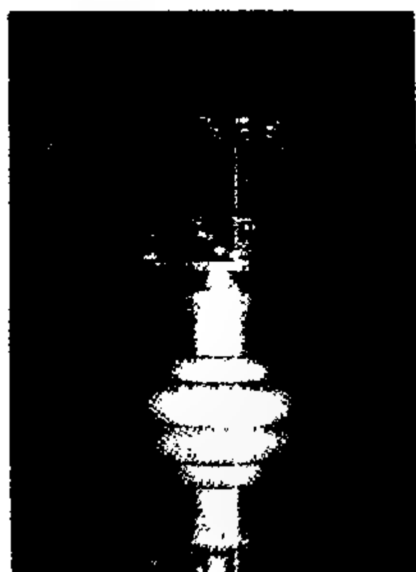
作者的研究开发工作一直得到齐东旭教授的指导和帮助,特此表示感谢.

---

* 国家自然科学基金资助项目(编号 19071003)





参考文献：

〔1〕 Foley J. D, Van Dam A. , Feiner S. K. and Hughes J. F. , Computer Graphics (Principles and Practice), Second Edition, Addison—Wesley Publishing Company, New York, 1990

〔2〕 Peitgen H —O. and Richter P. H. , The Beauty of Fractals, Springer. Berlin, 1986

〔3〕 Barnsley M. F. , Fractals Everywhere, Academic Press, Orlando. FL. , 1988

〔4〕 齐东旭，计算机绘画作品(20幅)，中国 MICT 软件展览会，日本东京都 SUNSHINE CITY，1990

KOCH曲线的艺术构图

陶志穗　蔡秀云
华南理工大学应用数学系

提　要

Koch曲线于1904年由瑞典数学家H·ov koch提出[1]，当时被贬为数学“怪物”。直到近十年来，随着分形几何的创立及其广泛的应用，koch曲线才为越来越多的人所认识。本文从艺术构图出发，以实用为目的，研究了这种曲线的组合、变换，通过计算机绘图，获得了许多绚丽多彩的图案，可供工艺美术设计者选用。

Koch曲线是一条规则的分形曲线。对一源直线段，用图1-1所示的折线（生成线）来取代之，经两次取代，可得图1-2，这样不断地重复，其极限图形就是koch曲线。它有如下特点：



图1-1



图1-2

(1)．曲线的长度趋于无穷大；

(2)．极限曲线处处连续，处处不可微；

(3)．曲线的每一小部分与整体相似；

(4)．曲线填充能力，即其分形维数是1.26。

根据曲线自相似的特点，我们利用C语言的递归功能，在IBM微机上绘制出koch曲线。koch曲线可以直观地解释一些分形的基本概念，可作为海岸线的一个模型[2]，以此说明海岸线的统计自相似性质，因此，许多分形书本均有koch曲线的内容。为了使简单的一条分形曲线能够产生实用的美术效果，下面介绍如何通过组合、叠合、变换等方法，希望能把这种曲线应用于工艺美术中。

1．koch曲线的组合

利用不同方向的生成线，并加以组合布置，可获得下面美术图案：

a、窗花型图案

以两种方向的生成线组合成新的生成线，那么很简单的一条直线段经过变换，可得到窗花型的图案，如图2，按需要增加迭代次数及适当组合，便可从中选取不同复杂程度的图案，如图3。

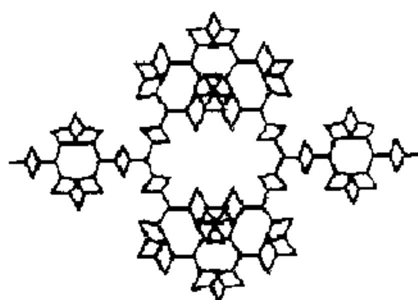


图2

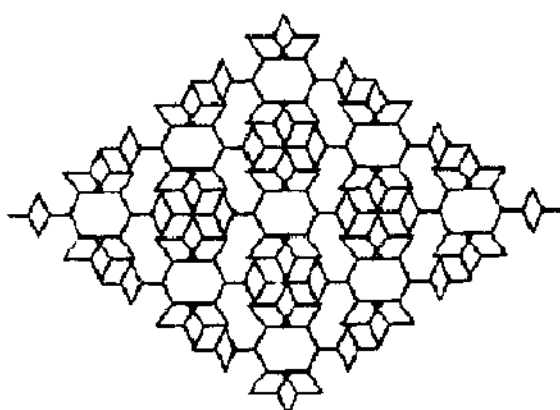


图3

b、正反koch曲线的叠合图案

对一个正三角形的每一直线边作koch生成线变换，把生成线上的小三角放在三角形的内部，得到的图形是反koch雪花曲线。把一个正三角形同时作正、反koch生成线变换，并与其旋转60°角以后的图形叠合，可得下面六瓣型图案，如图4。

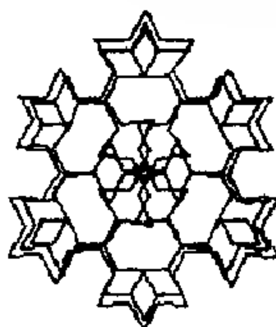


图4

2、koch曲线球面镜反射变换

为了使上述图案有更多美感，我们研究了把这些图案进行再变换的若干方法。其中一种是下面介绍的球面镜反射变换。

如图5所示，球面半径为R，球心是O，取球面上任一点Q为投影中心，过O与QO垂直的平面上有一点P_1（在球体内部），把P_1投影到球面上得P_2，再把P_2垂直投影到P_1所在平面，得P_3。

设P_1的坐标为（x，y），P_3的坐标为（x'，y'），球心O为（O，O），则

$$x' = R\sin(2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}/R))\cos(\operatorname{arctg}(y/x))$$

$$y' = R\sin(2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}/R))\sin(\operatorname{arctg}(y/x))$$

图6-1、图6-2、图6-3是koch曲线的叠合图形经过球面镜反射变换而得到的。

用球面镜反射变换作出的图形有如下特点：

(1). 原图经变换得到的像比原图形大，但每一个圆环区域放大的比例各不相同。因此，具体作图时可通过球心位置的选择，以不同的比例突出原图形的某一部分。

(2). 图像上位于圆弧形轮廓或附近的点对应于球面上位于赤道或附近的点。这部分图案对整体的成像有较大作用。可改变球心位置和球半径大小来控制圆弧图像的变化。

图5

图6-1

图6-2

图6-3

分形几何学是一门新兴的学科，它与计算机图形学联系起来创造了形状奇特多变的图案，而这些图案都是运用相当简单的几何公式经过一系列仿射变换而形成的，图案本身的复杂结构是由不断重复进行一个简单运算而获得的。这里所介绍的变换与组合方法，对于计算机辅助设计花纹图案，无疑开辟了一条可行的道路。

参 考 文 献

[1] 施德祥、王建国: <<自然杂志>> 8(11) 1985年

[2] B B Mandelbrot: <<THE FRACTAL GEROMETRY OF NATURE>> FREEMAN AND CO 1983

L—系统在分形中的应用

吉林大学数学所* 王方石

1975年，B. Mandelbrot 拼造了“Fractal”一词，它来源于拉丁文“Fractus”，意思是碎片、分数，如今译作“分形”. 近十几年来，它一直是国际上的热门话题. 分形被称为“大自然本身的几何学”，其本质是某种意义上的自相似结构特性. 分形不仅可应用于数学、物理、化学、冶金、生理、经济，还可用于模拟山、云、水等自然景物以及花、草、树、叶等植物的造型和生长. 几个世纪以来，自然界中多彩多姿的植物深深地吸引了许多数学家，他们对其显著的几何特性作了广泛的研究，例如，叶子的左右对称，花的旋转对称，松果上鳞片的螺旋排列等. 1968年，美国的生物学家 Aristid Lindenmayer (1925—1989)提出了 Lindenmayer 系统，简称L—系统. 以它做为数学理论框架，研究植物的进化和造型. Smith，Anono 和 Kunii 率先将L—系统引进到计算机图形学中，显示了L—系统在计算机模拟植物方面的潜力，为计算机模拟植物的真实感图形提供了有力的工具.

一 L—系统中的基本概念

(1) 改写(rewriting)

L—系统的中心概念就是“改写”，概括地说，改写是定义复杂物体的技术，它根据一组改写规则或产生式(productions)依次替换一个简单初始物的每一部分.

例如：ω：ab　　(初始物)

P_1：a→ab　(产生式1)

P_2：b→a　(产生式2)

根据产生式去替换初始字符串中的每个字符，得到如下推导序列：

$$ab \rightarrow aba \rightarrow abaab \rightarrow abaababa \rightarrow \cdots$$

(2) D0L—系统

究其本质，L—系统就是一种形式语言，这里我们只介绍最简单类型的L—系统——确定的且上下文无关的，称作 D0L—系统

令V表示一个字母表，V^* 表示V上所有单词的集合，V^+ 表示V上所有非空单词的集合，一个字符串 0L—系统是一个有序的三元素集合 G=<V，ω，P>，其中V是系统中的字母表，$\omega \in V^+$ 是一个非空单词，称作公理(amiox). $P \subset V \times V^*$ 是产生式的有限集合. 产生式 $(a,x) \in P$ 写作 $a \rightarrow x$，字母a和单词x分别称作产生式的前驱和后继. 假定对于任何字母 $a \in V$，至少有一个单词 $x \in V^*$ 使得 $a \rightarrow x$. 若对给定的前驱 $a \in V$ 无显式说明的产生式，则规定反身规则 $a \rightarrow a$ 属于产生式集合P. 对每个 $a \in V$，当且仅当恰有一个 $x \in V^*$ 使得 $a \rightarrow x$，说 0L—系统是确定的，记作 D0L—系统.

(3) 龟形 (turtle)

从 D0L—系统的定义可以看出，L—系统中的公理和产生式均是由字符串描述的，若要将L—系统与图形联系起来，就需给L—系统中每个字母赋予一个特定的图形含义，也就是给L—系统以图形说明，这里我们采用龟形说明.

下面介绍龟形说明的思想：将龟形状态定义成一个三元素集合(x，y，α)，其中笛卡尔坐标(x，y)表示龟形的位置，方向角α表示龟形的方向，给出步长d和角增量δ，龟形对应了

注：1993年7月后，作者的通信地址：100044　北京市北方交通大学 计算机系

下列命令：

F(d)：向前移一步，步长为 d，龟形状态变为(x',y',α)，其中$x'=x+d\cos\alpha$，$y'=y+d\sin\alpha$ 在点(x,y)和(x',y')之间画一直线段.

+(δ)：向左转δ，龟形的下一状态为$(x,y,\alpha+\delta)$，角的正向为逆时针方向

−(δ)：向右转δ，龟形的下一状态为$(x,y,\alpha-\delta)$

给定一个字符串 ν，龟形的初始状态(x_0,y_0,α)以及固定参数 d 和 δ，ν 的龟形说明就是由与 ν 相应的龟形画出的图形.

下面以著名的雪花曲线为例，说明用龟形画分形图的过程：

$\delta=60°$

ω: $F(1)-(\delta)-(\delta)F(1)\quad(\delta)-(\delta)F(1)$ （初始图）

P: $F(d)\to F(\frac{d}{3})+(\delta)F(\frac{d}{3})-(\delta)-(\delta)F(\frac{d}{3})+(\delta)F(\frac{d}{3})$ （生成元）

有两个图形，初始图和生成元，后者是由 N 个边长均为 r 的开的有向折线组成的. 因此，构造的每个阶段都从折线开始，用生成元代替每个直的线段，压缩生成元，并把它们放在与原来直线段有相同端点的位置上.

KOCH 雪花的初始图是一个边长为 1 的等边三角形(图 1(a))，生成元是一条由 4 个边长为$\frac{1}{3}$的线段组成的开的有向折线(图 1(b))，将初始图的每一直线段都用生成元替换，得到图 1(c)，再将生成元缩小到原来的$\frac{1}{3}$，依次替换图 1(c)每条线段得到图 1(d)，以此类推，便得到图 1(e)中的 KOCH 雪花分形曲线

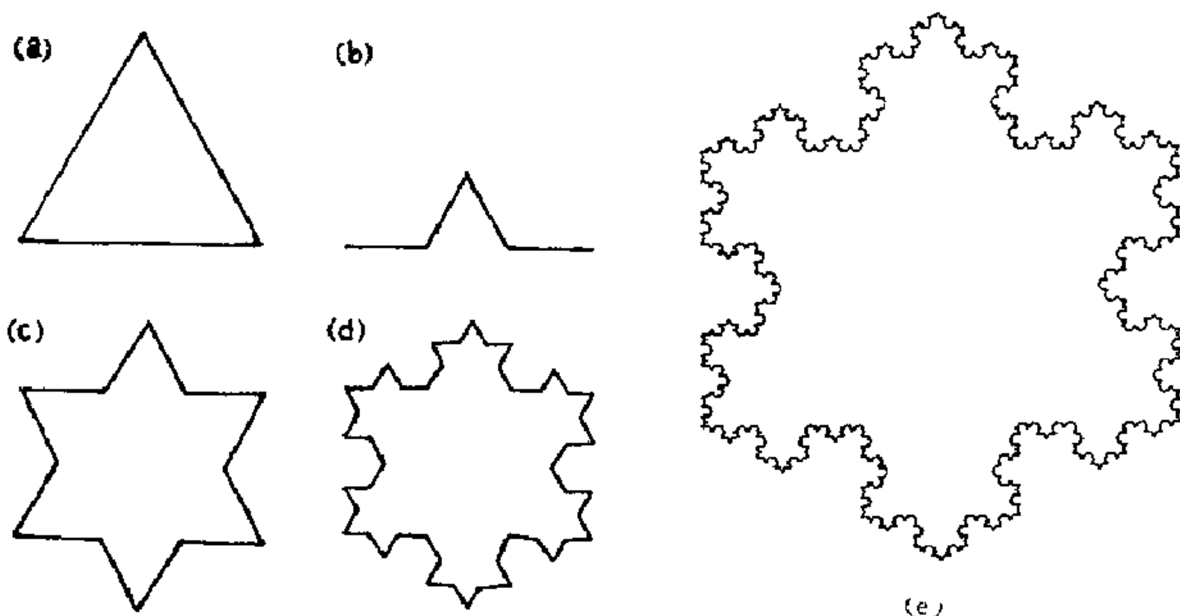


图 1

二 用 L—系统生成自相似的树形结构

上例中的图形是一笔划的，且是自回避的. 若要模拟树木的分叉，就需引进两个新的符号，用龟形解释如下.

[：将龟形的当前状态压入堆栈，存入堆栈的信息包括龟形的位置和方向，可能还有其它属性，如所画线段的颜色及宽度

]：从堆栈中弹出一个状态作为当前状态. 不画线，尽管龟形的状态通常是改变的.

例如下列 L 系统可得到图 2：

$n = 4, \delta = 22.5°$

$\omega: F(20)$

$$P: F(d) \to F(\frac{d}{2})F(\frac{d}{2}) \quad (\delta)[\quad (\delta)F(\frac{d}{2}) + (\delta)F(\frac{d}{2}) + (\delta)F(\frac{d}{2})] + (\delta)$$

$$[+ (\delta)F(\frac{d}{2}) \quad (\delta)F(\frac{d}{2}) \quad (\delta)F(\frac{d}{2})]$$



图 2

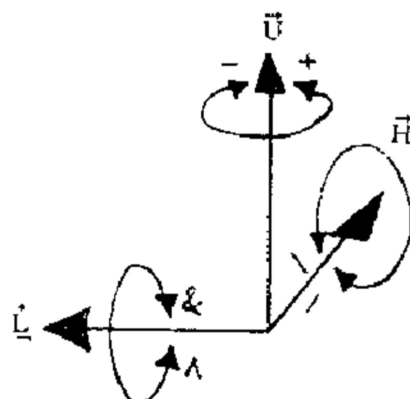


图 3

上述均为二维图例，若要绘制三维树形结构，需将二维龟形命令扩展到三维空间上．首先给出描述龟形当前方向的三个向量 $\vec{H}$, $\vec{L}$, $\vec{U}$，它们分别表示龟形的向前、向左和向上方向，均是单位长度，且满足方程 $\vec{H} \times \vec{L} = \vec{U}$(见图 3)．旋转龟形表示如下：

$$[\vec{H'}, \vec{L'}, \vec{U'}] = [\vec{H}, \vec{L}, \vec{U}]R$$

其中 R 是 3×3 旋转矩阵，关于向量 $\vec{U}$, $\vec{L}$ 和 $\vec{H}$，旋转 α 的矩阵表示如下：

$$R_U(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_L(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_H(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

用下列带参数的符号控制龟形的空间方向：

+(δ)：用旋转矩阵 $R_U(\delta)$ 表示向左转 δ 角.

—(δ)：用旋转矩阵 $R_U(-\delta)$ 表示向右转 δ 角

&(δ)：用旋转矩阵 $R_L(\delta)$ 表示向下转 δ 角.

∧(δ)：用旋转矩阵 $R_L(-\delta)$ 表示向上转 δ 角.

\(δ)：用旋转矩阵 $R_H(\delta)$ 表示向左滚动 δ 角.

/(δ)：用旋转矩阵 $R_H(-\delta)$ 表示向右滚动 δ 角.

句型一个L－系统描述如下.



图 4

$r_1=0.9$ /* 树主支的缩短比例 */

$r_2=0.9$ /* 树分支的缩短比例 */

$a_1=40°$ /* 旁支与主支间的夹角 */

$a_2=45°$ /* 旁支上各分支间的夹角 */

$d=137.5°$ /* 旁支与旁支间的夹角 */

$w_r=0.707$ /* 树支宽度的比例 */

ω: A(1, 10)

P_1: A(l, w)→!(w)F(l)[&(a_1)B(l×r_2, w×w_r)]/(d)A(l×r_1, w×w_r)

P_2: B(l, w)→!(w)F(l)[−(a_2)$C(l×$r_2$, w×$w_r$)]C(l×$r_1$, w×$w_r$)

P_3: C(l, w)→!(w)F(l)[+(a_2)$B(l×$r_2$, w×$w_r$)]B(l×$r_1$, w×$w_r$)

其中!(w)设置线宽为w，子支与母支间宽度比为$w_r=0.707$.符号$是沿自身轴旋转龟形，使指向龟形左边的向量$\vec{L}$转到水平位置. S按下列公式修改龟形在空间的方向：

$$\vec{L}=\frac{\vec{V}\times\vec{H}}{|\vec{V}\times\vec{H}|} \qquad \text{和} \qquad \vec{V}=\vec{H}\times\vec{L}$$

其中$\vec{V}$是重力的相反方向，$|\vec{A}|$表示向量$\vec{A}$的长度，在确定分支平面时，以母支方向作为子支的向前方向$\vec{H}$，$\vec{H}$与$\vec{V}$叉乘得到子支的向左方向$\vec{L}$，然后在$\vec{L}$与$\vec{H}$确定的平面上，用二分法找到与$\vec{H}$夹角为$-a_2$或a_2的向量，这就是子支的方向.

由上述L－系统可得到前图4. 进一步加细，可得到图5中的花束.



图 5

本文是在我的导师——北方工业大学齐东旭教授的悉心指导下完成的，谨此致谢！

迭代函数系统在自然景物仿真中的应用*

北京理工大学　周光辉　周克绳

引言：在我们周围存在很多分数维现象，例如延绵的山脉，曲折的海岸线和千奇百怪的云彩等。这些自然景象很难用传统的欧氏几何学来描述，却可以用分数维几何学方便地进行描述。近几年来，分数维几何学得到了很大的重视，并且正在蓬勃发展。本文阐述了分数维几何学在自然景物仿真方面的应用，着重介绍了迭代函数系统（IFS）方法在微机上的实现算法，并给出实现图例。

关键词：分数维几何学，迭代函数系统(IFS)，IFS代码，迭代模型。

一、数学模型

IFS法是建立一个迭代模型以及迭代规则，并由该迭代规则在有限次迭代后形成的一种分数维图象。首先应建立一个较为简单的几何模型，一般它是一个封闭的几何实体，如一个封闭的多边形，或者带有曲线的封闭多边形。其次，由该几何模型经过不同的线性变换形成多个变换后的几何模型，给变换后的几何模型分配以不同的概率。这些线性变换以及各概率值组成了IFS码，由IFS码决定了如下迭代规则：把每一个变换后的几何模型看作一个新的几何模型，经过同样的线性变换，又产生更多的几何模型，经过若干次迭代以后，便产生了一个分数维图象。

二、实现算法

利用IFS方法产生的分数维图象，须通过以下几步来进行：

1．IFS代码的生成

首先利用交互技术生成一个几何模型，在此以一个封闭的多边形为例。则对于给定的一个封闭N边多边形M（x_i，y_i），$i=0,\ldots,N-1$。经过E次线性变换后，即产生E个变换后的多边形。线性变换包括旋转变换、比例变换和平移变换。对每一次线性变换来说，设变换前的一个点p（x，y），通过线性变换，它变换成为P（X，Y），则有线性变换方程组：

$$\begin{cases} X=ax+by+c \\ Y=dx+ey+f \end{cases}$$

为确定上述方程组中的系数C(a, b, c, d, e, f)，可以分别作旋转、比例、平移等变换，每作一次变换，均可求出相应的每个系数，最后即可求出综合方程组中的每个系数。

几何模型M经过E次不同的线性变换后，产生了E组线性变换方程组及E组线性变换系数C_i，$i=0,\ldots,E-1$。

由于在以后的迭代过程中，每一几何模型都要经过E组线性变换，并产生E组新的几何模型，因此在比例变换时，只能作缩小变换，以使迭代收敛。

在这E组几何模型生成以后，应给每一几何模型分配一定的概率P_i，它表示该几何模型在分数维图象中出现的概率。它们应满足如下条件：

$$\sum_{i=0}^{E} P_i = 1$$

P_i可以由随机函数确定，或者人为预先给定。

这样，由以上的E组线性变换系数C_i以及给每一几何模型所分配的概率P_i，便形成了IFS代码。为便于再利用和修改，可将IFS代码存储下来。

2．迭代运算

在IFS代码生成以后，我们规定如下迭代规则：对于E组变换后的每一个几何模型，都分别作E次线性变换，其变换系数即IFS代码中的C_i。这样原来的E组几何模型通

*国家自然科学基金资助项目

过一次迭代便产生了E^2个新的几何模型，而这E^2个几何模型也按照相同的规则进行下去，直到达到规定的迭代次数。

在迭代开始以前，预先开好一个存储空间，对应于分数维图象生成后的全部范围．它可以是一个矩形窗口，也可以对应于显示屏幕．在迭代过程中，每次线性变换产生一个几何模型时，利用多边形填充算法，在存贮区域相对应的该几何模型区域，叠加上它相对应的概率值．随着迭代的进行，存贮区每一点的概率值都可能不同，迭代完成后，即产生了分数维图象。为有较好的输出效果，在开始的几次迭过程中，可以不进行多边形填充。迭代次数依E及N的值而定，运算时间随迭代次数增大而大幅度增加，迭代次数一般它不宜超过１０次。

３．显示处理

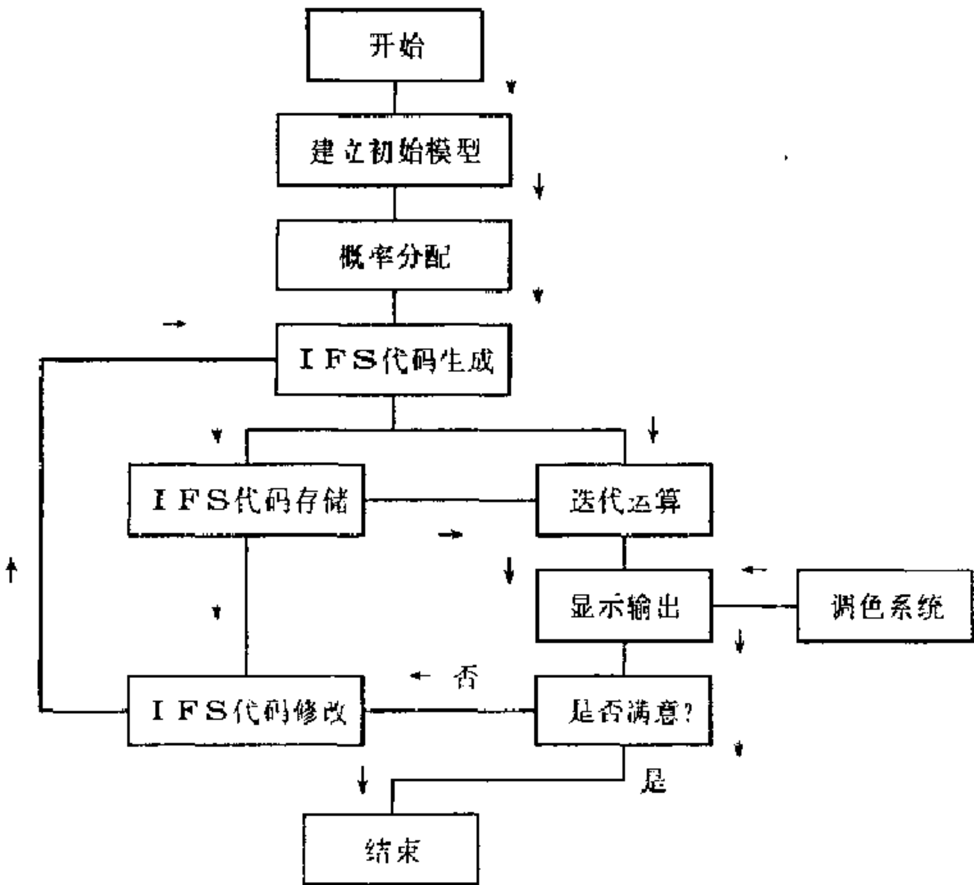
对存贮空间中的每一点，都对应有一个概率值（当然很多点处概率值为零），求出其中的最大、最小值，并经过拉伸处理，将这些概率值转化为不同的灰度值，这样便可以将分数维图象输出到显示设备。

本文所附图例是在微型计算机上用C语言生成，利用光标（鼠标）交互式建立几何模型和线性变换模型，在ＴＶＧＡ显示器上进行图象输出，其最高分辨率为1024X768，利用调色技术可产生256级灰度等级，所形成的图象十分逼真。附图一为生成云彩的几何模型，白色多边形为初始模型，红色多边形为线性变换后的几何模型。图二为由图一中的模型经过一次迭代后所生成的云彩图象．图三为经过三次迭代后所生成的一棵树的图象。

４．修改与完善

初始模型及ＩＦＳ码决定了分数维图象的形状。通过对它们的控制，可以产生云彩，树木，草丛等自然景象．为了得到效果逼真的图象，一般需要经过修改ＩＦＳ代码，迭代运算产生分形图象，及调制灰度等级等多次反复来得到。

由上所述，迭代函数系统(IFS)方法生成分数维图象的实现算法可用下面的框图来说明：

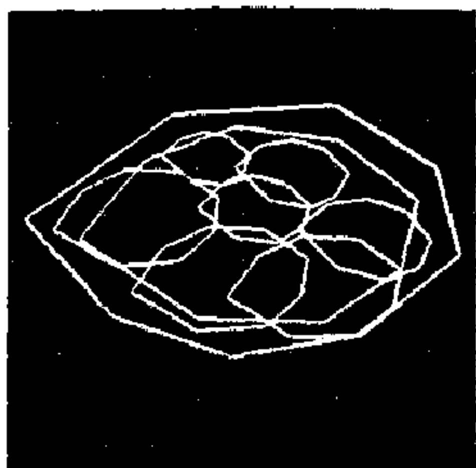


三. 参考文献

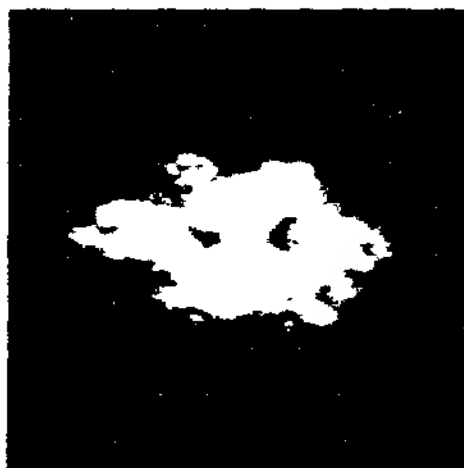
1. 曾文曲，刘世耀，<<分形几何——数学基础及应用>>，东北工学院，1991年8月

2. 董士海，张　辉，"Fractal图形学"，<<计算机辅助设计与图形学报>>，1990 年，第二卷，第一期.

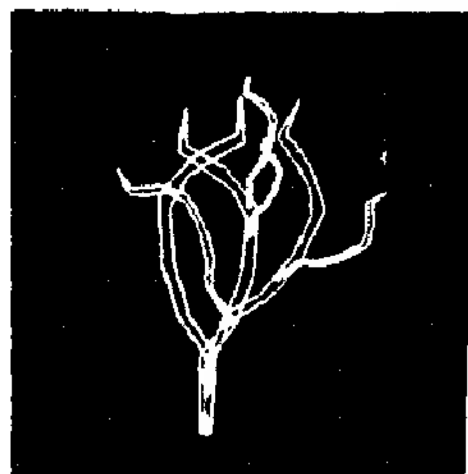
3. 李后强，程光钺，<<分形与分维——探索复杂性的新方法>>，四川教育出版社.



图一 生成云彩的迭代模型



图二　迭代3次后生成的云彩



图一 生成树的迭代模型



图二　迭代3次后生成的树

植物形态的分形重构

常　杰　　　　陈　刚　　　　葛　滢
(杭州大学生物系，310012) (浙江大学应用数学系，310027) (杭州大学生物系)

摘　要

植物的形态存在着明显的自相似现象。由于植物形态的复杂性，其遵循的自相似规律也不相同，可分为结构自相似和外貌自相似两大类。分形几何中的迭代函数系统(IFS)、L-系统和受限扩散凝聚模形(DLA)等方法可以很好地模拟植物的各种形态。利用植物形态的分形模拟，植物分类学可望建立全球植物的图形库，植物系统学可探讨植物进化的定量规律，而植物生态学则可能建立一门新学科——植物形态生态学。

一、引言

近几年来，分形几何作为描述自然界的一种崭新工具已经广泛应用于各个学科领域，尤其在各种自然景观的计算机仿真方面，显著优于其它手段。

分形集一般具有以下三个特点：

1. 结构比较复杂，具有无穷精细结构，因而具有一定的分数维特征；
2. 具有一定的部分与整体之间的相似性；
3. 可以通过递归、迭代等简单的方式产生。

植物体的形态结构中有许多明显的相似现象。例如，同一株植物的各级分枝十分相似，苹果、桃子的形状与树冠外形很相像，即构成体(母系统)的相对独立的部分(子系统，子子系统)的形态是整体的缩影。这说明，植物体是一个多级的自相似系统，每一个相对独立的子系统是一个分形元[1]。张颖清(1985)曾发现了这种自相似现象，但未从分形角度研究，而是使用了"生物全息现象"和"全息元"等概念[2]。

由于植物形态具有分形特征，就促使我们进行一种尝试，即把分形几何引入植物学中，用分形重构方法对植物形态进行计算机模拟，进而探讨建立新的植物生长机理模型的可能性。

二、植物形态的自相似性

植物的形态直接与外部环境相作用，其建成过程除了由基因型决定外，还受许多复杂的环境因素的制约。所以植物的形态　特别是营养体的形态，是植物诸生物学特征中变化最大的属性之一；同时，为了适应于植物生理功能的需要，植物的部分形态也发生一定程度的变化。因此，植物的形态结构十分复杂，但其构造过程中所遵循的基本原则仍是自相似规律。

由于植物形态的复杂性，其遵循的自相似规律也不尽相同，本文将其归纳为两大类：

1　结构自相似　各级分形元的形态构造方式与整体基本相同，因而最终的结构也比较相似。又可再分成严格自相似和投影自相似两类。

(1) 严格自相似：各级分形元的形态构造方式与整株完全相同，每一级分形元的形态十分相近，在整株到最低级分形元之间，其标度保持不变。这是植物形态中最严格的自相似类型　主要包括茎的各级分枝、复叶的各级，裂叶的各回分裂、以及禾本科植物的分蘖等。

在分枝方式上，原始的维管植物大多具有相等的二叉分枝，各级分枝的角度和长度的差异很小，可以具有相当多级的分形元；被子植物茎的分枝方式已不再是对等的二叉式，而是朝多个方向发展，主要有单轴分枝、合轴分枝和假二叉分枝三类，在各级分形元中，分枝角度

和分枝长度变异性较大 较低级的分形元与整体形态之间已有较明显的差异。

在多回羽状复叶中 各级小羽叶与上一级的构造方式十分一致，并且叶的外部轮廓亦相似，蕨类植物的许多种类均具此特点，如毛枝蕨(*Leptorumopha miqueliana*，图1)等。

(2) 投影自相似：分形元的结构在二维投影平面上具有自相似性。叶脉的分叉形式、根系分布与树干分枝的投影等均属此类。裸子植物和被子植物中的双子叶植物一般均具直根系，即一条明显的主根和与之成较大角度的侧根，其叶片中的叶脉虽为网状，但均有明显的中脉，主脉和侧脉的分叉方式与根的分叉及茎的分枝在二维平面上投影的形态很相似，单子叶植物则具有须根系，由许多彼此近于平行的不定根组成，无明显的主根，叶脉多为彼此很少连结的平行脉和弧形脉，与枝轴多呈丛状的投影图象也十分相近。



图1 毛枝蕨叶

2 外貌自相似：各级分形元的外部轮廓与整体在统计上具有相似性，其内部构造规则不一定相同。

此类自相似在从低级到高级的各种植物类群中均广泛存在。对植物体来说，一片叶子就是一个分形元，叶的上、中、下部分别对应全株或其分枝的上、中、下部。如果全株或全枝的叶片相对集中于株顶或枝顶，则其叶的上部较发达，即叶片呈上宽下窄的倒卵形、倒披针形、倒三角形或匙形等，此类型的代表性植物有广玉兰(*Magnolia grandifolia*)等；反之，如果叶集中在全株或全枝的下部，叶片的形状就表现为上窄下宽的卵形、披针形、三角形和匙形等，如扶桑(*Hibiscus rosasinensis*)等。如果全株的分枝不是均匀地占据2π水平面，而是主要分布在几个方向上，则叶片往往是开裂的，裂片数与主要分枝方向数相等。

果实也是一个典型的分形元。如果全株的果实主要结于株顶或枝顶，则果实先端大、尾端小，呈倒卵形，如鸭梨(*Pyrus bretschneideri*)等；相反，如果果实主要结于全株或全枝的中、下部，则果实中、下部大，上部形成一个尖嘴，如桃(*Prunus persica*)等；另外，李属(*Prunus*)植物的植株通常在近地表处有一些主要的大分枝，在水平面上呈不均匀分布，从而其果表有一浅沟，而苹果属(*Malus*)的植株有一主轴，枝均匀地占满2π的水平空间，因而果实表面无沟，呈均匀的圆形。

三. 植物形态的分形重构

近年来，分形重构问题已成为分形几何研究中的一个热点。所谓"分形重构"，简单地说，就是用分形的方法去生成特定的图形。或者，可以更精确地表述为：给定一个目标集 E，我们要生成一个分形集F，使得E与F的差别在一定的意义下可以任意地小。

分形重构的方法很多，可以产生各种类型的分形集。这里我们主要介绍迭代函数系统(Iterated Function System, IFS)，L-系统(L-System)以及受限扩散凝聚模型(Diffussion-Limited Aggregation, DLA)三种方法。

1. 迭代函数系统 设(K, d)是一个紧度量空间，记$W=\{w_i: i=1, 2, \ldots, n\}$，其中$w_i: K\to K$是K上的连续映射。因此我们称(K, W)为一个迭代函数系统。可以证明，对于一个由压缩映射组成的迭代函数系统(K, W)，存在一个唯一的紧集A，使得A在W之下不变。我们称A为该IFS的吸引子(Attractor)。反过来，我们有著名的拼贴定理(Collage Theorem)：对R中任一非空紧子集E，可以找到以F为不变集的一族相似压缩映射$w_1, \ldots, w_N$，使得E与F之间的差别在一定度量(比如Hausdorff度量)下可以任意小。然而，对于一个特定的目标集E，要想找出对应的压缩映

射w_1，…，w_N是十分困难的，即使是在平面上也是如此。在实际问题中，我们往往只在仿射变换中寻找所要的仿射变换，即形如

$$w_n\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},\quad n=1,2,\cdots,N$$ 的映射。

利用迭代函数系统可以用非常简单的方式模拟某些植物的形态。例如，用四个仿射变换

$$w_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.85 & 0.04\\-0.04 & 0.85\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.75\end{bmatrix},\quad w_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

$$w_3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2 & -0.26\\0.23 & 0.22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.75\end{bmatrix},\quad w_4\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.15 & 0.28\\0.26 & 0.24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.2\end{bmatrix}$$

在计算机上经过迭代运算后，就得到了毛枝蕨叶片的形态（图2）。

这样一个较复杂的图形，只需4个变换，共24个参数即可唯一地确定，因而，其信息压缩比是非常大的。我们可将这24个参数看作是植物形态生成的"控制码"，改变某些码就可改变图形。其后，在这方面又有大量的工作，对许多不同的植物形态进行了计算机模拟。

2 L-系统 在植物形态的计算机仿真方面，最有成效且最有影响的当推生物学家 A Lindenmayer (1968) 引入的L-系统。L-系统是用一种形式语言，即由字母组成的字符串来表示的一个几何形式。下面我们用最简单的一类L-系统——DOL-系统来说明其主要思想[6]。

设G表示一个字母集，V表示G上的所有单词集。我们称一个有序三元组X=(G, w, P) 为一个OL-系统，其中w∈V称为出发点，P包含在G×V中是一个有限集，称为生成规则集，若(a, v)属于P，则我们在重写过程中，以v代替a。一般情况下，我们总假设对每个G中的a，至少有一个v∈V

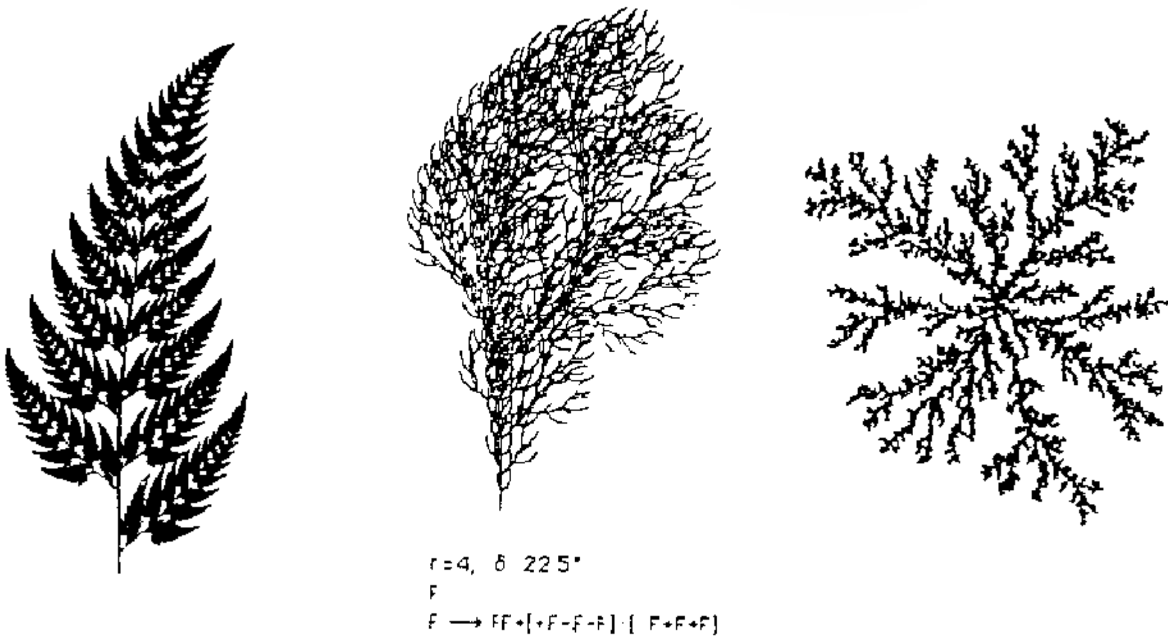


图2 毛枝蕨叶片的模拟图　　图3 雾冰藜植株模拟图　　图4 植物根系水平投影形态模拟

使得(a,v)∈P。如果对每个a∈G,有且仅有一个v∈V,使得(a,v)∈P,则称这样的系统为一个DOL系统(Deterministic zero-interaction L-系统)。按照一定的重写规则,并加以参数控制,即可模拟植物的各种形态及其生长过程。图3是藜科雾冰藜属一种植物的模拟图形。

3. DLA模型 该模型由Witten和Sander于1981年首次提出,以后又进行过修改。其算法思想如下:

(1) 在象素(Pixel)空间中定义一个闭区域D;

(2) 在D中取定一个点(x_0, y_0)作为种子;

(3) 在D内随机地产生一个微粒(象素点)(x,y),并让它随机地沿上下左右方向作随机的行走。如果微粒在行走过程中与种子相碰,则让其附着在种子上;如果微粒行走到D的边界上,则让其被边界吸收而消失;

(4) 重复步骤(3)。

这样,在迭代若干次以后,就可形成一个树冠或根系在水平面上投影的模拟图(见图4)。

四. 讨论

植物形态是表征植物特有属性和植物间差异的最直观的外部特征。从远古开始,人们就依靠植物形态来区分植物和植被类型,但时至今日,对植物形态的描述除了植物体各部分的测度外,几乎完全是文字的,很难与现代科学的先进手段接轨,严重地限制着相关学科的发展。

分形几何的创立为植物形态的定量模拟提供了有力的手段,为植物科学的进一步发展和完善展示出动人的前景。例如,在植物分类学中,有望通过分形重构建立全球植物的形态库,使植物分类学真正做到定量化、系统化;而对于植物系统学,分形重构中特定形态的对应码还可能具有进化上的意义。现已初步发现,在进化链中从较低级到较高级植物,其形态结构的自相似性越来越不明显,控制图形所需参数越来越多,"语法"越来越复杂。在这个意义上,对植物形态学的定量化研究反过来又对分形几何的研究内容以及发展方向提出了新的要求。并且,随着研究的深入,还可能通过目前图形的"外部控制码"寻找出控制形态建成的"内部信息码",使进化科学成为一门数理科学和实验科学。再如,形态和生理是植物生活的两个最基本的方面,二者相互促进、相互制约。分形重构可模拟植物形态的各种变化,探讨不同植物形态及群落结构与环境因子分布的数量关系及其对生理功能的影响,寻找出最佳的形态-功能状态,从而建立一门新的学科——植物形态生态学。

参考文献

[1] 李后强、程光钺,1990:分形与分维——探索复杂性的新方法。四川教育出版社。
[2] 张颖清,1985:生物全息学概论。生物全息学研究。山东大学出版社。1-21。
[3] Bansley, M., 1989: Fractals everywhwere. Academic Press, Inc. Boston San Diago New York.
[4] Feder, J., 1988: Fractals. Plenum Press, New York.
[5] Mandelbrot, B.B., 1983: The fractal geometry of nature. W.H. Freeman and Company, New York.
[6] Prusinkiewicz, P. and J. Hanan, 1989: Lindenmayer system, fractals, and plants. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris.

产生新一类 Julia set 和 Mandelbrot set

浙江大学应用数学系
章红卫　　金以文

本文介绍了产生新一类 Julia set 和 Mandelbrot set 的变形算法，以及 Julia set 和 Mandelbrot set 混合集的算法，为进一步研究这二个集合的 chaos 理论提供了更多的情况。

众所周知，Mandelbrot set 和 Julia set 都是在复平面上通过简单函数的迭代产生的，形式上写为：

$$f(z) = z^{\alpha} + c \tag{1}$$

其中对 $\alpha = 2$ 的情况研究最多。U. G. Gujar 和 V. C. Bhavsar 对 $\alpha \in R$ 作了详细的讨论[1,2]。

在以上方程中，α 值在整个迭代过程中是一个常数，而在非线性系统中，不一定是一个常数，它往往是一个带约束的变量，其取值在几个常量间轮流变化或随机变化。文献[3,4]讨论了 Julia set 和 Julia set 的混合集，即迭代过程在以下二个函数中切换：

$$f_1(z) = z^p + c_f \tag{2}$$

和

$$f_2(z) = z^q + c_g \tag{3}$$

其中 p 和 q 取不同值。具体迭代切换过程为：

$$z_{n+1} = \begin{cases} f_1(z_n) = z_n^p + c_f & \text{当 } |z_n| < r_0 \\ f_2(z_n) = z_n^q + c_g & \text{当 } |z_n| > r_0 \end{cases}$$

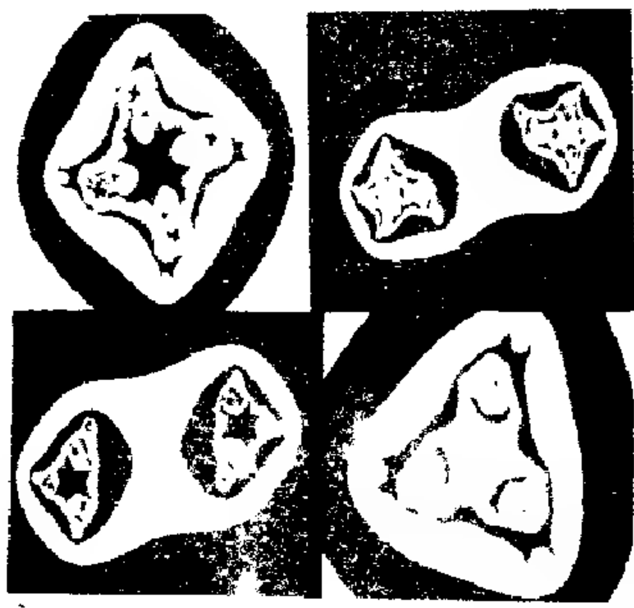
或者

$$z_{n+1} = \begin{cases} f_1(z_n) = z_n^p + c_f & \text{当 } |real(z_n)| \leqslant |image(z_n)| \\ f_2(z_n) = z_n^q + c_g & \text{否则} \end{cases}$$

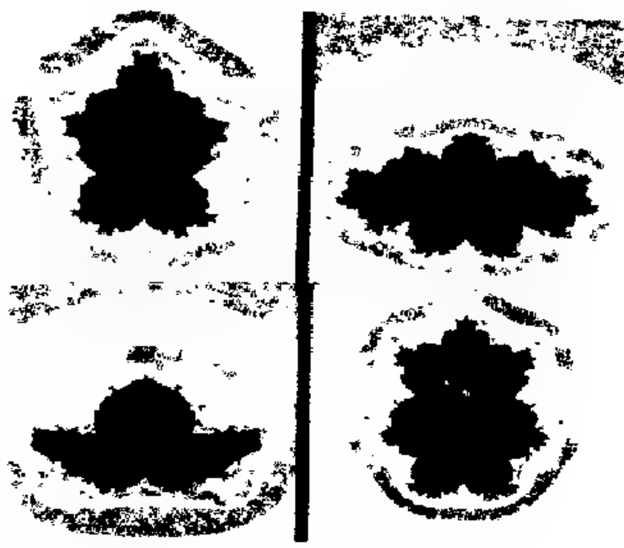
多个过程在混合时关键是确定下一步迭代时所应采用的变化形式，即选定一个迭代过程。这也是一个函数，用 $d(x)$ 表示，其自变量是 z_n，文中抽象地以 n 表示 z_n。函数值表示选用迭代的序号，即 f_i 的下标 i，也是一个整数。$d(x)$ 反映了迭代过程中的控制规律。上面的两种切换方法是比较简单的形式。通过选用不同的 $d(x)$ 就能得到不同类形的混合集。下面给出另外几种函数 $d(x)$ 的形式：

$$d(2n-1) = 1$$
$$d(2n) = 2$$

或



图一 Julia set 与 Julia set 的混合集



图二 Mandelbrot set 与 Mandelbrot set 的混合集



图三 Julia set 与 Mandelbrot set 的混合集

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p < p_1 \\ 2 & \text{else} \end{cases}$$

其中 p_1 为每次迭代时选择 $f_1(z)$ 的概率，p 为迭代时由系统产生的随机量。

利用上述思想，我们探讨了产生 Mandelbrot set 和 Mandelbrot set 混合集的算法。对 C 平面上的每个点作以下迭代：

$$z_{n+1} = f_1(z_n)$$

或

$$z_{n+1} = f_2(z_n)$$

可以根据控制规律 $d(z)$ 确定下次迭代时采用 $f_1(z)$ 或 $f_2(z)$。

上述两种混合集中不同的迭代过程都位于同一个平面中，Julia set 位于 Z 平面，而 Mandelbrot set 则位于 C 平面。关于 Julia set 和 Mandelbrot set 的混合集，由于这二个集合定义在不同平面上，在混合过程中要求统一定义域。我们把混合过程可以定义在 Z 平面上，过程表示为：

$$f_1(z) = z^2 + c_f \qquad \textit{Julia set}$$

$$f_2(z) = z^2 + c_p \qquad \textit{Mandelbrot set}$$

令 z' 是 Z 平面上任意一点，若迭代以 $f_1(z)$ 开始，则取初值 $z_0 = z'$；若迭代以 $f_2(z)$ 开始，则初值 $z_0 = 0$，并取 $c_p = z'$。这样得到的图象是 Julia set 中包含了 Mandelbrot set，Mandelbrot set 的个数由 p 决定。

对 Julia set 和 Mandelbrot set 的混合集的算法可以作进一步的修改，比如修改 Mandelbrot set 迭代初始值，或者 $d(x)$ 本身也是一个 Julia 或 Mandelbrot 迭代过程，能进一步看到各类不同的混合集。

综上所说，我们分析了产生新一类 Mandelbrot set、Julia set 及其混合集的方法，给出了一些迭代控制函数 $d(z)$，这对研究混沌学有很大的意义。文中所述算法均已实现，图一、图二、图三分别是三种不同的混合集的示例。

参考文献

[1] U. G. Gujar and V. C. Bhavsar, "Fractals form $z = z^a + c$ in the complex C plane", Computer & Graphics, Vol 15, No 3, 1991, p411–415.

[2] U. G. Gujar, et al, "Fractal images form $z = z^a + c$ in the complex Z plane", Computer & Graphics, Vol 16, No 1, 1992, p15–49

[3] K. Falconer, "Fractal Geometry", Wiley, Chichester UK, 1990.

[4] A. Lakhtakia, "Julia sets of switched processes", Computer & Graphics, Vol 15, No 4, 1991, p597–599

随机分形模拟欧氏平面纹理*

北京理工大学　邓昀　周克绳

提要：文章应用统计模型，结合分形概念和图形学中三维纹理表达技术，实现了对欧氏平面纹理的逆向模拟

关键词：分形、纹理、计算机图形

具有严格自相似的分形结构的图案已被深刻地研究过，本文研究的是随机意义下的分形图案，确切地说是利用分形概念模拟欧氏空间中的平面纹理进而映射到实体上

随机分形的最典型例子是布朗运动。布朗运动是一个粒子所经历的路程，运动的轨迹是任意的。自然界中有许多这种相似的规律，例如星球表面的形成，就是由无数多个陨石撞击而成，这种碰撞的机率是任意的，碰撞位置是任意的，陨石大小是任意的；又如大理石的脉络，也是在其形成过程中，由风化腐蚀等诸多自然因素决定；再如动物皮毛的生长，其分布规率、长度由人体的身体状况，情绪决定 这样，当我们把每一个因素的影响看成是一个粒子的运动，最后结果即为形成的陨蚀坑、大理石的纹理脉络、毛皮等自然纹理效果

既然所有这些自然现象都有着共同的规律，我们就可以对其进行模拟。以下介绍本文所用的随机置点法。

随机置点法产生纹理主要是意味着利用基本图素，如圆，椭圆，直线，点等，以任意统计模式置于画面之上而生成的图形。这种方式易于控制图形方向，控制局部纹理表达，与流行的稀疏矩阵生成方式有异曲同工之效。它是结合了1991年Jarke J vanvijk提出的点噪声法(SPOT NOISE METHOD)和粒子模型显示两种方法的基本思想。所谓粒子系统即在一定的时间范围内改变基本粒子的颜色，形状，大小，运动轨迹，以及粒子活动状态等参数，使画面产生动感及立体感。这种画面的效果充分依赖对粒子的描述。本系统的原纹理正是利用了这种粒子描述概念，并结合统计模型(STOCHASTIC MODEL)，随机域(RANDOM FIELDS)和噪声(NOISE)理论实现的。

以下以高斯(Gauss)统计模型为例做讨论：一旦确定统计模型，则分布规律就可完全由其平均值和方差决定 高斯纹理则由它的相关函数$C_f(\tau)$所完全描述：

$$C_f(\tau)=\langle f(t)\cdot f(t+\tau)\rangle$$

其中：< >表示许多样点的平均值，$C_f(0)$为f的方差σ_2。如果$C_f(\tau)=0$，则f 在τ间隔中的样值全不相关。对于普通的统计函数，$C_f(\tau)$随τ的增长而达到0。与统计模型相关的一个重要技术是频谱模型，以功率谱为基础。对于统计函数f(t)的功率谱为：

$$P_f(w)=\lim |F_T(w)|^2/T;$$

其中$F_T(w)$是f(t)以T为长度的富立叶变换。根据维纳定理(Wiener-khintchine)，z自相关函数与功率谱之间提供了相对应的信息。因为它们是一对富立叶变换对：

$$P_f(w)=\int C_f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau$$

标准的频谱模型是用白噪声(White Noise)对变换函数H(w)滤波。利用这种技术就可以产生分形布朗运动，其功率谱为$f^{-\beta}$ ($\beta=2$)。

随机模型产生纹理的技术与上述讨论具有密切的相关联系。它在每一个独立脉冲之间产生连续的重复的随机间隔，若每个脉冲的外形为$a_i\cdot h\cdot(t-t_i)$，则结果函数可表为$f(t)=\sum a_i\cdot h\cdot(t-t_i)$，$t_i$为时间函数 以产生随机序列。f(t)的功率谱与能量谱相关

$$S_n(w)=|H(w)|^2$$

H(w)为h(t)的富立叶变换。若a_i有0的均值，并且每个单位时间内有v个重复，则

$$P_f(w)=v\langle a_i^2\rangle S_h(w)$$

这里视h(x)为置于平面上的一个图素表达 其大小应小于所要生成的纹理图幅大小。所以对于屏幕上图素噪声的真正定义为：

$$f(x)=\sum a_i h(x-x_i)$$

其中x_i为随机置位座标。若每单位面积有v个重复，则可表示为：

$$P_f(k)=v\langle a_i^2\rangle S_h(k)$$ （其中k为两维频率向量。）

---

*注：本课题是国家自然科学基金资助项目

以上所讨论的是纹理功率谱和图素的能量谱是相同的. 因此, 图素的实现可通过富立叶变换乘以一个权因子构造频率域完成, 从卷积角度考虑频率域的乘法即空域的卷积. 因此图素噪声的构造可由h(x)与白噪声的卷积实现.

白噪声可以是一个网格上的随机值集, 那么纹理的构造可通过以图素为核(Kenel)在随机网格上做卷积的过程. 白噪声的另外一个例子是高斯点过程(Gauss Point Process), 即图素以高斯分布规律向屏幕上置"点"

不同纹理的数据可视性可由图素变量实现. 这就要求图素表达h(x)是控制变量. 这些变量由纹理座标和映射方式共同决定. 通常表示为:

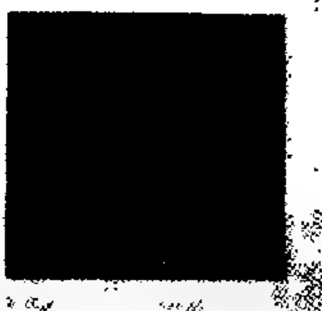
$$f(x, y)=\sum\sum h(m(d(x)), x+i, y+j)Noise(x+i, y+j)$$

图素的大小对于纹理形式具有重大关系, 最能体现图素间的相关表达. 当两个小图素置位时, 它们是独立的, 而大图素置位时就要考虑重叠部分的处置. 图素是否旋转, 所模拟的现象又各自不同, 体现在方向性的差异. 而边界的清晰程度影响着纹理是否具有边界自相似性. 利用以上随机分布为例的技术, 已生成了一些模拟图形. 如图一所示星球, 为大小随幂级数变化的圆环, 以纯随机形式置于屏幕; 图二所示大理石, 以点为体素, 以高斯随机模型置于屏幕; 图三所示仿毛, 以直线段为体素, 以确定轨迹旋转后的结果.

由生成过程可知, 当设定某一时刻置点位置为原点, 置n次以后, 相当于布朗运动粒子走了n步, 所以其维数与布朗运动维数相等, 为2.

参考文献:

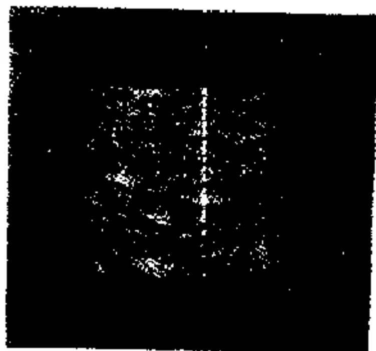
1. 蔡大用, "离散动力系统和分数维几何介绍", 清华大学
2. 李后强, 程光钺, 《分形与分维——探索复杂性的新方法》 四川教育出版社
3. Jarke J. van Wijk, 'Spot Noise', Computer Graphics, Vol. 25 No. 4, July 1991.



图一　星球



图二　大理石



图三　仿毛

分形理论用于图象分割研究

朱光喜　　张平　　朱耀庭
(华中理工大学)

摘　要

本文在分形图象模型研究基础上，采用离散分形布朗增量随机场(DFBIR)，通过提取特性参数—H 值、方差、平均灰度值，然后结合传统的聚类分割技术，实现图象分割。在对自然背景中的人造物体图象和金相图的实验结果表明，分割效果良好，且抗噪性能较强。

一、引　　言

图象分割是将图象分解成具有一定意义的部分，或将物体与背景分开，或将物体与其它物体分开的技术。对于一幅图象，尽管人可以识别出不同纹理，但要做到计算机自动描述和识别却复杂得多，传统的识别技术主要基于图象的灰度或边缘信息。

Mandelbrot [1] 创立了分形几何学理论，他提出用分形维数这一度量概念来描述自然现象的不规则程度。在自然界中，许多自然现象与物体，如云雾、青山、湍流、凹凸不平的地面，风化而斑剥的岩石等等，均在一定尺度范围内具有分形特性，而许多人工建造的物体，如机械、交通工具，建筑物等等，则不具有分形特性。这就使得我们可以利用各种不同的特征参数，包括分形特征与非分形特性，某种分形特性与另一种分形特性，来区分不同的物体，实现图象分割。

本文首先阐明 DFBIR 基本概念，然后给出图象分割的思路与步骤，最后提供实验结果与分析。

二、图象的 DFBIR 模型及其参数估算

Pentland 在用 DFBR 模型时遇到了关于适用的尺度范围的困惑。换句话说，DFBR 场虽然与自然界景物吻合较好，但它是非平稳的，处理起来较困难，且不能处理长记忆长相关的图像，于是，我们将 DFBR 场做了进一步发展，提出了 DFBIR 图像模型 [3]，并已证明 DFBIR 场与 DFBR 场具有相同的局部统计特性，且 DFBIR 场是平稳的，易于处理，易于分析，它保留了 DFBR 与大多数自然景物吻合较好的特点。因此，宜选用 DFBIR 场作为图像处理的模型。

设图像灰度场满足 DFBIR，其某一像素的灰度值用 I(x, y)表示，则有：

$$E(|I(X_2, y_2) - I(X_1, y_1)|) = K\left(\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^H$$

令：

$$\Delta I_{\Delta r} = |I(x_2, y_2) - I(x_1, y_1)|$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

则，

$$E(\Delta I_{\Delta r}) = K \cdot \Delta r^{H}$$

两边取对数：

$$Log(E(\Delta I_{\Delta r})) = HLog(\Delta r) + Constant$$

通过最小二乘法拟合数据点对$\{Log(E(\Delta I_{\Delta r})),\ Log(\Delta r)\}$拟合直线的斜率即为H值。

在完成上述运算时，涉及三个矢量：尺度变化范围$\overline{SR}$，像素对数目$\overline{PN}$，多尺度灰度差$\overline{MD}$。

$\overline{SR}$包括所有可能的像素距离 Δr，$\overline{SR}$={dr(1)，dr(2)，…，dr(k)，…，dr(n)}，dr(k)<dr(k+1)。

$\overline{PN}$包括在每个尺度下所有可能像素对的数目，$\overline{PN}$={Pn(1)，Pn(2)，…，Pn(k)，…，Pn(n)}，这里Pn(k)为在距离dr(k)下所有象素对数目。

$\overline{MD}$包括在每个尺度下灰变值的绝对值的均值，$\overline{MD}$={di(1)，di(2)，…，di(k)，…，di(n)}。

$$di(k)=\frac{\sum_{x_1=0}^{M}\sum_{y_1=0}^{M-1}\sum_{x_2=0}^{M-1}\sum_{y_2=0}^{M}|I(x_2,\ y_2)-I(x_1,\ y_1)|}{p_n(k)}$$

这里x_1，y_1，x_2，y_2，满足：

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\Delta r_k$$

分别计算 $Log(d_r(k))$及 Log(di(k))，k=1，…，n，画出所有点对(Log(dr(k),Log(di(k))，用最小二乘法拟合即可。

三、分形方法的图像分割

图像分割的方法有好几种，但都分别存在一些不可避免的弱点，现分述如下：(1)特征参数门限法，由于它没有涉及空间信息，通常是无效的。(2)边缘检测法，它可以找出图像中存在的局部边缘的空间信息，但对于有噪声的复杂图像，经常会产生错误的边缘或额外的边缘。(3)区域生长法，它的结果好坏受"种子"点的选取及算法的执行顺序影响很大。

分形方法的图像分割的特点在于，由于分形维数直观上与物体表面的粗糙程度相吻合，而自然界中的不同纹理粗糙度有很大差别，因此，分形维数可以作为区别不同类别纹理的有效参数。尤其是位于自然场景中的人造物体，我们利用人造物体本身不具有自相似性结构的特点，便可以将它与自然纹理分割开来。

具体分割步骤如下：

(1)计算分形维数，采用 DFBIR 场模型及上述方法估算局部范围的分维数、对一幅 NXN 的图像，选取 MXM 的窗口，从图像的原始点开始，计算窗口内图像子块的 H 值，然后沿水平和垂直方向移动窗口，设移动步长为 Step，则所得 H 值矩阵大小为 N／step×N／step。

窗口的大小很重要，选得太大会严重影响计算速度，太小又不能正确反映统计特性，经

过实验比较，以 6×6 大小为宜，且取步长为 3，这样每个 3×3 大小的子块所对应 H 值可取自四个不同窗口的计算结果。并用如下规则确定 H_o，求出：

$$H_{max}=max\{H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4\}及$$

$H_{min}=min\{H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4\}$，设定门限值 $Thed$，当 $(H_{max}-H_{min})>Thed$ 时，$H_o=\frac{H_{max}+H_{min}}{2}$ 否则 $H_o=H_1$。

(2)计算均值和方差：

均值：$mean=\frac{1}{9}\sum_{ij}fi,j$，$i,j$在当前子块。

方差：$\sigma=\frac{1}{9}\sqrt{\sum_{ij}(fi,j-mean)^2}$，$i,j$在当前子块，我们得到一组特性参数数据，{H，mean，σ}。

(3)图像类分割采用 k—平均法通过分裂、合并的聚类过程实现将数据点集{H,mean，σ}作为聚类过程的原始数据，通过判定得出聚类结果，这样每一小块就对应一类别标号。将这些类别标号还原到它所对应的小子块上，即得分割结果图像。

图 1(a)是扫描电镜下摄取的金属断口表面形貌，其中因断裂的动力过程而形成的复杂形貌包括背景，解理纹理和石墨球部分，三者的灰变分布是混合的，找不到截然分开的灰度门限，传统的纹理分析很难找到区别函数，用我们的方法则可以将三者满意地分割开来，图 1(b)是金属断口原图，图 1(c)是分割出来的石墨球，图 1(d)是分割出来的解理部分。


图 3(a)


图(b)


图(c)

参 考 文 献

〔1〕 B.B.Mandelbrot, The Fractaal Geometry of Nature, San Francisco, CA:Freeman, 1982.

〔2〕 A.P. Pentland,Fractal–Based Description of Natural Scences,IEEE Trans on Patter Analysis and Machine Intelligence, VOL.PAMI–6,NO.6, NOV,1984

〔3〕 李炳成，宋耀庭，朱光喜，万发贯，"图像综合的非规则维布朗模型方法"，模式识别与人工智能，Vol,1.No.4,1989.

分形布朗子波场及其在图象处理中的应用

罗会国　朱耀庭　朱光喜　万发贯
华中理工大学电子与信息系　430074

内容提要：

子波变换(Wavelet Transform-WT)是最近发展起来的一种新型信号分析工具，与传统的单一时域或频域分析方法不一样，它将时一频统一于一体分析信号。子波变换与分形一样，都要研究事物的尺度特性，所以两者之间必然存在内在的联系。在分析了两者之间的联系后，我们提出分形布朗子波場（Fractal Brownian Wavelet Random field-FBWR），讨论了FBWR的性质、特点及其在图象处理中的应用。以推动分形理论的进一步发展。

关键词： 分形（Fractal）、子波变换（Wavelet Transform）、
分形布朗子波场（Fractal Brownian Wavelet Random field-FBWR）
图象模型（Image Modelling）、图象处理（Image Processing）

一、子波变换

与传统的傅氏变换不同，子波变换同时在时域和频域中具有较好的局部特性，将时一频统一于一体来研究信号。传统的傅氏变换将信号完全变换到频域中研究，它对频率的分辨率是无穷，但对时间的分辨率为零；传统的时域方法则完全在时域中分析信号，它对时间的分辨率是无穷，但对频率的分辨率为零。而子波变换则同时对时间和频率具有较好的分辨率。

设$g(t)$是满足下述两个条件的任意函数：

1) $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt=0$　　　2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|G(w)|^2}{w}dw<\infty$，其中$G(w)$是$g(t)$的频谱。

则称信号$f(t)$的子波变换为：　$T(t,\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)dx$　　(1)

其中t是时间，$\lambda>0$是尺度，$\frac{1}{\lambda}$则相应于频率。$g(t)$称为分析子波，它同时在时间和频率中具有较好的分辨率。

从(1)式可以看出，$T(t,\lambda)$同时反映了时域(参数t)和频域(参数λ)特性，它是信号$f(t)$通过单位冲激响应为　$h_\lambda(t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}g\left(-\frac{t}{\lambda}\right)$　　(2)

的滤波器的输出。滤波器的传递函数为　$H_\lambda(w)=\lambda^{\frac{1}{2}}G(-\lambda w)$　　(3)

根据分析，我们有下述结论：

结论1：子波变换就是一系列带通滤波器对信号进行滤波。

结论2：这一系列带滤波器的中心频率及带宽与尺度成反比，放大倍数与尺度的平方根成正比。

结论3：带通滤波器的带宽随着中心频率的变化自动调节。中心频率越低，其带宽越窄；中心频率越高，其带宽越宽。子波变换的这一性质对分析信号的局部特性是非常有意义的。信号变化缓慢的地方，主要是低频成份，频率范围也较小，子波变换就自动调节滤波器的带宽，使之变窄；信号变化复杂的地方，跳变比较多，主要是高频率成份，并且频率范围较大，子波变换就自动调节滤波器的带宽，使之变宽，从而更好地分析其局部特性。

结论4：这一系列带滤波器的带宽与中心频率的比值是一个常数，这表明，这一系列带通滤波器的中心频率虽然各不相同，但对各自的中心频率的选择性能是一样的。

设$h_{m,i}(t)=\sqrt{2^i}\,g(2^i t-m)$　　　$m,i\in Z$

则$\{h_{m,i}(t);\ m,i\in Z\}$是一个正交函数系。定义信号$f(t)$的正交子波变换为：

$T_o(m,i)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,h_{m,i}(t)\,dt=\langle f(t),h_{m,i}(t)\rangle\quad m,i\in Z$　　(4)

设信号$f(t)$的正交子波变换为$T_o(m,i)$，则正交子波反变换为：

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}T_G(m,i)\,h_{m,i}(t) \qquad (5)$$

可证明：

1>、$f(t)$在尺度$\lambda_i=2^{-i}$下的详细信号$D_i f(t)$为：

$$D_i f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}T_\phi(m,i)\,h_{m,i}(t) \qquad (6)$$

2>、$f(t)$在某一位置m处的局部显微观察$E_m f(t)$为：

$$E_m f(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}T_\phi(m,i)\,h_{m,i}(t) \qquad (7)$$

由式(5)、(6)及(7)可得：$f(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}D_i f(t)$ (8) $f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_m f(t)$ (9)

式(8)表示$f(t)$被分解成不同频带来进行研究，式(9)表示通过$f(t)$的每一位置的局部显微观察来研究，正是这种将时间和频率统一于一体分析信号的特点，才使子波变换在信号分析中得到了广泛应用。

二、分形布朗子波场

设$B_H(t)$是一个分数布朗运动fBm，则其子波变换为：

$$T_{B_H}(t,\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}B_H(x)\,g\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)dx \qquad (10)$$

可以证明，$T_{B_H}(t,\lambda)$在给定尺度λ下的相关函数$R_T(t,s)$为：

$$R_\lambda(t,s)=\lambda^{2H+1}q\left(\frac{t-s}{\lambda}\right) \qquad (11)$$

其中$q(t)=-\frac{V_H}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2H}\int_{-\infty}^{\infty}g(w)\,g(w-\tau-t)\,d\tau\,dw$

有下面结论：

结论5：在一定尺度下，分数布朗运动的子波变换是一个平稳随机过程。(11) 式可以写为：$R_\lambda(\tau)=\lambda^{2H+1}q\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)$ (12)

结论6：$T_{B_H}(t,\lambda)$亦是自相似的，有：$R_{a\lambda}(a\tau)=a^{2H+1}R_\lambda(\tau)$ (13)

对fBm中的某一点t=b，在不同尺度λ下进行显微观察$T_b(\lambda)$。考虑其相关系数$R_b(\lambda,r)$，可以证明 $R_b(\lambda,r)=-\frac{V_H}{2}\sqrt{\lambda r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda x-\lambda y|^{2H}g(x)\,g(y)\,dxdy$ (14)

结论7：在不同尺度λ下对fBm的某一点的显微观察是一个非平稳过程。

结论8：这个非平稳过程的统计特性与fBm的观察点无关。表明对fBm 的任意位置上进行显微观察，其统计特性是一样的。式(14)中的$R_b(\lambda,r)$可为 $R'(\lambda,r)$。

结论9：fBm的任意位置上的显微观察是自相似的，有

$$R'(a\lambda,ar)=a^{2H+1}R'(\lambda,r) \qquad (15)$$

上面这些结论对二维的分形布朗随机场(FBR)仍然适用。我们定义FBR场的子波变换为分形布朗子波场(Fractal Brownian Wavelet Random Field-FBWR)，其离散形式称为离散分形布朗子波场(Discrete Fractal Brownian Wavelet Random Field-DFBWR)。

结论10：DFBWR场是平稳场。

结论11：在不同尺度下的DFBWR场具有相似性。

结论12：DFBWR场是各向异性的。

三、DFBWR场在图象处理中的应用

首先介绍DFBWR场分形参数H的估计。

结论13：DFBWR场的平均功率与尺度之间满足幂指数关系。

由式(12)得：　$R_\lambda(0)=\lambda^{2H+1}q(0)$

q(0)是与尺度λ无关的常数。所以，平均功率P满足：

$$P=E[T_{B_H}^2(t,\lambda)]=R_\lambda(0)=C\cdot\lambda^{2H+1}$$

两边取对数得：

$$\lg E[T_{B_H}^2(t\ \lambda)]=(2H+1)\lg\lambda+\lg C \qquad (16)$$

先计算不同尺度λ_i下的DFBWR场的平均功率$E[T_{B_H}^2(t,\lambda i)]$，然后利用式(16)进行最小二乘拟合，即得H值。

结论14：不同尺度下的DFBWR场的平均功率之比与它们的尺度之比成幂指数关系。

$$\frac{P_i}{P_j}=\left(\frac{\lambda i}{\lambda j}\right)^{2H+1} \qquad (17)$$

利用结论14亦可估计H参数。下面讨论另外一种估计方法。

由式(12)得：　$R_\lambda(\lambda\tau)=\lambda^{2H+1}q(\tau)$

式中$q(\tau)$与λ无关。对一定的τ，两边取对数得：

$$\lg R_\lambda(\lambda\ \tau)=(2H+1)\lg\lambda+\lg q(\tau) \qquad (18)$$

对一定的τ，在不同尺度λ_i下的DFBWR场中计算$R_{\lambda_i}(\lambda_i\tau)$，然后利用(18)进行最小二乘拟合得到$H_\tau$。最后对不同τ下的的$H_\tau$进行加权平均得：$H=\sum w_\tau H_\tau$

式中w_τ是加权值，$\sum w_\tau=1$。

从上面的讨论中，我们有结论：

结论15：DFBWR场参数H的估计与分析子波无关。

这个结论告诉我们，选择一种简单便于计算的分析子波对H值估计的运算速度是很重要的。

将图象划分为许多M X M大小的小块，用上面介绍的方法估计出各小块的H参数，根据这些H参数可以提取出边缘、进行纹理分割等。

结论11告诉我们，在不同尺度下的DFBWR场是相似的，因此，我们可以利用DFBWR场对图象进行数据压缩。

参考文献：

1. B.B. Mandelbrot, 'Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Application', SIAM Review, Vol.10, No.4, Oct. 1968, PP422-437.

2. A.Pentland, 'Fractal-Based Description of Natural Scences', IEEE Trans. PAMI. Vol.6, No.6, Nov. 1984, PP661-674.

3. I.Daubechies, 'Orthonormal bases of Compactly Supported Wavelets', Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol.41, Nov. 1988, PP909-996.

4. I.Daubechies, 'The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis', IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.36, No.5, Sep. 1990, PP961-1005.

5. S.G.Mallat, 'A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation', IEEE Trans. PAMI Vol.11, No.7, July 1989, PP674-693.

基于分形的纹理描述与分割

赵乃良

浙江大学应用数学系(310027)

一. 介绍

分形几何学[1]的兴起与发展，为计算机图象处理提供了一种新的工具。自从 1984 年 Pentland, A.[2] 首先将分维的概念引入图象处理以来，分维方法越来越受到人们的重视，特别是在自然纹理的描述和分割方面，已取得了一系列的成果[3][4]。

由于自然纹理图象的复杂性，利用计算机自动认别不同类型的纹理仍是一个有待研究的领域。本文的工作主要基于以下两点事实：

(1). 不同的自然纹理可以具有相同或相近的分形维数，分维有时不足以区别不同类型的纹理；

(2). 不同的纹理特征对应于相应的分割算法，两者的适当结合可以提高分割的效果。

本文首先给出了一种可以描述自然纹理粗糙程度和方向性的分形维数，即所谓的有向分维(Oriented Fractal Dimension)。通过计算图象子区域的有向分维，我们还提出了一种新的纹理分割算法，称为余弦分类器(Cos Classifer)。本文给出了这些方法在纹理分割中的应用。

二.有向分维及其计算

单色的纹理图象可以认为是 R^3 中的一张曲面，因此可以计算它的分形维数，但纹理往往还具有一定的方向性，传统的分形维数不能反映这种方向性[5]。有向分维实际上是该曲面在给定方向的截面上的分形曲线的维数。对于数字图象，我们可以用 Box-Counting 的方法来计算其维数：

$$N(L) = [L_{max}/L]^D \qquad (1)$$

其中 L 为截面上 Box 的边长；L_{max} 是最大边长，N(L) 是图象在该截面上落入 Box 的点数，D 为该曲线的分形维数，与截面方向有关。用最小二乘拟合数据 (ln(L),-ln(N(L)))，该直线的斜率即为 D。

对于 N×N 的图象窗口，以 (x,y,f(x,y)) 为中心，以 d 为方向作截面 (d=1,2,3,4)，在平面上以L为边长作 Box ($L=1,...,L_{max}$)，记落入该 Box 的图象点为 m(L,x,y,d)，并且记该窗口内，d 方向上的截面，落入边长为 L 的 Box 的点数为 m 的概率为 P(m,L,d)。

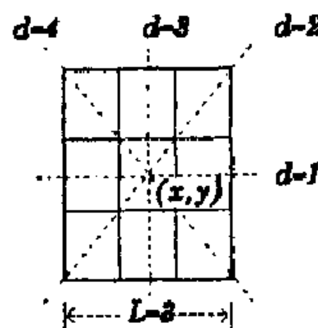


图 1. 有向分维的计算

算法如下：

step 1. 初始化 P(m,L,d) = 0

$L=1,...,L_{max}$; $m=1,...,L^2$; d=1,2,3,4

step 2. 对 d=1,2,3,4, 作循环

step 3. 对 $L=1,...,L_{max}$, 作循环

step 4. 计算 $m = m(L,x,y,d)$

$P(m,L,d) = P(m,L,d)+1$

$x=(L+1)/2,\ldots, N-(L-1)/2;\ y=(L+1)/2,\ldots, N-(L-1)/2$

step 5. 计算 $P(m,L,d) = P(m,L,d)/(N-l+1)(N-L+1)$ $\qquad m=1,\ldots,L^2$

step 6. 计算 $N(L,d) = \sum_{m=1}^{L^2} (1/m)P(m,L,d)$

转 step 3.

step 7. 最小二乘拟合数据 $(\ln(L),-\ln(N(L,d)))$，求 D_d

转 step 2.

step 8. 结束

三. 余弦分类算法

实际的纹理图象往往有几种不同的自然纹理组成，我们用移动窗口来计算局部区域的有向分维，然后用余弦分类器对图象进行分割。

在 M×M 的数字图象区域上，以 N×N 为移动窗口，计算有向分维 $D(x,y) = (D_1,D_2,D_3,D_4)$，其中 (x,y) 为该窗口的中心。如果窗口移动的象点距离取为 $(\triangle N,\triangle N)$，则 $M/\triangle N\times M/\triangle N$ 为分割结果的图象分辨率。我们记有向分维的模和方向分别为：

$$\| D(x,y) \| = \sum_{d=1}^{4} D_d^2 \qquad (2)$$

$$\tilde{D}(x,y) = D(x,y)/\| D(x,y) \| \qquad (3)$$

设移动窗口数为 F，将这 F 个 $\triangle N\times\triangle N$ 子区域分割成 K 类，每类有 G_i 个子区域组成，即 $\sum_{i=1}^{K} G_i = K$，并且记第 i 类的有向分维均值为 Z_i。

设 A，B 为两个有向分维，我们记

$$C(A,B) = \sum_{d=1}^{4} \tilde{A}_d \cdot \tilde{B}_d \qquad (4)$$

我们称 C(A,B) 为有向分维 A，B 的相关系数，实际上是两矢量的余弦，因此称为余弦分类器。$-1\leq C(A,B)\leq 1$，相关系数大的两个有向分维说明它们的纹理方向相近。

算法如下：

step 1. 计算 $\| D(x_i,y_i) \|$ $\qquad i=1,\ldots,F$

利用 $\| D(x_i,y_i) \|$ 的直方图，初始将区域分成K类

step 2. 计算 $Z_i = \sum_{t=1}^{G_i} \tilde{D}(x_t,y_t)/G_i$ $\qquad i=1,\ldots,K$

step 3. 对 $i=1,\ldots,F$，作循环

step 4. 计算 $j_{(i)}$，使得

$$C(D_{(x_i,y_i)}, Z_{j(i)}) \geq C(D(x_i,y_i), Z_t) \quad t=1,\ldots,K$$

step 5. 将第 i 个窗口的子区域分类到第 $j_{(i)}$ 类

转 step 3.

step 6. 按照新的分类，计算 G'_i $i=1,\ldots,K$

$$\tilde{Z}'_i = \sum_{t=1}^{G'_i} D(x_t,y_t)/G'_i \qquad i=1,2,\ldots,K$$

step 7. 如果 $\sum_{i=1}^{K} \| \tilde{Z}_i-\tilde{Z}'_i \| < \varepsilon$，转 step 8；

否则，$Z_i = Z'_i$，转 step 3

step 8. 结束

四、实验结果

我们对 256×256 的灰度图象，用上述算法进行纹理分割，其中取窗口大小 N=32，△N 分别取为 △N=16 和 △N=8，Box 边长 L=1,3,5,7 实验结果表明，上述算法对自然纹理的分割是有效的。

本文为浙江省自然科学基金资助项目。

参考文献

1. B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1983
2. A. Pentland, Fractal-based description of natural scenes. IEEE Trans. Patt-ern Anal. Mach. Intell. PAMI-6, No. 6, 1984, 661-674
3. J. Keller, R. Chen, and R. Crownover, Texture description and segmentation through fractal geomrtry, Computer Vision, Graphics and Image Processing 45, 1989, 150-166
4. B. B. Chandhuri and N. sarkar, et al., An effcient approach to compute fractal dimension in texture image. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell, 1992, 358-361
5. M. F. Barnsley, et al. , The Scince of Fractal Image, Springer-Verlay New York Inc. 1988

气—液—固三相流态化中分形的研究

胡宗定　段一然
（天津大学化工系）

（摘要）　本文采用计算机图象处理技术，对几张典型的三相流化床中流型图片进行处理，从而引入分维对前人提出的“聚结鼓泡流”、“分散鼓泡流”的概念进行了定量的表征。本文进而提出气泡分布分形结构的假说，通过模型模拟和验证，证明了模型的正确性。

一、前　　言

气—液—固三相流化床中，流体的流动状态对反应器的传递性能有显著的影响，因此这方面的研究一直为人们所关注。早在 1968 年 Ostergaard[1]对三相流化床的流动状态进行研究，提出了“聚结鼓泡流”，“分散鼓泡流”、“过渡流”的概念，并提供了各个流态的图片，目前已成为国际公认的描述三相流态化操作状态的标准。近年来，Fan L. S. [2]等研究了压强波动和流区的关系，但尚不能给出定量判断流型的依据。分形理论诞生十多年来，在许多领域的应用中发挥了巨大的威力，近年来已开始用于解决湍流等流体力学问题。Fan L. T. [3]根据三相流态化的压强波动数据计算了分维数。然而分形在多相流中的研究工作尚且很少。本文采用图象处理技术对 Ostergaard 给出的三相流态化几种典型流型图片进行处理，并用变分法计算分维值，获得了不同流区具有不同分维数值的结果。文中进一步引入气泡分布分形结构理论，使多相流的研究更加深入。

二、图象处理方法计算分形维数

§2—1 图象处理过程简介：



图 1　图象处理的简要过程

本研究中采用的是数字图象处理技术，它的过程如图所示。待处理的图象通过摄像机摄入图象处理系统，系统的图象采集卡就同时完成如下工作：一是将连续的图象化为若干离散的象点；二是根据每个象点的明暗程度，赋于其灰度值，越明亮的象点其灰度值越小。这样一幅图象就变成了由若干个象点的灰度值组成的矩阵——数字图象。应用特定功能的软件，借助计算机对数字图进行处理，得到的结果是特征值或新的图象。最后依据处理结果对原图象做出分析。

§2　2 变分法计算分维值

本文应用变分法计算分维。有研究表明[4]，该方法对处理离散数据比其它方法更准确，所以适用于数字图象处理过程。下面简要介绍这种方法的原理和在图象处理中的实现。

设有如下一个分形集：

$$E=\{((x,y,z(x,y))\mid(x,y)\in I^2\}\tag{1}$$

其中 $I^2=[0,1]\times[0,1]$ 是一个单位平面，而 z 是定义在该平面上的函数。从 Hausdorff 维到信息维，引入了 Pi，而在变分维中，则是引入变分的算法进行改进。在变分的基础上，其分维

的定义为：

$$D_v(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(3-\frac{\lg\int_0^n\int_0^n V_\varepsilon(x,y)dxdy}{\lg\varepsilon}\right) \tag{2}$$

以上只是变分维在连续空间上的定义，应用于图象处理时，要做必要的改变。其分维计算式为：

$$D_v(E)=3-\frac{\lg\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_\varepsilon(i,j)1/n\cdot 1/n\right)}{\lg(\varepsilon/n)} \tag{3}$$

为了得到更准确的值，可做如下处理：

设：

$$N=\lg\left[\frac{1}{(\varepsilon/n)^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_\varepsilon(i,j)\cdot 1/n\cdot 1/n\right] \tag{4}$$

$$M=\lg\left[\frac{1}{(\varepsilon/n)}\right] \tag{5}$$

$$D_v(E)=\frac{N}{M} \tag{6}$$

所以取不同的 ε（即不同大小的邻域），得到一组 M、N 的值，将 N 对 M 作图，直线的斜率就是 $D_v(E)$。

三、Ostergaard 流型图片的分析

本文对 Ostergaard 所提供的“聚结鼓泡流”，“过渡流”，“分散鼓泡流”的图象[1]进行了处理，结果见图 2。图 2 中纵坐标表示分维值，横坐标反映放大倍数，以数字图象中象点间距所对应的实际距离表示，距离越小，放大倍数越大。

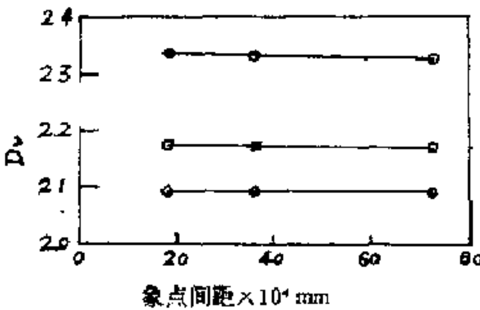


图 2 图象处理结果

从处理的结果可见：

1. 不同流型的三相流态化图象的分维值不同，它们分别是：聚结鼓泡流～2.09，过渡流～2.17，分散鼓泡流～2.33。这表明图象法求分维，可能为三相流态化流型划分提供定量化的标准。

2. 在一定范围内，D_v 值不随放大倍数而改变，即尺度不变性，这正是分维的特征之一。这证明三相流化床中的气泡分布具有分形结构。

四、气泡分布的分形结构

§ 4－1 模型假定：

1. 气泡呈球形，吸附在气－液界面上的电荷服从扩散双电层规律，静止时电荷均匀分布。

2. 气泡运动过程中，表面电荷发生极化而形成瞬间偶极，从而导致气泡间的吸引力，而自发地聚集。

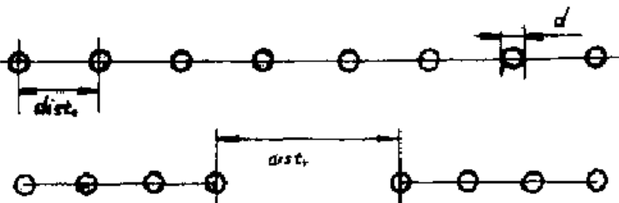


图 3 气泡聚集过程示意图

3. 气泡偶极吸引力可用分子间色散力

描述。

4. 采用康托分形(Fractal—Cantor)集合[5]描述聚集气泡团束(参见图 3)。

§4—2 数学模型推导:

London[6]证明,分子间色散力与分子间距的七次幂成比例,因此气泡偶极吸引力可表示如下:

$$F=C/r^7 \tag{7}$$

式中 C 为表征气泡偶极矩所对应的参数。影响它的因素很多如气泡本身的振动;气泡上升过程中产生尾涡的影响以及其它流化运动的产生的湍动旋涡的影响等等。

图 3 表示有 8 个气泡由于受到偶极引力聚集为 2 个气泡团束的情况。因为气泡间距变化不大,可视球心距 r 为常数,设 r=dist。

气泡的虚拟质量按文献[7]推荐的公式计算:

$$m=\frac{1}{2}\rho_l V_b \tag{8}$$

$$V_b=\frac{1}{6}\pi d^3 \tag{9}$$

因为气泡聚集速度很小,可以忽略聚集的 力,因此气泡加速度可写成:

$$a=F/m \tag{10}$$

气泡在 t 秒内移动的距离是 $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ (11)

两个气泡之间缩短的距离是 2S。

这样,两个气泡团束区域之间的距离为 $dist_r$

$$dist_r=dist_0+2S+6 \tag{12}$$

以上计算仅对一个层次的情况,如果存在许多气泡,可以想象气泡按以上规律聚集成"大团","大团"内的气泡进一步聚集成"小团"。虽然由于"小团"聚并过程中,引力增加而速度加快,但又由于"小团"的聚并过程开始时晚于"大团",可以认为他们最后形成的距离规律一致。因此可用同样的生成规则来描述它们。

众所周知,康托集合的相似分维计算式为:

$$D_s=\lg 2/\lg N \tag{13}$$

在构造康托集合的过程中,有一关键参数即所去掉线段与原线段长度之比 1/N。根据上述模型的计算式,假定 $dist_r$ 是去掉线段的长度,则有

$$N=\frac{2}{1-\frac{dist_r}{7\cdot dist_r}} \tag{14}$$

因此确定了 N 值后,即可通过式(13)计算相应的分维数 D_s。以上只是一个方向上的分布,而通常实际反应器中气泡分布是三个方向上的体积分布,若考虑三个方向上的分布规律一致,则分维应是 $3D_s$。

因此,通过上述模型计算式(7)—式(14),可以计算出气泡分布分形结构的分维数,同时也可进行图象合成。

§4—3 模型验证:

为了对比，模型参数是根据 Ostergaard 给出的标准图象时所用的实验条件加以确定，以分散鼓泡流为例，相应参数如下：$dist_0 = 5mm$，$d = 5mm$，$\rho_L = 10^3 Kg/m^3$，$C = 1\times10^{-20}$，$t = 0.5s$。依据式(7)—式(14)，计算出气泡分布的分维数 $D_s = 2.34$，二维情况下的图象如图 4 所示。由此可见，计算出的分维数与根据 Ostergaard 原图所得到的分维数是相近的。图 4 中所示的气泡分布是典型的分形结构，全部气泡团束分为四个密集的区域，每个区域内会有四个气泡团，而每个气泡团又是由四个小气泡团束组成的。

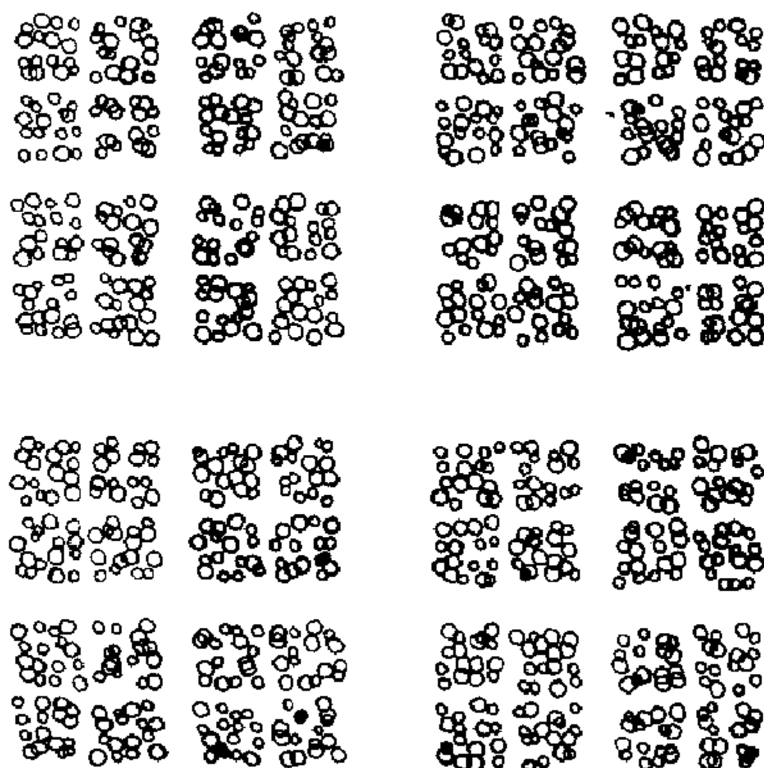


图 4　合成的分散鼓泡流的图象

五、结　语

1. 用图象处理技术及变分方法，对标准三相流态化图象进行了处理，发现三种流型的图象具有不同的分维，这说明图象法求分维可能为流型划分提供定量化的标准。

2. 提出了气泡分布的分形结构模型。通过模型模拟检验，证明了模型的正确性。

主要符号表

C：表征气泡偶极矩所对应的系数
s：气泡直径
D：分维
D_s：相似维
D_v：变分法分维
F：电场力
m：气泡力虚拟质量
r：气泡球心间距
S：气泡移动距离
t：时间
V_0：气泡容积
ρ_L：液相密度

参考文献

[1] J. F. Davidson, "Fluidization", Chapter 18, Academic Press, London and New York (1971)
[2] L. S. Fan, "Gas -Lipuid—Solid Fluidization Engineering", Butterworths (1989)
[3] L. T. Fan, AIChE. J., 36 (10), 1529 (1990)
[4] B. Dubuc, SPIE, 845, 241-248 (1987)
[5] 董连科，《分形理论及其应用》(1991)
[6] 何福城、朱正和编，《结构化学》(1979)
[7] Peter Smereka, J. Fluid Mech. 233, 65—81 (1991)

拉普拉斯方程与分形集*

罗春荣　赵晓鹏

(西北工业大学应用物理系)

摘　要

本文研究拉普拉斯方程与分形集的关系，以多极矩的分形模型为例，得到拉普拉斯方程的球函数解本身构成一个分形集。

关键词　拉普拉斯方程　多极矩　分形

一、引　言

如所周知，DBM 模型和 DLA 模型的数学模型中，泛定方程均为拉普拉斯方程[1][2]. 集团自相似性的出现是拉普拉斯方程和生长几率函数形式标度不变的直接结果。由于生长几率函数是拉普拉斯方程的差分方程，所以可以认为由于拉普拉斯方程的标度不变性，才使得分形生长的图形具有标度不变性，本文拟从拉普拉斯方程的解讨论标度不变性的内在联系，也即拉普拉斯方程的解与分形集的关系。我们提出多极矩的分形模型，并以此为例推知拉普拉斯方程的球函数解本身构成一个无穷嵌套的分形集.

二、拉普拉斯方程的解与多极矩展开

用球坐标系对拉普拉斯方程分离变数，就出现缔合勒让德方程，缔合勒让德方程和自然边界条件构成了本征值问题。本征函数是缔合勒让德多项式，多项式的系数可递推，缔合勒让德函数也可递推，这里隐含着无穷嵌套的自相似性.

我们以多极矩的电势为例说明这个问题。根据经典电动力学，在区域 V 中分布着电荷，对区域外远处的电场来说，区域 V 内的电荷可以用一系列的多极矩代替. 2^l 极矩的电场的电势，必可表为 $\frac{1}{r^{l+1}}$[l 阶球函数][3].

$$\varphi(r, \theta, \Phi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\sum_{l=0}^{\infty}[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2}{\delta_m}\iiint_V\rho(r_0, \theta_0, \Phi_0)\times$$

* 国家自然科学基金资助项目

$$\times r_0^l P_l^m(\cos\theta_0)\cos m\Phi_0 dV_0]\frac{1}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\cos m\Phi$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}2\iiint_V\rho(r_0,\ \theta_0,\ \Phi_0)$$

$$\times r_0^l P_l^m(\cos\theta_0)\sin m\Phi_0 dV_0]\frac{1}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\sin m\Phi\}$$

其中[　　]外面的$\frac{1}{r^{l+1}}$・l阶球函数表明是2^l极矩的电势，[　　]里则是2^l极子的2 极矩，这2^l极矩也是用l阶球函数表示的。

一般情况下电势的多极矩的表达式为：[4]

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{Q_i}{R_i}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\sum_i Q_i\frac{1}{r}-\sum_i Q_i\frac{1}{1!}\mathbf{r}'_i\cdot\nabla\frac{1}{r}+\sum_i Q_i\frac{1}{2!}\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i:\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\sum_i Q_i\underbrace{\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i\cdots\mathbf{r}'_i}_{n个}\underset{n次点积}{\cdot}\underbrace{\nabla\nabla\cdots\nabla}_{n个}\frac{1}{r}+\cdots$$

其中$\sum_i Q_i$　　是单极矩，

$\sum_i Q_i\mathbf{r}'_i$　　是偶极矩；

$\sum_i Q_i\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i$　　是四极矩，

依次类推　$\sum Q_i\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i\cdots\mathbf{r}'_i$(有$n$个)是$2^n$极矩。

最简单的电偶极矩的电荷分布是由一对正负电荷组成，最简单的电四极矩的电荷分布是由一对正负偶极子组成，依次类推最简单的2^n极矩的电荷分布是由一对2^{n-1}极矩组成。可见这种最简单的电多极矩的电荷分布具有无穷嵌套的自相似结构，我们可以构造它的分形模型。由于电多极矩的电荷数目N与多极矩有$N=2^n$的倍周期律关系，即2^n极矩的电荷数目为N。再由电势的多极矩展开式知道，小区域电荷分布在远处激发的电势是各极矩贡献的迭加，因此这种电荷分布的各极矩的迭加类似于Comtor集合，所以我们认为多极矩电荷分布是一种分形集。

由以上讨论，我们首先知道2^l极矩可用l阶球函数表示，2^l极矩的电势用$\frac{1}{r^{l+1}}$・l阶

球函数表示，多极矩的电势由$\frac{1}{r^{l+1}}\cdot l$阶球函数的迭加表示。我们又以最简单的多极矩电荷分布为例，知道各极矩的迭加类似于Cantor集合，是一种分形集。两种结果比较可推论：拉普拉斯方程的球函数解本身构成一种分形集，这也许是拉普拉斯方程标度不变性的内在本质。

以上结论与Pietronero提出的不同于计算机模拟的拉普拉斯分形的新理论[5]随机Cantor集的分形图形有相似之处。

三、结　论

1、由于生长几率是拉普拉斯方程的差分方程，所以拉普拉斯方程的标度不变性导致分形生长的标度不变性。

2、拉普拉斯方程的球函数解可表示为l阶勒让德多项式，多项式的系数可递推，勒让德函数也可递推，隐含着无穷嵌套的自相似性。

3、提出多极矩的分形模型类似于Cantor集，由此推论由n阶球函数表示的多极矩的迭加构成一个分形集，因此拉普拉斯方程的球函数解本身构成一个分形集。

参考文献

[1] L.Niemeger et al Phys. Rev lett., 5(1984), 1033

[2] T.A.Witten and L.M.Sander Phys. Rev. Lett., 47(1981),1400.

[3] 梁昆淼 《数学物理方法》 人民教育出版社(1979), P362

[4] 蔡圣善、朱耘 《经典电动力学》 复旦大学出版社(1985), P164

[5] L.Pietronero el al., Physica, A151 (1988), 721

局部维数及其动力学演化方程

周文臣

（山东省临沂师范学校，276005）

在分形理论中，现有的各种维数概念都是对分形体整体而言的。但是实际的情况却是，自然界中现实物体上的不同位置处可能有不同的维数，这就需要引入局部维数的概念，它在不同的位点处可以取不同的值。

通过局部信息量来定义局部维数是一个自然的引入方法。根据信息论的观点，如果一个信源中某种信号出现的概率是 p_i，那么它带来的信息量就是 $-\ln p_i$，而整个信源的信息量则为 $H=-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$。

一个实际的物质系统可以被看成是一个信源，其中某一位点处出现粒子的概率可由概率分布密度函数 $\rho(r,t)$ 来表示：$P(r,t)=\rho(r,t)d\tau$。这里 $r=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维位矢，t 为时间参量，$d\tau=dx_1dx_2\cdots dx_n$ 为 n 维位形空间（即背景空间）中的体积元。相应地，P 所产生的信息量就称为局部信息量：

$$h=-\ln[\rho(r,t)d\tau] \tag{1}$$

把信息维数定义 $D=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{H}{\ln\varepsilon}$ 中系统整体的信息量 H 换成局部信息量 h，便可以得到局部信息维数（为了与整体维数相区别，以 $\mathcal{D}$ 表示）：

$$\mathcal{D}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h}{\ln\varepsilon} \tag{2}$$

因体元的线度 ε 可以写成 $\varepsilon=(d\tau)^{\frac{1}{n}}$，因而上式变为：$\mathcal{D}=\dfrac{\ln[\rho(r,t)d\tau]}{\ln(d\tau)^{\frac{1}{n}}}$。由此得：

$$\mathcal{D}(r,t)=\frac{n}{\rho(r,t)} \tag{3}$$

上述结果也可以通过推广豪斯道夫维数来获得：设 E 为一个集合，若用直径分别为 d_1、$d_2\cdots d_n$ 的小球覆盖集合 E，则 D 维豪斯道夫测度为：$M_D(E)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\limits_{d_i<\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}d_i^D$。这里 D 为整个集合的维数，即豪斯道夫维数。如果不同的区域有不同的维数，则需做如下推广：对于 E 中的一个小区域 E_i（设直径为 d_i，$d_i<\varepsilon\to 0$），其测度定义为：

$$dM(E_i)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{d_i<\varepsilon}d_i^{\mathcal{D}} \tag{4}$$

这里 dM 和 $\mathcal{D}$ 可以分别称为局部豪斯道夫测度和局部豪斯道夫维数。

命 $dM(E_i)=\rho(r,t)d\tau$，为子集 E_i 的概率测度，故有：

$$\rho(r,t)d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\mathcal{D}} \tag{5}$$

把上式取对数，再运用罗必塔法则，并考虑到 $\varepsilon=(d\tau)^{\frac{1}{n}}$，便立即得到（3）式。因此，局部信息维数实际上是一种特殊的局部豪斯道夫维数。

由(2)式或(5)式所定义的局部信息维数$D(r,t)$描述了体系中(r,t)点处的粒子的自由程度或不确定性的大小。因此，它的余维数$D^c(r,t)$应当描述体系中(r,t)点处的确定性的大小或物质的分布情况。显然，D^c越大就意味着(r,t)处被随机点访问的可能性就越大。或者说，D^c的大小反映了空间中(r,t)点处被填充程度的大小，因而可以称$D^c(r,t)$为位点(r,t)处的局部填充维数。

局部填充维数与局部信息维数分别描述了空间的"实"的程度和"虚"(即自由)的程度，它们应当满足如下关系：

$$D^c(r,t)+D(r,t)=n \tag{6}$$

由(3)式可得：

$$D^c(r,t)=n\left[1-\frac{1}{\rho(r,t)}\right] \tag{7}$$

当体系中某一点处的概率密度$\rho(r,t)$小于1(但仍大于0)时，该点处的局部信息维数将大于背景空间的维数，而填充维数则小于0，即：$D>n$，$D^c<0$。这对应于体系的熔化或粒子的湮灭过程。例如，在冰块上某位置处发生熔化或升华过程时，该处粒子(即水分子)的自由程度将增加，发生了与填充或凝聚过程意义完全相反的过程，我们可以称之为负填充。

根据(3)式和(7)式可以看出，局部信息维数$D(r,t)$和局部填充维数$D^c(r,t)$在体系中的任意一点都有定义，并不依赖于体系本身是否有无自相似性，因而它们作为位点的函数构成了一种场，我们可以称之为分维场或分形场，其场方程可由连续性方程$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=\mathrm{k}\rho$得到：

$$\frac{\partial D}{\partial t}=D\nabla\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\nabla D-\mathrm{k}D \tag{8}$$

$$\frac{\partial D^c}{\partial t}=-(n-D^c)\nabla\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\nabla D^c+\mathrm{k}(n-D^c) \tag{9}$$

式中，$\mathbf{v}(\mathrm{r},\mathrm{t})$可以看成是$(\mathrm{r},\mathrm{t})$点处粒子的输运速度；$\mathrm{k}\rho$则为有泉源或渗井时几率增长的速度，比例常数k则称为增长因子，如果有泉源，则$\mathrm{k}>0$；如果是渗井，则$\mathrm{k}<0$。

对于量子体系，维数函数的演化方程应由(3)式或(7)式和薛定谔方程共同决定：

$$\begin{cases} D=\frac{n}{\rho} \\ D^c=n\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \\ \rho=\psi^*\psi \\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \end{cases} \tag{10}$$

显然，局部信息维数和局部填充维数的演化方程不仅可以用于对凝聚态体系的描述，也可适用于对大分子的形成过程乃至原子体系中电子云的描述。而一切形态发生学问题(例如分形生长的物理机制和发生生物学等)都将可以通过填充维数的演化方程得到解释。

总的说来，对于生长过程，在固—液(或固—气)界面处，有粒子源源不断地注入(泉源)，因而在填充维数的演化方程(9)中，$\mathrm{k}>0$，$\nabla\cdot\mathbf{v}<0$，故$\mathrm{k}(n-D^c)>0$，$-(n-D^c)\nabla\cdot\mathbf{v}>0$，它们对$\frac{\partial D^c}{\partial t}$有正的贡献，使$D^c$有增加的趋势。但第三项$-\mathbf{v}\cdot\nabla D^c$的情况较为复杂：因$\nabla D^c$垂直于生长表面(指向固相方向)，所以当粒子沿$\nabla D^c$的方向运动时，反而对$D^c$的增加有抑制作用($-\mathbf{v}\cdot\nabla D^c<0$)，只有沿接近于生长方向(即$\nabla D^c$的反方向)运动的粒子才对$D^c$的增加有贡献，这就导致了如下的常见生长现象：

1、晶枝生长的避雷针效应：在生长表面上，任何突出的部分都要比其近邻生长得快，这就是所谓的避雷针效应，它导致这些地方生出了一些晶尖，形成了所谓的树枝晶，它们迅速向外生长，并常常长出一些分支来。

这一效应的根源就在于，在晶尖处，一方面 $k(>0)$ 较大，另一方面可有大量沿与 ∇D^{c} 相反方向（即晶尖指向）运动的粒子，使方程(9)右边的三项均为正值，从而使此处有最大的增长速度。

2、分形生长的屏蔽效应：相对于新的生长前沿而言，较老的生长区内增长因子 k 极小，且老区内的晶尖既难于获得使 $v\cdot\nabla D^{c}>0$ 的粒子，又因较为封闭而使速度场 v 近于 0，故 $\frac{\partial D^{c}}{\partial t}\to 0$，该区的生长被抑制。

3、分形生长的物理机制：在晶枝的生长过程中，由于某种涨落可能会在晶枝上产生许多突起，这些突起会因避雷针效应而继续生长，形成原晶枝的侧枝，而这些侧枝又可能生出新的更小的侧枝，侧枝的侧枝又会有侧枝，如此下去以至无穷，便形成了一个宏观上具有自相似性的分形结构。人们在实验室中所获得的大量的不同材料的分形结构以及雪花、窗花等自然体系的生长过程皆具有这样的特点，它们是分维场中局部填充维数不断演化的结果。

4、分形结构的对称性问题：在分形结构的形成过程中，当基元（如水分子）本身的对称性破缺可以忽略时，所形成的分形结构就具有较强的对称性。但当基元的对称性破缺起作用时，所形成的分形结构的对称性就较差。例如，我们知道，水分子有较强的各向异性（即对称破缺性），这是导致雪花的对称性较差（只有六重对称性）的根源：尽管基元对基体表面的填充具有随机性——即基元何时、何地被凝固是不确定的，但是，一旦凝固，便具有一种锁钥性：基元与基低（即生长前沿）由于各向异性而使这一过程必须象锁钥一样相互匹配，方可完成填充过程，形成稳定的结构。而各基低的交换对称性（即相似性）与各基元的同一性便造成了各处的相似生长，即分形生长，但总的分形体系的对称性因为各基元的对称性破缺而降低了。

5、非线性自相似凝聚：以上讨论的是单基元的凝聚过程，当有杂质基元存在时，所形成的凝聚态体系的严格的自相似性就会被破坏，出现了非线性的自相似结构。杂质基元的种类越多，其非线性就越强，外观的自相似性就越弱。许多原始生物具有极强的自相似性，就起因于作为基元的各细胞的无差别性，使生物体实际上可被看成是一个单基元凝聚态体系。随着生物的进化，不同的细胞因特化而有差异，从而使高等生物成为一个多基元凝聚态体系，其形态上的自相似性已大大降低，成为一种非线性的自相似体系。

6、大分子体系的形成问题．对于多原子的有机化合物乃至生物大分子等多基元体系的形成过程，原则上应当用(10)式来描述。这些体系的共同特点是，基元与基低的对称破缺以及由此导致的锁钥性更强，并且有不同的基元——基低对存在。这就难于产生无限的分支过程，所以总体上不再具有自相似性。因此，传统的分形理论中整体维数的概念对于这样的体系已不再适用。但是，由于局部维数的引入，使我们仍然可以讨论这种体系的形态及其生长问题。例如，借助于分维场论的观点，有可能使我们能够阐明诸如基因的起源等发生生物学上的重大问题。

需要说明的是，在上述讨论中所涉及的基元的概念是相对的。例如，以细胞为基元时，因其对称性较好，所形成的生物体便具有很明显的自相似性（生物全息律），但细胞本身的构造基元的对称性极差，致使细胞本身不会是一个自相似的分形结构。

多重分形参量和热力学函数[1]

康承华

（福州大学物理系）

摘　要

本文把今年所发展的多重多形(multifractal)参量和热力学函数联系起来，进行了较系统的、较全面的类比，找到了它们间的对应关系，阐明了它们的物理意义。

关键词　　多重分形　　参量　　热力学函数

1、前言

简单分形通常只需用一个维数来描述，但对某些分形现象，如湍流、凝聚生长等，只用一个维数就无法全面刻画其特征，必须用多个维数来表征。对于分形生长，分形界面上的每一点都有一个生长几率，且不同点的生长几率有时差别很大。这表明生长几率的分布具有层次结构，不能简单地用一个维数来描述，而需用无穷多个维数集合来表征之。

用单个分形维数来描述经过了较为复杂的非线性动力学演化过程而形成的结构的缺点在于它过于笼统。在大多数的物理现象中，系统的行为主要取决于某个物理量(如浓度、电势、几率)的空间分布。因此，如果考虑分形体的物理本质，在分形概念所涉及的现象中也存在着某个量的空间分布。多重分形所涉及的问题是某个参量的几率分布。这点和统计物理的正则分布(具有确定的粒子数、体积和温度的系统处在某微观状态上的几率分布)是类似的。据此，可把多重分形参量和热力学·统计物理有关参量进行类比，从而提供研究多重分形的一种较有效的方法。

1986 年以来，有关多重分形理论及其应用报道不少，也建立了多重分形的一些热力学公式。但未见其参量和热力学·统计物理参量的对应关系及有关参量物理意义的报道。笔者结合教学实践试图探讨这些问题。

2、描述多重分形的参量

多重分形描述的是分形几何体在生长过程中不同层次和特征。把所研究的对象分为 N 个小区域，设第 i 个小区域线度大小为 L_i，分形体生长界面小区域的生长几率为 P_i，不同小区域生长几率不同，可用不同标度指数 α_i 来表征。

$$P_i = L_i^{\alpha_i} \quad i = 1,2,3\cdots\cdots N \tag{1}$$

若线度 Li 的大小趋于零，则式(1)化为

$$\alpha = \lim_{L\to 0}\frac{\ln p}{L} \tag{2}$$

式(2)中表明，α 是表征分形体某小区域的分维，称为局部分维。其值大小反映了该小区域生长几率的大小。若实验测出 P 即可求出 α。

多重分形用 α 表示分形体小区域的分维，由于小区域数目很大，于是可得一个由不同 α 所组成的无穷序列构成的谱并用 f(α) 表示之。f(α) 和 α 是描述多重分形的一套参量。

我们也可从信息论的角度选择另一套描述多重分形的参量。

---

1) 福建省自然科学基金资助项目。

把式(1)两边各自乘 q 次方并取和得

$$\sum_{i}^{N} P_i^q = \sum_{i}^{N} (L_i)^{\alpha_i q} - X(q) \quad (3)$$

q 次信息维 Dq 的定义为[1]

$$Dq = \lim_{L\to 0} \frac{1}{q-1} \cdot \frac{\ln X(q)}{\ln L} = D(q) \quad (4)$$

q 和 Dq 就是描述多重分形的另一套参量。这两套参量间的联系为

$$Dq = \frac{1}{q-1}[q\alpha - f(\alpha)] \quad (5)$$

或 $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$ 　其中 $\tau(q) = (q-1)Dq$ (6)

由式(5)知，若已知 α 及其谱 f(α)则可求出 Dq，由式(3)与(4)可见，若实验测出 Pi 也可求得 Dq，若求得 Dq 则 α 可由下式求出

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}\tau(q) = \frac{d}{dq}[(q-1)Dq] \quad (7)$$

再利用式(5)可求出 f(α)

式(5)和(7)是研究多重分形很有用的公式[2]

3、多重分维和广义熵函数

在统计物理中，有玻耳兹曼关系[3]

$$S = K\ln\Omega \quad (8)$$

式中 $K = 1.38\times10^{-23}$ 焦耳/开，称为玻耳兹曼常数。Ω 称为系统的微观状态数。

1988 年柯摩托(Kohmoto)引入了广义熵函数 Q(ε,α)，其定义为[1]

$$Q(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{n}\ln\Omega(\varepsilon,\alpha) \quad (9)$$

式中 n 为大数，ε 是对应线度 Li 的标度指数。$L_i = e^{-\varepsilon n}$，$\Omega(\varepsilon,\alpha)d\varepsilon d\alpha$ 是多重分形指数位于(ε,ε+Qq+dε)和(α,α+dα)内填充球数。f(α)和 Q(ε,α)的联系为

$$f(\alpha) = \lim_{L\to 0} \frac{nQ(\varepsilon,\alpha)}{\ln(\frac{1}{L})} \quad (10)$$

式(10)建立了广义熵函数和多重分维 f(α)的联系。

比较式(9)和(10)可知，若 Ω(ε,α)越大，f(α)也越大。这说明研究对象越粗糙、越复杂，越不规则，越不均匀。因此 f(α)的物理意义是研究对象不均匀程度、复杂程度、粗糙程度，不规则程度的度量。

信息维 D_1 和信息熵 S_H 的联系为[4]

$$D_1 = \lim_{L\to 0} \frac{\ln S_H/C}{\ln(\frac{1}{L})} \quad (11)$$

式中 C 为常数，L 为线度(测量码尺)。

比较式(10)和(11)可知，D_1 和 f(α)对应，S_H 和 Q(ε,α)相对应。信息熵 S_H 是统计物理熵 S 的推广，而统计物理熵 S 是信息熵 S_H 的特例[5]。因此称 Q(ε,α)为广义熵函数是很合适的。

比较式(10)和(11)还可知，D_1 是 f(α)的特例。事实上。由式(5)可知，q=0 时，$D_q = D_0 = f(\alpha)$，若 q=1 时，f(α)=α 的值 D_1，因此多重分维 f(α)是简单分维 D_0 和 D_1 的推广。D_0 和 D_1 是f(α)的特例。

由式(10)可知，多重分形理论中的 $f(\alpha)$ 是相应"熵"的量。因为广义熵函数 $Q(\varepsilon,\alpha)$ 是热力学熵(或统计物理熵)的推广。

4、q 次信息维和广义自由能

$f(\alpha)$ 和广义熵函数 $Q(\varepsilon,\alpha)$ 相对应。下面将看到 q 次信息维(又称广义维) D_q 和广义自由能 $G(q)$ 相对应。

在统计物理中，计算配分函数是非常重要的。若已知配分函数，所有重要热力学量均可求得。正则分布的配分函数 Z 和自由能 F 的联系为

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z \tag{12}$$

式中 $\beta = \frac{1}{KT}$(K、T 分别为玻耳兹曼常数，热力学温度)。

在多重分形理论中，定义配分函数 $X(q) = \sum_i P_i^q$，定义广义自由能 $G(q)$ 为[1,6,7]

$$G(q) = -\frac{1}{nq}\ln X(q) \tag{13}$$

利用式(4)、(6)与(13)可得

$$\tau(q) = D_q(q-1) = \lim_{L\to 0}\frac{nqG(q)}{\ln(\frac{1}{L})} \tag{14}$$

式(14)表明，$\tau(q)$ 或 D_q 和广义自由能有联系。

在热力学、统计物理中最基本的热力学函数是内能 U，熵 S，以及物态方程。但引入辅助热力学函数(如焓，自由能)后，对解决某些问题尤为方便。同样，在多重分形理论中，由于 D_q 包含了分形理论所涉及的全部维数。同时由于 D_q 容易测量，若测得了 D_q 值，就可通过式(7)得到 $\alpha(q)$，进而由式(5)来得 $f(\alpha)$。因此多重分形理论中，某些问题使用 q 与 D_q 来描述也是方便的[8]。

5、多重分形参量 α，q 和正则系统能量 ε_s，温度 β。

在多重分形理论中，利用式(1)及配分函数 $X(q)$ 的定义可得

$$X(q) = \sum P_i^q = \sum_i [(\frac{1}{L_i})^{-\alpha}]^q \tag{15}$$

在统计物理中，正则分布的配分函数 Z 的定义为

$$Z = \sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = \sum_s (e^{-\varepsilon_s})^{\beta} \tag{16}$$

式中 $\beta = \frac{1}{KT}$，ε_s 为正则系统处于第 S 状态的能量。

比较式(15)与(16)可知，多重分形参量 α(标度指数)和正则系统的能量 ε_s 相对应。多重分形的参量 q 和正则系统的 β 相对应。又据式(12)与(13)，确切地说，β 应和 nq 相对应。再据式(8)与(9)，可见 n 与 $\frac{1}{K}$ 对应，因此 q 应和温度 T 的倒数相对应。

的确，在多重分形理论中，一维映象的内能 $U(q)$ 可表为

$$U(q) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial\ln Zn(q,g)}{\partial nq} \tag{17}$$

式中 g 为一维映象 $X_{n+1} = g(X_n)$ 的函数参量。Zn 为配分函数。

在统计物理中，正则系统内能 $U(\beta)$ 表为

$$U(\beta)=-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \tag{18}$$

式中 $\beta=\frac{1}{KT}$,Z 为正则系统的配分函数。

比较式(17)与(18),nq 确和 β 相对应。

6、f(α)突变和一级相变(熵突变)

在热力学中,一级相变的特征是:相变时两相的化学势连续,但化学势的一级偏导数不连续(突变)。即在某一临界温度 Tc 处,熵 S 有突变。

在多重分形理论中,所谓相变是指系统发展到一定程度后,f(α)不连续。此时有一临界值 q_c。对一维映象,在 $q_c=1$ 处有[9]

$$f[\alpha(q)]=\begin{cases}1 & q<1\\ 0 & q>1\end{cases} \tag{19}$$

式(19)说明在 $q_c=1$ 处,f(α)有突变。据式(10)说明广义熵函数 Q(ε,α)也有突变。这种情况和热力学中熵突变是类似的。这就是多重分形理论中的一级相变。

7、结论:

(1)多重分形理论的参量和热力学·统计物理参量有对应关系。

(2)把多重分形理论与热力学·统计物理进行热力学类比,可对多重分形的参量物理意义较深刻的理解与体会。

(3)对多重分形进行热力学类比,为进一步分析分形体的特征提供新的途径。

参 考 文 献

(1)M. Kohmoto, phys. Rev. A37, 1988, 1345

(2)R. Rafael, et al. phys. Rev. 43A(2), 1991, 669

(3)汪志诚,热力学·统计物理,高等教育出版社,北京,1980,289

(4)康承华,科学通报,37(1992),20:1851

(5)康承华,物理,21(1992),4:244

(6)黄立基,科学,42(1990),3:198

(7)黄立基,物理学进展,11(1991),3:269~330

(8)T. C. Halsey et al., phys. Rev. A33 (1986), 1141~1151

(9)A. Csordas et al., phys. Rev. A39 (1989), 4770

分形子与无序系统的物理性能

沈中城　　华人炎　　邓乘风
（苏州职业大学）　　（苏州铁道师范学院）

一、分形固体的振动：分形子的引入

我们考虑无序体系（分形结构固体），在长度 l 范围内为自相似的，l 处在它们的粒子（或分子）大小 a 和它们的相关长度 ξ 之间，$a<l<\xi$。超出 ξ，固体是均匀的。典型地，在实际固体里，比 ξ/a 最多是 $\sim 10^4$，由于热振动与引力稳定性所施加影响。长波声学振动，波长 $\lambda>\xi$，波矢 $q=\frac{2\pi}{\lambda}$，速度 $v=\omega/q$，声学声子，态密度 $N_{ph}(\omega)\sim\omega^{d-1}$，d 是嵌入空间的欧几里德维数。平面波激发是被固体的不均匀而散射。假如 ω 是充分高，这成为增宽的主要机制，引导出一个弹性线宽度 $\Gamma\alpha\omega^4$ 或散射长度 $l_{scat}\alpha\omega^{-4}$。因此，平面波不是振动的本征模。后者是安德森意义的局域态，具有局域长度 $l_{loc}>l\ scat$。

当 ω 是连续地增长，一旦达到渡越（crossover）频率 ω_{co1}，此处 $q\xi=1$。这一点上，人们希望此波也变得很强烈地散射，具有 $ql\ scat\simeq1$。这后一条件相应于所谓 Ioffe－Regel 极限，进入一个具有 $\Gamma\sim\omega$ 的新状态。在这点附近或超出这一点，有关振动的所有长度标度是期望归结为一个，$ql_{loc}\simeq ql_{scat}\sim ql=1$。此处 l 是测出激发的空间范围。这些激发已称为分形子（fracton）。它们的态密度假设以 ω 标度，$N_{fr}(\omega)\ \alpha\omega^{\bar{d}-1}$。这里 $\bar{d}$ 是称为谱维，不同于 D（分形的 Hausdorff 维数）$\bar{d}<D$。尺度范围 l 关系到分形子频率 ω，由 $\omega\alpha l^{-D/\bar{d}}$。分形子是强烈地局域化的本征模。当频率进一步增加，第二个渡越在 ω_{co2}发生，标志分形子范围的结束。$\omega_{co2}\simeq\omega_{co}\ (\xi/a)^{D/\bar{d}}$。

分形结构的振动性质可由频率 ω 来表征。利用模式特征长度 λ 来建立色散关系 $\omega=\omega(\lambda)$，在 $\lambda\gg\xi$ 和 $\lambda\ll\xi$ 之间有一个从均匀色散关系到分形色散关系的渡越。分形结构上振动激发从长波长（低频）声子到短波长（高频）分形子之间渡越的概念首先由 Alexander 和 Orbach 提出[1]。

二、分形子的实验观察

自从 Alexander 和 Orbach 提出无序系统振动态强烈局域化（称为分形子），那末如何从实验上来观察验证？

1985 年加拿大 Queen 大学 M·C·Maliepaard[2] 等做了烧结铜粉末要在低温超声衰减测量，发现对于长波长端，超声衰减是低的，振动模是用声子来描述，以比块状金属“软”声子速度来传播。他们发现：当波长变短时，超声信号通过烧结体突然减少。后来，J·H·Page 等改进实验装置，采用相不灵敏传感器来作多孔铜粉末烧结体的超声衰减随频率变化的实验研究，得到衰减对超声频率反常幂规律依赖关系，与由渗流体系激发谱理论预言定量地可比较[3-5]。观察到渗流相关长度的三倍的因子内，在长度上局域化开始这是作为声子——分形子渡越。在渡越频率处，粉末烧结体的振动态密度有一突变，不是金属块状里普通声子吸收机制，而是由于强烈局域化的分形子的吸收。具体机制，作者之一另有文章详细讨论。

在无序稀反铁磁体 $Mn_xZn_{1-x}F_2$ 的实验，稀磁反铁磁体形成最完美的渗流网络，振动激发是局域化磁振子。R·A·Cowley 和合作者特别做了这方面的工作。磁性原子 Mn 随机地替代非磁性原子 Zn，使得系统联系于 bcc 上的格点渗流问题。实验是在 T＝5k 时对（$Mn_{0.5}Zn_{0.5}$）

F_2单晶进行高分辨非弹性中子散射研究，已揭示自旋波在区域中心相当尖锐。实验结果表明存在磁振子——分形子渡越。

T·Freltoft 等在经过羟基化处理的二氧化硅颗粒形成的烟粒聚集体上进行冷中子非弹性非相干散射实验第一次直接观察到分形子态密度[6]，反映出从德拜型谱 N (ω) αω² 的显著偏离，并得到 $\bar{d}$=1.8 和 2.1。这些都大于4/3的理论值。应该指出的是，与前面提到的非晶材料不同，这种二氧化硅颗粒聚集体样品确实具有分形结构，其分维由小角中子射散确定，D=2.16±0.1。

凝胶里分形子的观察：1987年以来，瑞士 E·Courtens、E·Stoll 和法国 Rene Vacher[7]等致力于研究分形结构业已清楚地表征了硅气凝胶（silicaaerogel）。用可见光的 Brillouin 散射，在实验上第一次测得分形子色散曲线，$\omega \alpha q^{D/\bar{d}}$，q 为波矢。下面以中性反应制备的材料为研究对象。中性反应制备的凝胶具有 2πξ≈0.3μm。用可见光的布里渊散射来研究，所得曲线见图1 [8]。我们注意到所有点聚集在曲线 $\omega \alpha q^{D/\bar{d}}$ 上。从曲线可知 $D_{ac}/\bar{d}$=1.9。此处 Dac 是声学分形维，相对于连通性而不是对质量。渡越波矢 q_{co} 等于 1/ξac，此处 ξac 是一个声学关联长度。从布里渊谱数据，可得声学值是 D_{ac}=2.46±0.03，人们推出 $\bar{d}$=1.3±0.1。这个值碰巧接近于弹性标度预言 $\bar{d}$=4/3。

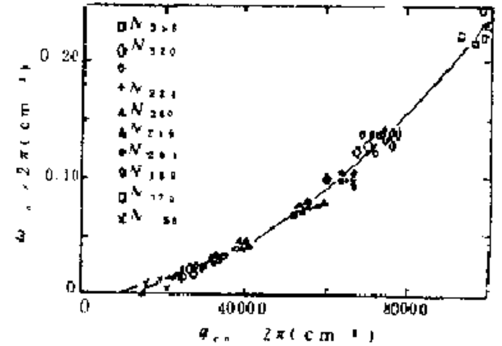
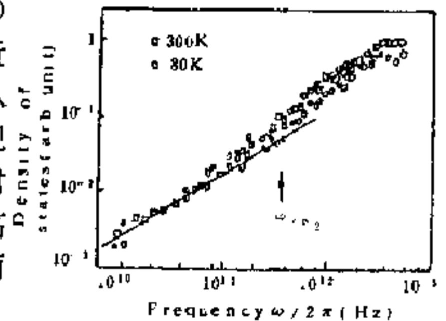


图1 在自相似凝胶样品进行布里渊散射测量获得 ω_{co} 对 q_{co} 的关系图

用飞行时间分光计（time－of－flight spectrometer）测量揭示状态密度几乎不依赖於测量温度的情况。最近用更加精确的分辨测量用不同方法制备的试样，已确认一个更广的分形子的区域。在分形子范围，观察到幂规律，它有一个斜率 $\bar{d}$－1=0.85，而不是 0.3。这反映了材料不同的微结构。人们预料小聚团的更大相对密度，在高频模产生一个更大的有效 $\bar{d}$。因此，$\bar{d}$ 不是普遍的维，而是附加一个分形微结构灵敏的量。



三、分形子动力学理论

1、分形子激发和散射结构因子 S (q, ω)：

我们讨论硅气凝胶和稀反铁磁体 $Mn_xZn_{1-x}F_2$，在比特征长度 ξ 更短的长度标度上显示自相似的几何特性。在这范围质量密度是依赖于长度标度，变化如

$$\rho(r)=M(r)/V(r)=Br^D/cr^d \alpha r^{D-d} \quad (1)$$

这里 D 是分形维和 d 是嵌入欧几里德维数。对于比 ξ 更大长度标度，几何渡越到欧几里德，具有 ρ(r) 常数。对于渗流网络，ξ 依赖於点（或键）占有率的浓度 P：$\xi \sim a/(p-p_c)^\nu$，此处 ν=4/3 (d=2) 和 ν≃0.88 (d=3)，和 Pc 是临界渗流浓度。对于硅气凝胶，不确定是渗流网络，ξ 能由改变微观试样密度而在很广范围内变化。按照 Rammal 和 Toulouse[10]同样的标度

分析、激发频率随波矢的变化如

$$\omega(q) - J(1/q)\ q\alpha q^{\theta/2} = q^{D/\bar{d}},\ r<\omega \tag{2}$$

此处我们引入分形子维 $\bar{d}=2D/(2+\theta)$。对于 $r>\xi$（$\theta=0$ 对于 $r>\xi$）相等的。

在单个长度标度的条件下，分形子线宽度 $\Gamma=1/\tau(\omega)$ 特点如

$$\Gamma=1/\tau(\omega)\ \alpha\omega^{d+1}/\omega_c^d,\quad \omega\leqslant\omega_c \tag{3}$$

$$\alpha\omega,\quad \omega\geqslant\omega_c$$

利用一个有效声速 $C(\omega)$，Courtens 等已导出了振动激发的平滑唯象形式：

$$C(\omega) - Co\left[1+(\omega/\omega_0)^m\right]^{Z/m} \tag{4a}$$

$$\Gamma(\omega) - \frac{\omega^4}{\omega_c^3}\ \frac{1}{\left[1+(\omega/\omega_c)^m\right]^{3/m}} \tag{4b}$$

这里，指数 m 表征渡越的锐度，Z 是由下面式 $C(\omega)-\omega^Z$ 定义，在 $\omega>\omega_c$，$Z-1\ \ \bar{d}/D$。(4) 式的对称性能用来获得散射结构因子，在从全频率范围通过（Phonon，magnon）-分形子渡越区域。Aharony et al[1]，已经获得分形子 $S(q,\omega)$，定义 $\omega_x-\max\{\omega_c, q^{D/\bar{d}}\}$，$S_f(q,\omega)$ 的渐近行为：

$$S_f(q,\omega)\ \alpha\omega,\quad \omega\ll\omega_x \tag{5}$$

$$\alpha 1/\omega^3,\quad \omega\gg\omega_x$$

进一步的研究，通过有效媒质近似获得散射结构因子如下：

$$S_{vib}(q,\omega) = \frac{C(\omega)\ q}{\omega^2}\left(\frac{\tau^{-1}(\omega)}{[\omega-C(\omega)\ q]^2+\tau^{-2}(\omega)}\ \ \frac{\tau^{-1}(\omega)}{[\omega+C(\omega)\ q]^2+\tau^{-2}(\omega)}\right)$$

$$S_{mag}(q,\omega) = \frac{C(\omega)\ q^2}{\omega}\left(\frac{\tau^{-1}(\omega)}{[\omega-C(\omega)\ q]^2+\tau^{-2}(\omega)}+\frac{\tau^{-1}(\omega)}{[\omega+C(\omega)\ q]^2+\tau^{-2}(\omega)}\right) \tag{6}$$

2、分形子波函数

动力学计算要求分形子波函数的特殊形式，已经使用超局域形式来计算在分形网络里局域化动量弛豫和网络非谐效应的特别求值。Williams 和 Maris[12] 的算法已经使 Nakayama 等求解 $N>10^5$ 个原子构成的点渗流网络的体系本征函数，这些原子两个最近邻原子以线性弹簧联接，原子具有单位质量。原子的运动方程是

$$\ddot{u}_i(t) + \Sigma K_{ij} U_j(t) = 0 \tag{7}$$

此处 U_i 是在第 i 点原子的标量位移，力常数 K_{ij}，假如 i 或 j 是不耦合，$K_{ij}=0$；而其它 $K_{ij}-1$。对角元素满足关系 $K_{ii}=-Z_i$，此处 Z_i 位置 i 的坐标数。

我们已经得到分形子波函数

$$\varnothing_f(r) \sim \exp\{-[r/\Lambda(\omega)]^{d_\varnothing}\} \tag{8}$$

此处 $\Lambda(\omega)\sim q^{-1}(\omega)$，$\Lambda(\omega)$ 等同于局域长度。是 ω 的函数，$\Lambda(\omega)\sim\omega^{-\lambda}$，$\lambda=0.71$。$\Lambda(\omega)\ \alpha\omega^{-\bar{d}/D}$，$\bar{d}/D-0.705$。$d_\varnothing$ 称为超局域指数（也有称为第四个维数），用以决定局域分形子波函数的范围。

3、单个分形子发射而引起的弛豫与衰减

由单个局域振动量子（一个分形子）的发射而局域化产生的衰减。局域化的主要效应是弛豫时间分布图。与一个振动的动态相互作用是正比于局域应变（∇u）。分形子能量宽度 δ_L，起源於通过振动非谐耦合或通过电子—分形子相互作用本身。非谐部分贡献给能量宽度起因于两个主要渠道：

分形子+声子→分形子

和分形子→声子+声子

Cantor 集分形结构上的振动态和电子态特征*

辛厚文　廖结楼　周　沛　谭　强

(中国科学技术大学　近代化学)

按 A→ABA，B→BBB 规则，可生成二元非周期 Cantor 集点阵：

n=0　　A

n=1　　ABA　　(1)

n=2　　ABABBBABA

:

(其中 n 为生成次数) 具有一维 Cantor 集分形结构，可以用来作为一维非晶材料的模型。[1]

考虑到 A、B 质量 m_A、m_B 的不同，从而我们可计算点阵(1)的振动性质；如设 A 原子势场为 V_a，B 原子势场为 V_b，就可得到具有空间 Cantor 集分形特征的势场分布，因而可得到其电子谱特征。

本文用 Dean 方法[2]和转移矩阵方法[3]计算了点阵 (1) 的振动和电子的态密度，波函数以及延展态能谱，得到其振动谱和电子谱的特征，并简单地讨论了热的输运性质。

一、Cantor 集分形结构的振动态密度与振动波函数

1. Cantor 集分形结构的振动态密度

对于点阵 (1)，只考虑谐振近似和最近邻相互作用，可得到其振动方程：

$$(2B-m_i\omega^2)U_i^0-B(U_{i+1}^0+U_{i-1}^0)=0 \qquad (2)$$

其中，B 是相邻原子的力常数，假设其为一常数，m_i 为第 i 个格点原子质量，U_i 为第 i 个格点横波振幅，ω^2 是其圆频率。

对于 (2) 式可写成两种形式：

(1) 无穷大三对角矩阵形式

* 国家自然科学基金资助项目

$$\begin{bmatrix} \frac{B}{m_1} & \frac{B}{m_1} & & & \\ -\frac{B}{m_2} & \frac{2B}{m_2} & \frac{B_2}{m_2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & \frac{B}{m_{n-1}} & \frac{2B}{m_{n-1}} & \frac{B}{m_{n-1}} \\ & & & \frac{B}{m_n} & \frac{B}{m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \vdots \\ U_{n-1}^0 \\ U_n^0 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \vdots \\ U_{n-1}^0 \\ U_n^0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

(2) 转移矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} U_{i+1}^0 \\ U_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{m_i}{B}\omega^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^0 \\ U_{i-1}^0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

对于形式 (3)，我们用 Dean 方法求得其振动态密度（如 Fig1a～Fig1c 所示）。（取 $m_a=10000$，$m_b=10$，$B=10$）

Fig1a～Fig1b，Fig1c 分别给出 n=3，5，7 时振动态密度图，从图可见，随着 n 的增加，带隙（gaps）数目增加。

Fig1d 将 n=5 时局部态密度放大，出现与整体自相似的特征，Fig1e 是 n=5 时的积分态密度，具有"魔鬼阶梯结构"，从而进一步地证明了这种自相似的存在性。

作为对比，Fig1f，Fig1g 分别给出周期体系和无序体系的态密度图。周期体系的态密度是连续的，而无序体系其分立态密度紊乱无分形结构，因而两者都可以与 Cantor 集分形结构的态密度区分开来。

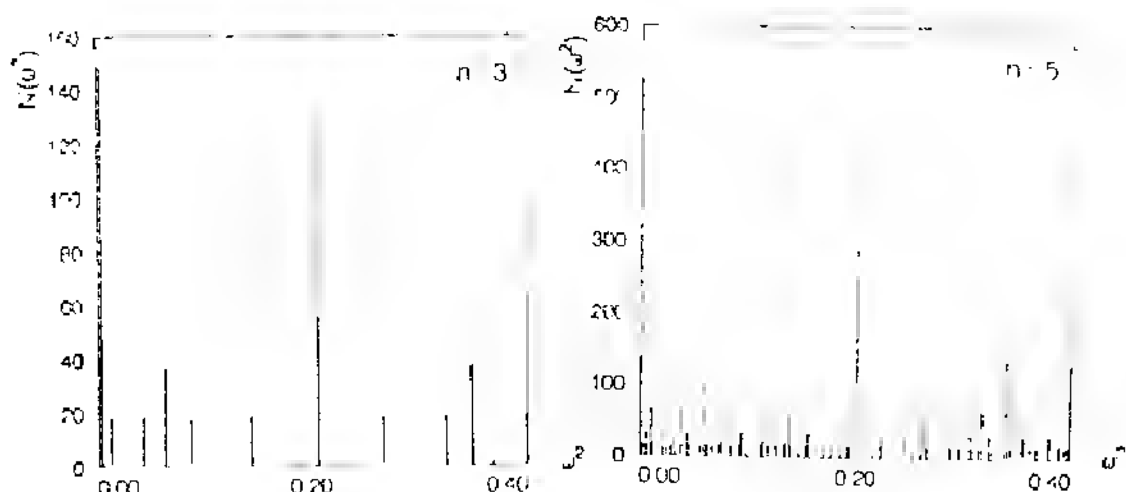


Fig1a Density of vibrational states $N(\omega^2)$ Vs frequency (ω^2) for Cantor Set

Fig1b Density of vibrational states $N(\omega^2)$ Vs frequency (ω^2) for Cantor Set

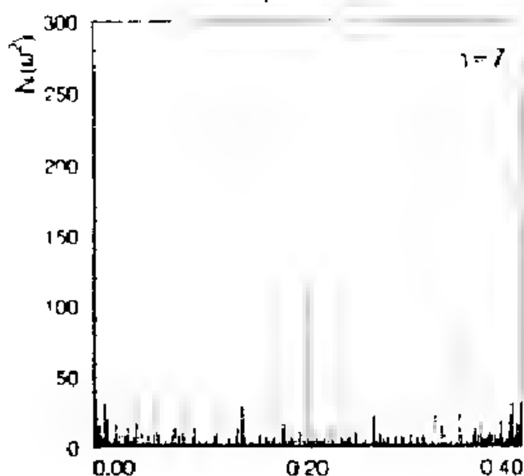


Fig 1c: Density of vibrational states $N(\omega^2)$ vs frequency(ω) for Cantor Set

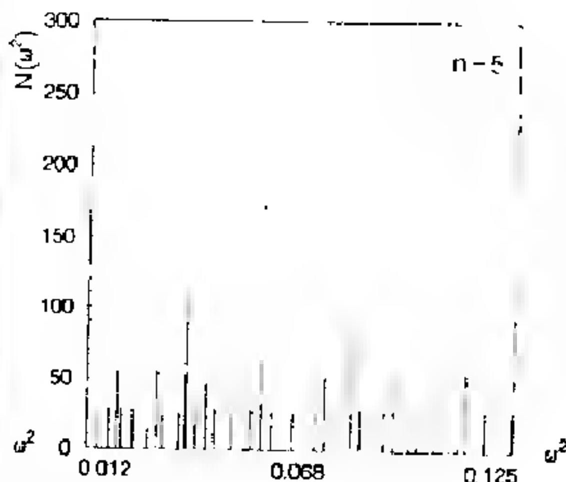


Fig 1d: Local enlargement of Fig 1b (from ω^2 = 0.012 to 0.125)

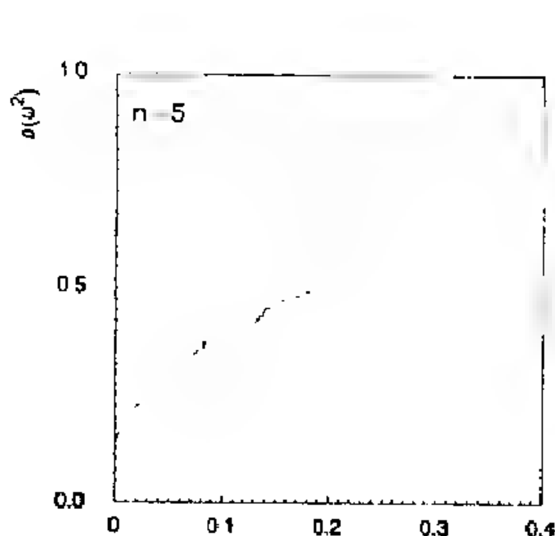


Fig 1e: Integral density of vibrational states $\rho(\omega^2)$ vs frequency(ω^2) for Cantor Set

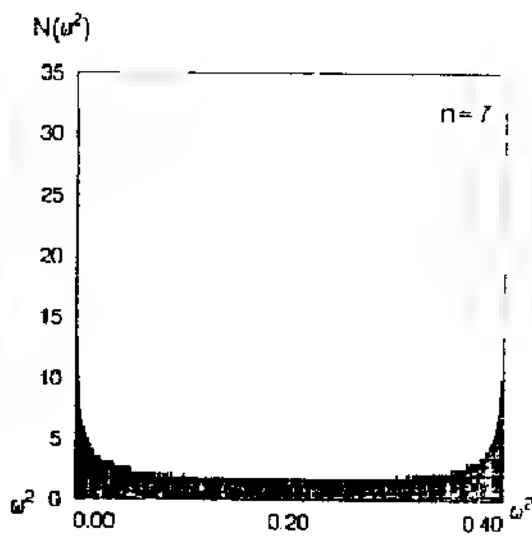


Fig 1f Density of vibrational states $N(\omega^2)$ vs frequency(ω^2) for Periodic System

Cantor 集分形结构的态密度从总的看来由两部分组成：高频分立部分与低频延展部分，从延展态振动能谱和振动波函数的研究可以证明这一点。Fig1h 给出 n=5 时，低频态密度分布。由此可见，延展态其仍存在带隙，表明延展态与局域态共存。

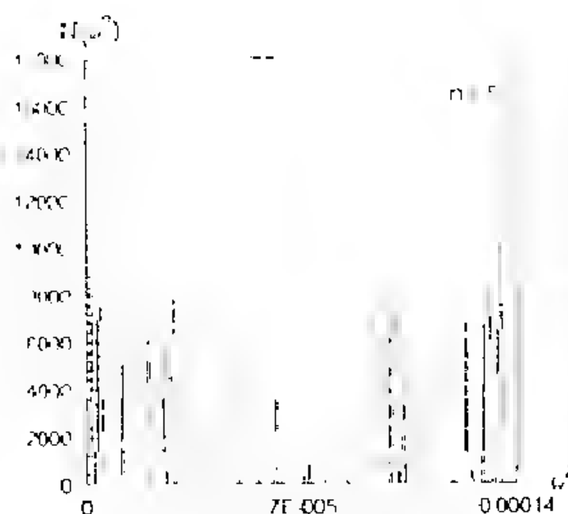


Fig 1h Density of vibrational states $N(\omega^2)$ vs frequency (ω^2) for Cantor Set (low frequency)

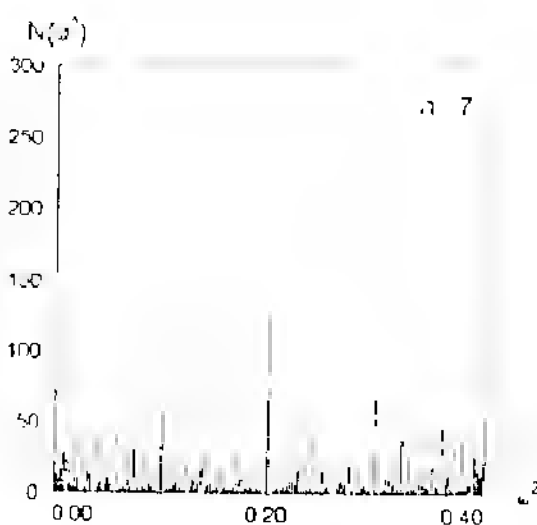


Fig 1g Density of vibrational states $N(\omega^2)$ vs frequency(ω^2) for Random System

2 Cantor 集分形结构的延展态能谱与延展态本征波函数

我们用转移矩阵方法来求点阵（1）的延展态能谱和振动振幅分布。

由（2），（4）可得：

$$\begin{bmatrix} U^0_{i+1} \\ U^0_i \end{bmatrix} = M^i M_{i-1} \cdots M_2 M_1 \begin{bmatrix} U^0_1 \\ U^0_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中转移矩阵M_i有两类形式：

对应于A有 $$M_A = \begin{bmatrix} 2 - \frac{m_a}{B} & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

对应于B有 $$M_B = \begin{bmatrix} 2 - \frac{m_b}{B}\omega^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

这样由初始条件$\begin{bmatrix} U^0_1 \\ U^0_0 \end{bmatrix}$以及转移矩阵就可求得任一位置的振动情形。

为了求得体系的振动能谱，要求随$n \to \infty$，振动本征函数ψ_n有界，因而必须满足

$$|trM_{An}| \leqslant 2 \tag{6}$$

的条件，其中$M_{An} = M_i M_{i-1} \cdots M_2 M_1$

由（6）式给出了延展态出现的上下界为：

$$0 \leqslant \omega^2 < 4B/M \tag{7}$$

其中，取 B = 10，M = 10000。

进一步的计算结果如下图 Fig2a–Fig2f 所示。

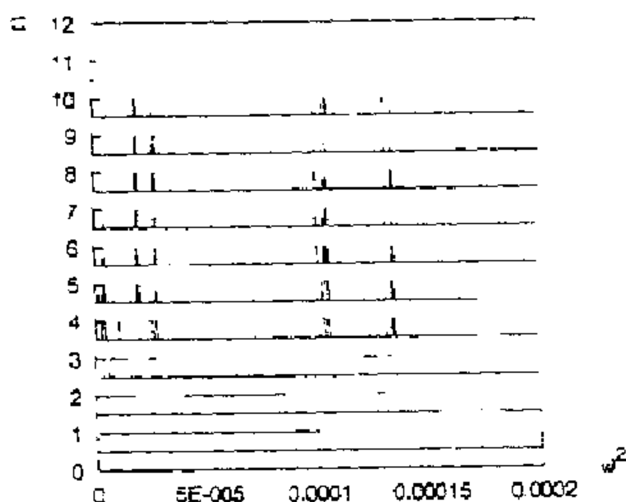


Fig 2a Vibrational spectrum of cantor set for different iteration

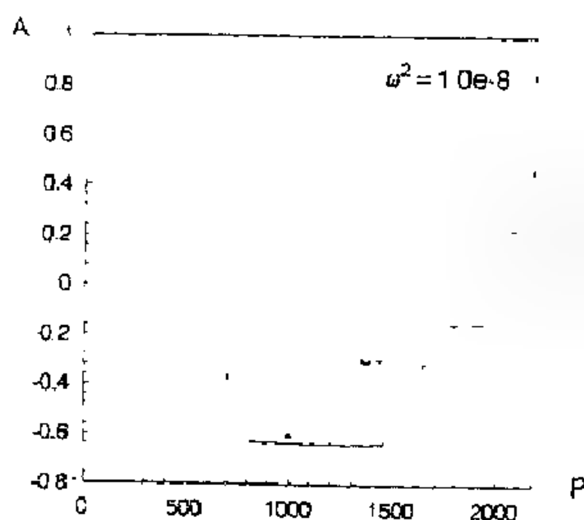


Fig 2b: Amplitude of vibrational wave functions A vs positions of atoms P on Cantor Set

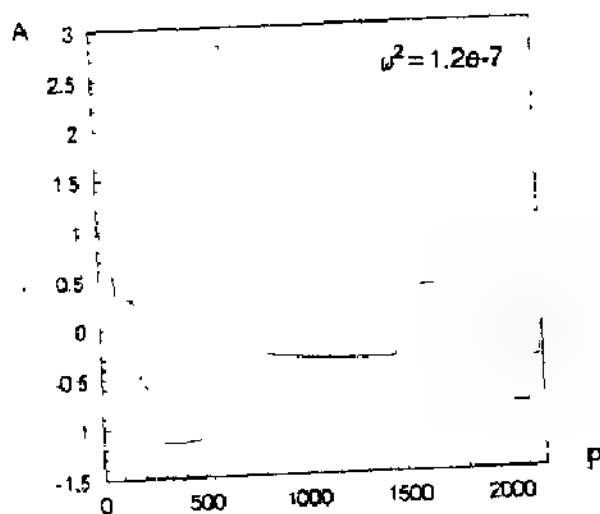


Fig 2c: Amplitude of vibrational wave functions A vs positions of atoms P on Cantor Set

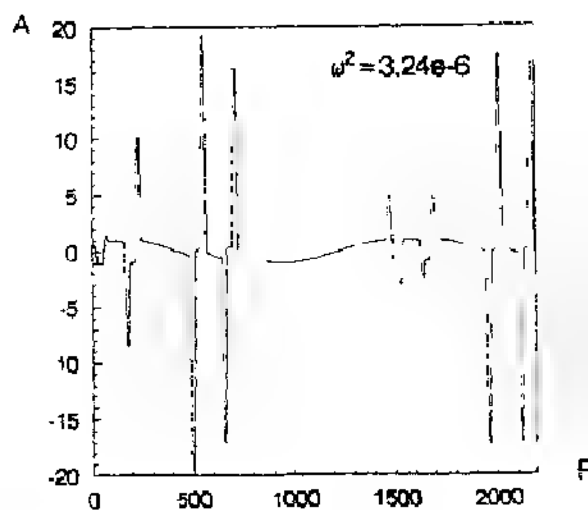
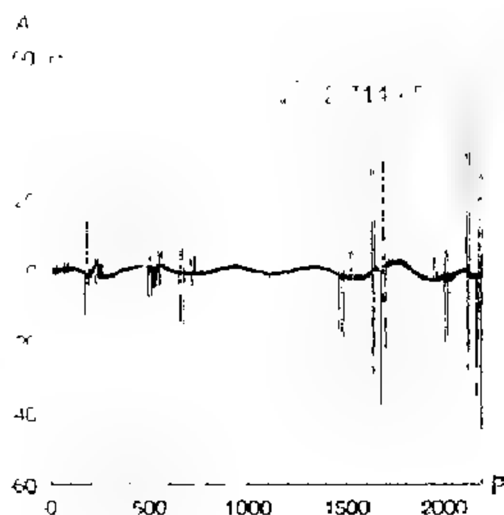
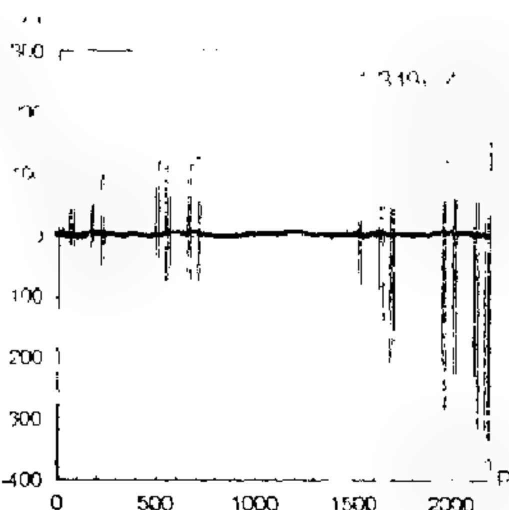


Fig 2d: Amplitude of vibrational wave functions A vs positions of atoms P on Cantor Set

Fig2a 给出随 n 变化延展态振动能谱分布图，由图可见，当 n>3 时，延展态只分布在 $\omega^2<1.35\times10^{-4}$ 以内。

Fig2b～Fig2f，给出 n=5 时，不同频率下，振幅分布图。从 Fig2b，Fig2c 可见，体系处于延展态；从 Fig2d～Fig2f 可知，杂原子 A 逐渐局域化，而主原子 B 仍是延展的，只是到 $\omega^2-1.349\times10^{-4}$ 时，其延展态振幅极其微弱，几近于 0，这与由 Fig2a 得到的结论一致。


Fig 2e Amplitude of vibrational wave functions
A vs positions of atoms P on Cantor Set


Fig 2f Amplitude of vibrational wave functions
A vs positions of atoms P on Cantor Set

综上所述，我们可得到 Cantor 集分形结构上的振动态特征:

(1) 振动态分延展态（声子区）和局域态（分形子区）两部分．针对本文所给体系，其渡越频率为 $\omega_c \approx 1.350\times10^{-4}$．

(2) 在高频区（分形子区），态密度为分立状态，具有自相似分形结构特征．

二、Cantor 集分形结构电子态密度及其波函数特征

1. Cantor 集分形结构的电子态密度分布

对于具有一维 Cantor 集势分布（形如点阵（1））的分形结构，在 B-O 近似，单电子近似以及紧束缚近似下，只考虑第一近邻相互作用，可写出其 Hamilton 量为:

$$H=\sum_i |i>E_i<i|+\sum_{ij} V_{ij}|i><j| \tag{8}$$

$$\text{其中，}H_{ii}=E_i \quad H_{ij}=V_{ij}=\begin{cases}V_{ij} & ij\text{为第一近邻其他}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{9}$$

$$\text{本征方程为：}\quad \sum_i C_i(H_{ij}-E\delta_{ij})=0 \tag{10}$$

同样地，对（10）用 Dean 方法求得其态密度分布图．（如 Fig3a–Fig3d 所示）(取 $E_a=0.5$、$E_b=1.0$，$V_a=-0.5$，$V_b=1.0$)

Fig3a、Fig3b 分别给出 n＝5，7 时电子态密度分布图．由图可知、在 |E−0.5|＞1 区域，为局域态．由于高度简并，使得 n＝5，7 两者之间在局域态区差别不大；从 Fig3c 可见，当 |E−0.5|＜1 时，为延展态区（中间有分立态），从下面波函数的讨论中可证实这一点．由 Fig3d 可知，在局域态区，其电子积分态密度有"魔鬼阶梯"结构，表明在此区电子态密度呈分形分布特征．

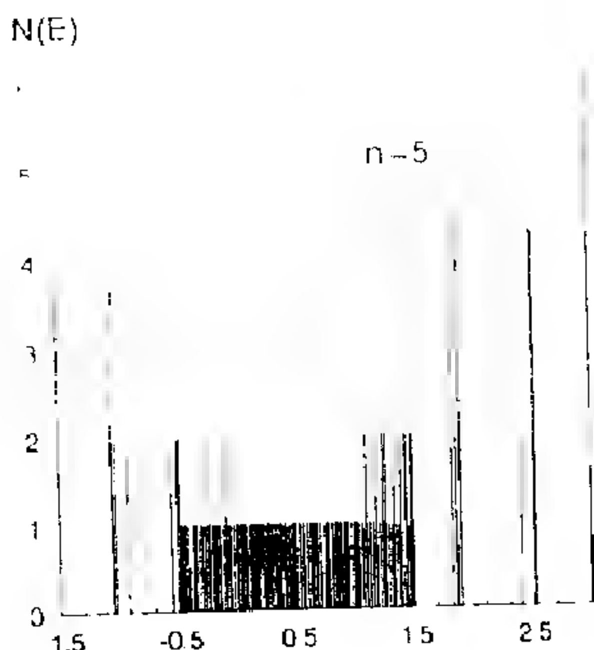


Fig3a Density of electronic states N Vs energy E for Cantor Set with n=5

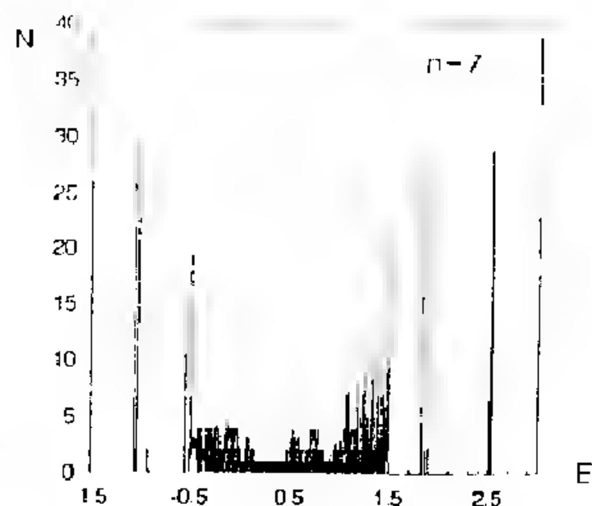


Fig3b Density of electronic states N Vs energy E for Cantor Set with n=7

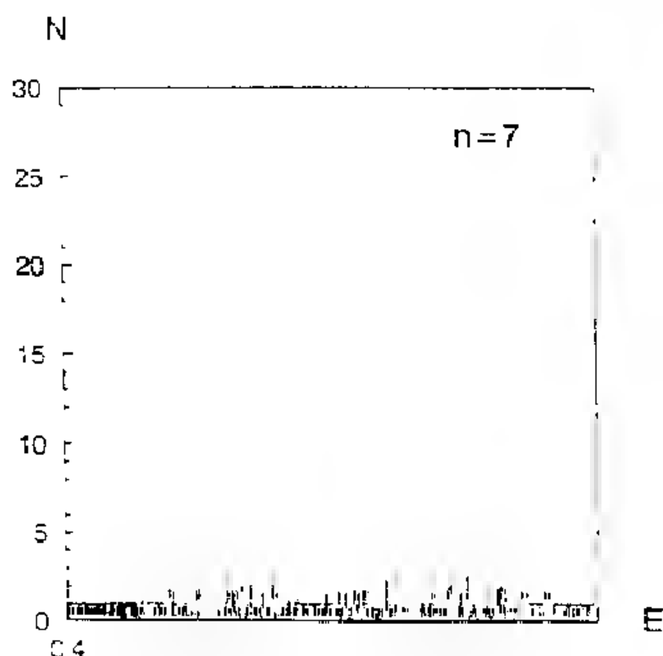


Fig3c Elargements of Fig 3b with E from -0.5 to 1.5

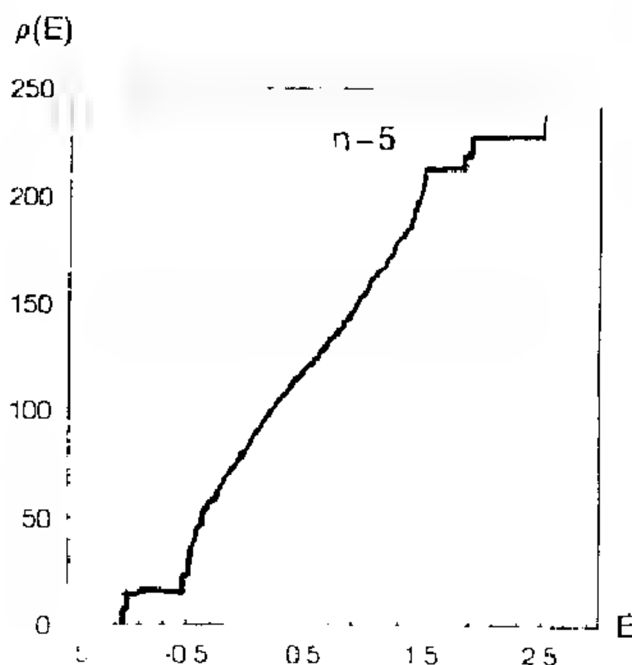


Fig3d Integral density of electronic states for Cantor Set with n=5

2 Cantor 集分形结构的电子波函数

令波函数 $\psi(r) = \sum_i C_i |i>$ (11)

代入方程(8)，得到本征方程(10)，从而可求得第 i 格点原子波函数|i>的几率幅 C_i（详细算法见[4]），我们取 E = 0.000，−0.490，−0.499，−1.055，(n = 5)，算得各自本征波函数见 Fig4a～Fig4d.

从 Fig4a 可见 E = 0 的本征波函数为延展态，接近 E = −0.50 时，波函数渐渐衰减（见 Fig4b～Fig4c），一旦越过 E = −0.50 波函数便完全局域化（见 Fig4d）。由对称性知，E 朝着另一个方向（E = 0→1.5）变化也可得到同样结果。因而，从波函数变化可判定 E = 1.5，−0.5 是由延展态|E−0.5| < 1.0 向分立态|E−0.5| > 1.0 的临界转变能量.

综上所述，Cantor 集分形结构的电子态密度存在着从延展态向局域态渡越，针对文中体系从临界能量 E_c = −0.5，1.5；在分立区，电子态密度具分形（Cantor 集）分布特征.

三．低频区振动态密度的重正化处理

考虑 $m_b = 0$ 的极限情况下，点阵（1）在 $\omega^2 \to 0$ 时的振动情形，此时，振动态密度呈连续分布.

采用近邻相互作用，有：

$$\lambda U_i = \sum_l (U_i - U_l) \tag{12}$$

其中 $\lambda = \frac{m_a}{K_{il}}$，$K_{il}$ 为近邻 il 间的力常数，U_i 第 i 格点的振幅，（设 $U_l = Xil$，见 Fig5）.

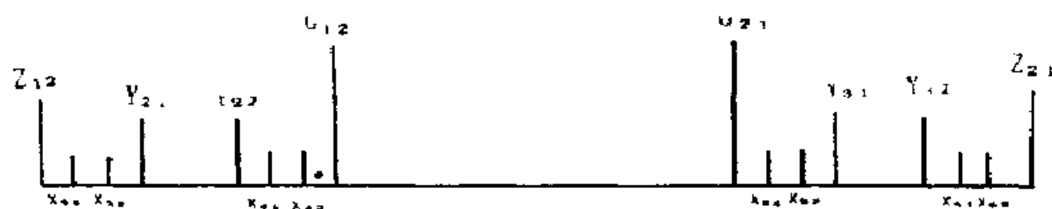


Fig5 coordinates of local Cantor Set lattice

有如下结果：

$$\begin{cases} \lambda X_{31} = 2X_{31} - Z_{12} - X_{32} \\ \lambda X_{32} = 2X_{32} - X_{31} - Y_{21} \end{cases} \tag{13}$$

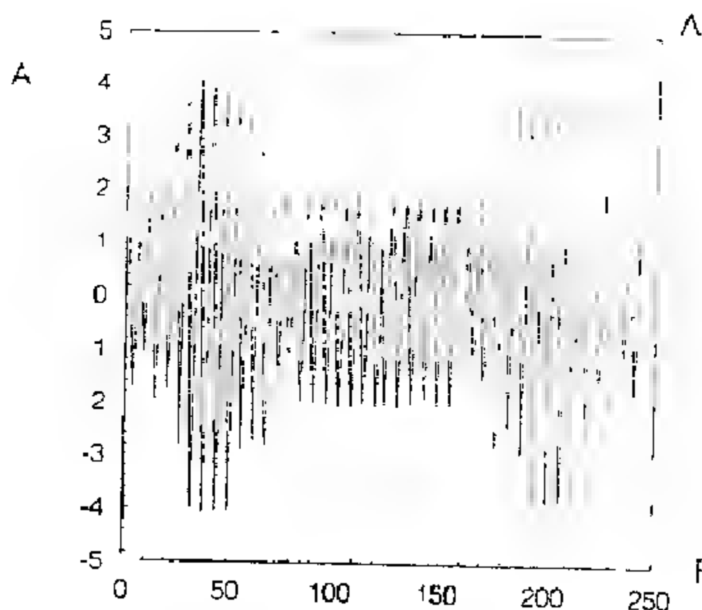


Fig4a Amplitude of electronic wave function A Vs positions of atoms P for Cantor Set with n=5 and E=0.000

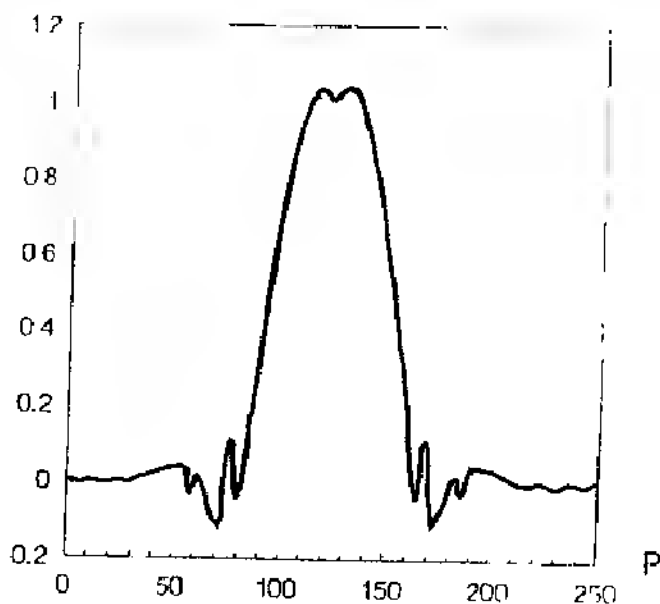


Fig4b Amplitude of electronic wave function A Vs positions of atoms P for Cantor Se with n=5 and E=-0.490

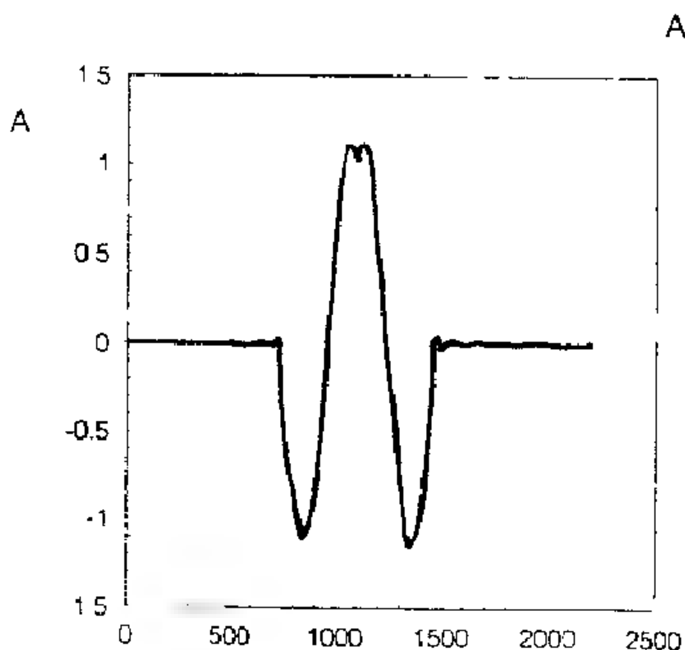


Fig4c Amplitude of electronic wave function A Vs positions of atoms P for Cantor Set with n=5 and E=-0.499

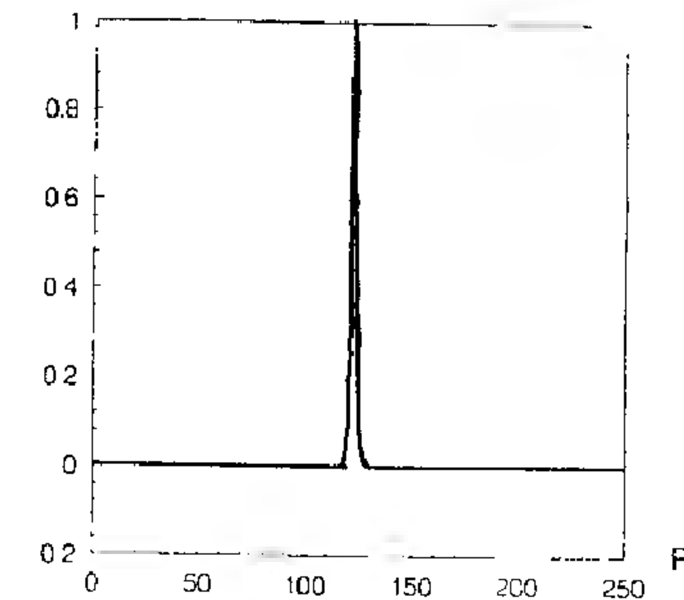


Fig4d Amplitude of electronic wave function A Vs positions of atoms P for Cantor with n=5 and E=-1.055

如考虑 U_i 为 Y_{ij} 时，有:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\lambda - \frac{\lambda-2}{\Delta}\right) Y_{31} = 2Y_{31} - \frac{Y_{32}}{3} - \frac{G_{21}}{\Delta} \\ &\left(\lambda - \frac{\lambda-2}{\Delta}\right) Y_{32} = 2Y_{32} - \frac{Y_{31}}{3} - \frac{Z_{21}}{\Delta} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

其中 $\Delta=(\lambda-2)^2-1$，$(\lambda\neq 3,1)$ 这样便得到如下重正化变换关系:

$$\frac{L}{3} \xrightarrow{b} L'$$

$$\lambda - \frac{\lambda-2}{\Delta} \xrightarrow{\varphi} \lambda' \tag{15}$$

(15) 式即为 *Cantor* 集分形结构振动的重正化方法的标度变换关系。

利用
$$\tilde{d}_f = \frac{2\ln b}{|\ln\varphi'(0)|} d_f \text{ [5]} \tag{16}$$

(其中，b 为 (15) 中尺度变换关系，φ 为力常数变换关系，d_f 为 *Cantor* 集分维数) 可得到 $\tilde{d}_f = 0.89$.

由 $C_v \propto T^{\tilde{d}_f/2}$ [5] 可知，其热容量 $C_v \propto T^{0.445}$. (17)

四、结　　论

本文利用 Dean 方法，转移矩阵以及重正化方法，研究了 Cantor 集分形结构上的振动谱，电子谱以及波函数特性，由计算结果可得到:

1. 振动态密度和电子态密度都具有自相似的分形结构;

2. 无论振动态和电子态都具有局域性质;

3. 存在延展态向局域态渡越现象，并针对具体情况，给出 Cantor 集分形结构上的渡越条件;

4. 利用重整化方法，得到在 $m_b=0$ 极限条件下，低频振动分形子谱维数 $\tilde{d}_f=0.89$，以及其热容量 $C_v \propto T^{0.455}$.

参 考 文 献

[1] 冯端，金国钧　物理学进展　Vol10　No2 (1991) P150

[2] Dean, P.　Rev.Mod.Phys 44(1972) 127

[3] Mark, Holzen　Phys.Rev.B Vol 44(1991) 2085

[4] 郑兆勃　《非晶固态材料引论》 科学出版社 (1987)，274-279

[5] Derrida,B. Orbach.R. etc
Physical RevB　Vol29 NO12 (1984)

一种 Diamond 阶梯结构上含两体和四体相互作用伊辛模型临界行为研究

顾宗华　　张宏光　　辛厚文

(中国科技大学近代化学系)

内容摘要：本文研究了一种 Diamond 阶梯结构上含两体和四体相互作用伊辛模型的临界行为，利用 decimation 重正化群，得到了有效临界温度 t 随 $\nu=\frac{K_4}{K_2}$ 的变化曲线并对相应的临界行为做了有意的讨论。

一、引言

相变和临界现象是物理学中充满难题和意外发现的领域之一。普适性和相变性质是临界现象研究的中心问题。对常规物质的临界性质的研究，已经历了上百年的历史。1980年，Gefen 等人的开创性工作揭示了分形物质上的临界性质与常规物质不同[1]，激起了人们的广泛兴趣。人们试图通过对具有分数维数的分形系统的研究，考察临界特性对空间维数的依赖性，揭示非整数维的空间中的物理现象，近些年来，由于 Berker 与 Ostlund 的工作[2]，对阶梯结构研究的理论兴趣日益增长。其原因是：一大类的阶梯结构点阵上的经典自旋模型，例如，Ising 模型，Potts 模型等，可以用重正化方法严格求解。另一方面，这些阶梯结构具有高度的非均匀性和严格的自相似性，是一类很好的规则分形模型，Griffiths 和 Kaufman[3]给出了这些阶梯结构上分离自旋系统的自由能的热力学极限存在的证明，保证了当结构趋于无穷大时，系统具有有意义的热力学性质。由此，人们利用这一类严格可解的模型系统，对许多感兴趣的理论问题进行了讨论。最近在这类结构上的多体相互作用伊辛和泡茨模型引起了人们兴趣[4]。本文研究了一种 Diamond 阶梯结构上含两体和四体互作用伊辛模型的临界行为，发现这种分形结构上对于纯两体互作用，以及含两体和四体互作用，都存在着有限温度相变。

二、Ising 模型

1 模型定义：

考虑如下的分形结构

如图(1)，(a)为第零级结构，即为起始元(initiator)，(b)为第一级结构，即为生成元(generator)，第 n 级结构由第 n−1 结构中每一根棒，以生成元取代而成。当 n→∞时，所得结构具有高度的非均匀性和严格的自相似性。在这样的点阵上，我们定义一个伊辛自旋模型，每一个格点被一个自旋 S 占据，每两个最近邻自旋间存在一个互作用常数为 J_2 的作用，每一个四面体的四个顶点上的自旋间存在一个互作用常数为 J_4 的四体互作用。在不存在外场的情况下，其哈密顿为：

$$-\beta H(K_2,K_4)=K_2\sum_{(i,j)}S_iS_j+K_4\sum_{(i,j,k,l)}S_iS_jS_kS_l \tag{1}$$

其中：$\beta=(kT)^{-1}$，$K_2=\dfrac{J_2}{kT}$，$K_4=\dfrac{J_4}{kT}$，$\sum\limits_{(i,j)}$ 是对所有最近邻对求和。$\sum\limits_{(i,j,k,l)}$ 是对所有四面体求和。

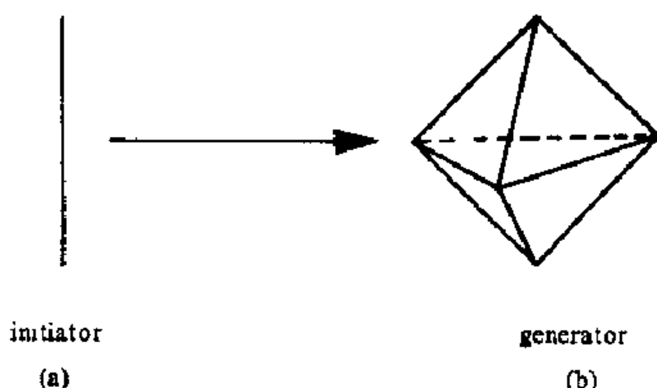


图 (1) Diamond 分形结构

对第 n 级结构，模型系统的热力学性质由配分函数决定：

$$Z_n(K_2,K_4)=\sum_{(S)}\exp(-\beta H) \tag{2}$$

其中：$\sum\limits_{(S)}$ 是对所有自旋变量求和。

2 等价关系

为了求出模型系统在临界条件时的严格解，一种可能的处理方法是将其化为一个等效的仅含两体互作用的系统。为此，首先对 (2) 式进行一次部分求和，即将一个 n 级点阵结构中每个生成元内部三个自旋变量求和掉。在此种处理下，将含四体与两体互作用的第 n 级结构变为仅含两体互作用，并且同样处于零外场中的第 $n-1$ 级结构，两者配分函数间有如下关系：

$$Z_n(K_2,K_4)=f^{9^{n-1}}Z_{n-1}(K) \tag{3}$$

其中：$f^2=\left[e^{3K_2}\cosh 2\left(3K_2+K_4\right)+3e^{-K_2}\cosh 2\left(K_2-K_4\right)\right]\left(e^{3K_2}+3e^{-K_2}\right)$ (4)

$Z_{n-1}(K)$ 为等效 *Ising* 模型的配分函数。等效系统为一个 $n-1$ 级结构点阵上，只含最近邻两体互作用，外场仍为零，且约化常数为 K 的 Ising 模型，其 Hamiltonion 为：

$$-\beta H(K)=K\sum_{(i,j)}S_iS_j \tag{5}$$

K 满足如下方程

$$\mathrm{th}K=\frac{\left[\mathrm{th}K_2\left(3+\mathrm{th}^2K_2\right)+\mathrm{th}K_4\left(1+3\mathrm{th}^2K_2\right)\right]^2+3\left(\mathrm{th}K_2-\mathrm{th}K_4\right)\left(1-\mathrm{th}K_2\right)^4}{\left[\left(1+3\mathrm{th}^2K_2\right)+\mathrm{th}K_2\cdot\mathrm{th}K_4\left(3+\mathrm{th}^2K_2\right)\right]^2+3\left(1-\mathrm{th}K_2\mathrm{th}K_4\right)^2\left(1-\mathrm{th}K_2\right)^4} \tag{6}$$

(3)，(4)，(6) 三式就是我们所求的等价关系。由关系式 (3)，在 $n\to\infty$ 的热力学极限下，

由于因子 f 只对自由能的非奇异部分有贡献，所讨论系统与等效系统有相同的奇异行为．所以模型 (1) 与模型 (5) 具有相同的临界行为．

3 临界行为与讨论

对于仅含两体互作用的等效 Ising 模型 (5)，我们做 decimation 变换，给出如下临界不动点方程:

$$\mathrm{th}K^* = \mathrm{th}^2K^* \frac{\left(3+\mathrm{th}^2K^*\right)^2+3\left(1-\mathrm{th}K^*\right)^4}{\left(1+3\mathrm{th}^2K^*\right)^2+3\left(1-\mathrm{th}K^*\right)^4} \tag{7}$$

解得其相关临界不动点为:

$$\mathrm{th}K^* = 0.231 \tag{8}$$

将 (8) 代入 (6)，则得所考虑系统的临界点方程:

$$\frac{\left[\mathrm{th}K_2(3+\mathrm{th}^2K_2)+\mathrm{th}K_4(1+3\mathrm{th}^2K_2)\right]^2+3(\mathrm{th}K_2-\mathrm{th}K_4)(1-\mathrm{th}K_2)^4}{\left[(1+3\mathrm{th}^2K_2)+\mathrm{th}K_2\cdot\mathrm{th}K_4(3+\mathrm{th}^2K_2)\right]^2+3(1-\mathrm{th}K_2\mathrm{th}K_4)(1-\mathrm{th}K_2)^4}=0.231 \tag{9}$$

为了讨论方便，我们引入两个约化参量:

$$\nu=\frac{J_4}{|J_2|}, \qquad t=\frac{KT}{|J_4|+|J_2|} \tag{10}$$

则:

$$K_2=\frac{a}{\left(1+|\nu|\right)t}, \qquad K_4=\frac{\nu}{\left(1+|\nu|\right)t} \tag{11}$$

其中：当 $J_2>0$，$a=+1$，$J_2<0$，$a=-1$ 用计算机作数值解，对 $J_2>0$ 和 $J_2<0$ 分别得图 (2)，图 (3) 所示曲线

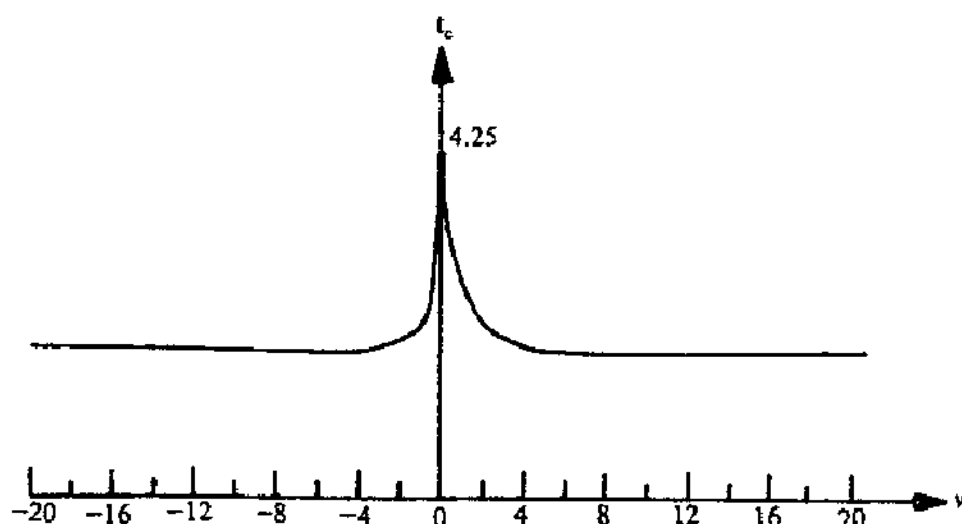
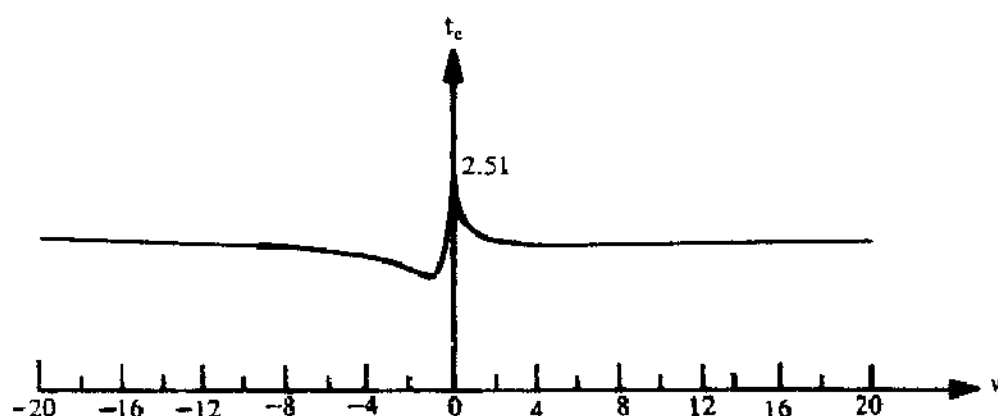


图 (2) $J_2>0$ 系统相图

由图(2)可以看出：$J_2>0$ 时，曲线下方为铁磁有序相，上方为铁磁无序相．$\nu=0$，即 $J_4=0$ 时，$t_{max}=4.25$，$\nu\to\pm\infty$ 时，$t_c\to1.91$．

由图(3)可以看出：$J_2<0$ 时，曲线形状略有不同，但总体特征相似，此时，曲线下方为反铁磁有序相，上方为无序相．$\nu=0$ 时，$t_{max}-2.51$．$\nu\to\pm\infty$时，$t_c\to1.91$．



图(3)　$J_2<0$ 系统相图

由以上分析可知：这种分形结构上伊辛模型，对于纯两体互作用，纯四体互作用以及含两体和四体互作用，都存在着有限温度相变．

参考文献:

[1] Y.Gefen, etal　Phys.Rev.Lett.45(1980)855

[2] A.N.Berker and S.Ostlund.　J.Phys.C12(1979)4961

[3] R.B.Giffiths and M.Kaufman. Phys.Rev.B26(1982)5022

[4] Y.Qin and Z.R.Yang, Phys.Rev.B43(1991)8576

分形与声振动

内蒙古师范大学　　敖力布

摘要　分形和分数维数的概念是研究许多物理现象的有利工具。它的问世使人们感到惊奇，过去许多不能解释的“怪”现象利用分形概念之后有了满意的答案。本文从分形及其维数概念出发研究了声振动的混沌性质以及它的分形结构并对边界固定的振动系统所发出的声音进行了具体分析。

一、分形概念及其维数

直观些讲，有一种构造图，它的前段与后段的构造方式相同，只不过是标度不同而异，从近处看和从远处观察得出的结果是相同的，也就是说这种几何图形具有自相似结构。当尺度(标度)改变时它的结构具有不变性，我们将具备这种特点的几何图形称为分形。这种构造图粗看起来好象大量无序的小系统的乱集合，但实际上按着统计规律分布着。这种分布在标度改变过程中呈现出自相似性，按统计规律分布的定量表示即是该系统的分形维数[2]。在一般情况下分形的维数不是整数而是分数。分形可分为规则分形和非规则分形两种。研究这种分形及其维数的几何叫豪斯道夫一曼德尔布罗分维几何学。分形和分数维数概念问世之后许多当初被看作稀奇古怪的曲线(比如科赫雪花曲线和曼德尔布罗雪花曲线)现在得到令人满意的解释。在自然界中任一系统，它的总面积或总长度随着标度的改变(即度量单位改变)而变为无穷大或无穷小，从微观的基本粒子的运动到宏观的星际运动无不例外，在这些领域中分形和分数维数概念得到广泛的应用。

理论上分形具备无穷多维数，不过通常只定义三种维数[3]就可以描述一种分形结构，这三种维数分别叫豪斯道夫维数，信息维数和关联维数，豪斯道夫维数又叫相似维数。若考虑一个d维空间中的一个奇怪吸引子，那么它的豪斯道夫维数的定义为

$$D=-\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\log M(\varepsilon)/\log\varepsilon \tag{1}$$

其中M(ε)为包含该集合元素的体积元的格子数，用边长为ε的d维体积元(格子)ε^d的集合去复盖这个空间，N为格子中的点数。比如对于Cantor集合取$\varepsilon=\frac{1}{3^N}$，$M(\varepsilon)=2^N$，那么它的豪斯道夫维数为

$$\begin{aligned}D&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\log 2^N/\log\frac{1}{3^N}\\&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}N\log 2/(0-N\log 3)\\&=\log 2/\log 3\end{aligned}$$

这个奇怪吸引子的信息维数定义为

$$\sigma=-\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}s(\varepsilon)/\log\varepsilon \tag{2}$$

其中s(ε)为信息熵。它的关联维数的定义为

$$L=-\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\log C(\varepsilon)/\log\varepsilon \tag{3}$$

对于通常的欧几里德空间这三个维数是相同的都等于空间维数。但对于一般的分形而言三者就不同了，究竟应该使用哪种维数定义要看系统的特性和问题的方便而定，平常应用较多的是最古老的也是最直观的一种维数即豪斯道夫维数也称为相似维数。

二、声振动

大家知道，声音即是一种波动，也就是振动的传播过程。宇宙间万物无一不振动。任何声音都是利用振动传给人们。描述一种声振动的最基本的也是最重要的物理量是它的频率。声振动频率一般可分为基频倍频和谐频。我们以鼓声为代表对声振动进行研究。

任何一种振动物体的频率主要取决于它本身的特性。比如小提琴的基频取决于弦的张力园形鼓的基频取决于它的园边界，马头琴的基频取决于它的弦的张力和梯形鼓面。这一规律不仅适用于光滑边界物而且还适用于分形边界物（比如雪花曲线边界鼓）。规则形状物产生的声振动具有相对简单的频率系列，复杂形状物产生的声振动具备相对复杂的频率系列。规则形状物（如园形鼓）的声振动频率系列虽然说是比较简单，但从导出的结果看还是相当复杂的贝塞尔函数，由此我们可以想象得到复杂形状物（如雪花曲线鼓）的声振动频率系列有何等的复杂性。

人们熟悉，物体的谐振动方程为

$$\frac{dx^2}{dt^2} + w^2 x = 0 \tag{4}$$

x 为物体振动位移，可以表示为 $x = ACos(wt + \varphi)$。十八世纪初伟大数学家欧拉专门研究了各种乐器的声振动后提出任何介质的小振动都要用波动方程来描述，这个波动方程即是我们所熟悉的数学物理方程[1]，它的数学表示式为

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \nabla^2 f \tag{5}$$

其中∇^2为拉普拉斯算符，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$。任一介质的振动均有它自己的特征频率，这些特征频率的统计分布是有规律性的，它们对应于上述方程的本征值 K，其本征方程为

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + Kf = 0 \tag{6}$$

(6)式称为魏尔公式。声振动物体的特征频率是方程(6)的解，容易看出方程(4)和(6)是等价的。解方程(6)时必须考虑振动物体的边界条件，这个边界条件要求振动物体的边界是固定端，除固定边界外剩余部分产生声振动，乐器的声振动多数属于此类。

三、声振动中的分形结构

声振动是一种非线性振动，它的本质是一种混沌运动，混沌是一种按决定论产生的不规则性或叫内在随机性并非简单的无序，它是非线性振动的一种新机制。各种条件下都可以产生混沌现象，其中最常见的是倍周期过渡即倍频过渡[3]。这种混沌的奇怪吸引子具备分形结构，而且此分形结构的维数是分数。

假若声振动的基频是 v_0，倍频为 $2v_0, 3v_0, \cdots\cdots nv_0$ 还有非整数倍弦频 $1/2v_0, 1/3v_0, \cdots\cdots 1/nv_0$，以及奇数倍超谐频 $(2n-1)1/2v_0, (2n-1)1/3v_0, \cdots\cdots$ 和 $(n+1/2)v_0, (n+1/3)v_0, \cdots\cdots (n+1/n)v_0$。这些谐频和超谐频还要相互迭加而产生共振，进而导致由有序转化为无序的混沌过渡。下面我们从研究高频声振动奇怪吸引子开始讨论声振动的分形结构。

用 B(K)表示小于某一本征频率 K 的特征频率的个数，由魏尔公式知[1]，当 K 增加到相当大时 B(K)近似与 $K^{\frac{i}{2}}$ 成正比，其中 i 是声振动物体的维数。假设该声振动物体具备规则（如园形鼓）奇怪吸引子的分形结构，那么它的 B(K)应满足

$$B(K) = AK^{\frac{i}{2}} \tag{7}$$

比例系数 A 取决于振动物体的体积。当 K 无限增加时特征频率与魏尔公式非常接近，误差很小。然而这只是非常粗略的结果，是初步的信息。这种误差与产生声振动物体的边界形状的不同而不同，这即是该声混沌运动的奇怪吸引子，其大小与 $K^{\frac{d}{2}}$ 同一数量级，这里的 d 是声振动物体的边界维数。维数为分数的吸引子叫奇怪吸引子，它跟混沌运动相联系着。维数为整数的吸引子称为平庸吸引子，它与混沌运动无关联[3]。由维数定义知道，若声振动物体处在实空间中那么上述三种维数都相同，均等于振动空间的维数。以园形鼓为例，其振动平面是二维平面(即鼓面)，所以振动物体的维数也是 2 即 i=2，相应的边界维数是 1，这是由于边界条件所要求(固定端)，由此可知它的边界维数也是 1 即 d=1，此时(7)式变为

$$B(K) = AK^{\frac{i}{2}} = AK \quad (8)$$

可见误差不超过 $K^{\frac{d}{2}} = K^{\frac{1}{2}}$

下面谈一谈声振动物体所产生的非规则奇怪吸引子的分形结构[1]。假设有一个曼德尔布罗雪花曲线(或科赫雪花曲线)边界的园形鼓，经敲鼓后传出的声振动中包含着传透雪花曲线边界细缝的更多的高频率振动，原因在于分形边界具有非常细小的大量的裂缝，因此特征频率的个数 B(K)比规则分形结构的更大些，而且与魏尔公式的误差也偏大些，这种奇怪吸引子的大小还是 $K^{\frac{d}{2}}$，这里的 d 是雪花边界的维数。这个边界维数的物理意义在于它反映出当量度雪花曲线边界的标度发生改变时边界当时的形态。

雪花曲线边界的维数 d 由维数定义式算出，对于科赫雪花曲线边界而言

$$D = log4/log3 \approx 1.2618 \quad (9)$$

对于曼德尔布罗雪花曲线边界而言

$$D = log8/log4 \approx 1.5 \quad (10)$$

显然，边界维数都是分数。由此可见，这两种曲线边界结构产生的声振动的特征频率与魏尔公式的误差分别为 $K^{\frac{d}{2}} = K^{0.6309}$ 和 $K^{\frac{d}{2}} = K^{0.75}$。有人曾提出将这些误差能否并入魏尔公式的二次修正项中，这种想法也许是对的，但需要实验的证实。

四、结束语

上面我们对声振动的分形结构进行了分析，由此可以看出，许多自然界中的声振动用分形来摸拟是最恰当不过。近来分形现论在各个领域中广泛应用。如地震予报学、无规边界湖水下振动的研究、沸腾噪声、音乐厅无规墙壁的回声[1]，高聚物，布朗运动，行星轨道周期的分析[3]等。当前显微技术和计算机技术的结合使得分形维数的测量变得特别简单，这样反过来更加推动了分形及其维数概念在各学科中的应用，这些应用中最令人赞叹不已的是分数维几何由计算机模拟出的自然景观。

参考文献

[1]Lan stewart 著，分形鼓的回声，《世界科学》90 年 4 期。

[2]黄均，谈谈曼德尔布罗集和尤利亚集的分形几何，《大学物理》91 年 1 期，

[3]陈式刚，，映象与混沌，1992 年，国防工业出版社。

[4]方德祥、王建国，分数维几何简介，《自然杂志》85 年 11 期。

Hopping 电导的分形行为特征 *

廖结楼　　杨灵法　　辛厚文

(中国科技大学近代化学系)

在导电高聚物以及某些非晶态材料中，实验上发现直流电导 σ 与温度之间满足如下关系：[1][2]

$$\sigma(T)\propto \exp[-(T_0/T)^m] \tag{1}$$

其中，T_0 是常数，$m=1/(1+d)$，d 为欧氏空间的维数，从 (1) 式可见 σ 与欧氏空间维数密切相关。一般地，不同的 $\sigma(T)\sim T$ 关系类型对应着不同的导电机制。Motto[3] 提出变程跳电导机理并对 (1) 式进行了解释。Pollak 和 Ambegoka[5] 利用逾渗模型也得到了类似的结果，最近的实验结果显示跳跃电导行为在 Hopping 区域有分形特征[6]。我们利用逾渗模型对跳跃电导过程进行研究，认为在费米能级附近的电子局域态可能是分形分布，并与分形维数联系起来得到与 (1) 式相似的结果。

利用如下方法，构造逾渗模型：逾渗网络上的每个格点代表电子局域态所处的空间位置和能量，当电子从一个局域态跳到另一局域态时，就定义相应格点之间是联通的，当此逾渗网络形成全连通集团时，就对应其临界转变点，并称这样的子网络为临界子网络。如设电阻网络的电导为 G_{ij}，临界电阻网络的电导为 G_0，有如下关系：

$$G_i=[e^2/(K*T)]\Gamma_{ij} \tag{2}$$

e 为电荷常数，K 为 Boltzman 常数，T 为温度，Γ_{ij} 是电子从第 i 个格点到第 j 个格点的跃迁速率，对应临界网络为 Γ_0，Γ_{ij} 满足：

$$\Gamma_{ij}\approx\gamma_0\exp[-2\alpha R_{ij}-(|E_i+|E_j|+|E_i-E_j|)/(2KT) \tag{3}$$

其中，γ_0，α 是常数 R_{ij} 是第 i 个格点到第 j 个格点之间的距离，E_i，E_j 是其各自的能级。

跳跃电导的临界逾渗网络必须满足下面的条件：

$$G_{ij}\geqslant G_c \tag{4}$$

由 (2)，(3)，(4) 可得：

$$2\alpha R_{ij}-(E_i+|E_j+|E_i-E_j|)/(2KT)\leqslant Ln(\gamma_0/\Gamma_c) \tag{5}$$

其中，

$$\Gamma_c KTG_c/e^2 \tag{5}$$

归一化可得：

$$\frac{R_{ij}}{R_{max}}+\frac{(|E_i|+|E_j|+|E_i-E_j|)}{E_{max}}\leqslant 1 \tag{6}$$

$$R_{max}=1/(2\alpha)Ln(\gamma_0/\Gamma_c)\qquad E_{max}=KTLn(\gamma_0/\Gamma_c) \tag{7}$$

---

* 国家自然科学基金资项目。

一般说来，处于临界转变的网络具有标度不变性，因而有分形结构特征[7]，由分形维数 df 的定义，可得：

$$nR_{max}^{d_f} = C \tag{8}$$

C 为常数，n 是能量在 $|E_i| \leqslant |E_{max}$ 时，逾渗网络单位体积中格点数目，可表达为

$$n - 2\rho_0 E_{max} \tag{9}$$

最后可得

$$Ln(\gamma_0 / \Gamma_c) = [c * 2^{(d_f - .)} * \alpha^{df}] / (KT\rho_0)^{(1/(d_f+1)} \tag{10}$$

$$\sigma \quad G_c / R \propto G_c \tag{11}$$

有

$$\sigma \propto \exp[-(T_0 / T)^{1, (df+1)}] \tag{12}$$

其中

$$T_0 \quad (c * 2^{df} \quad 1 * \alpha^{df}) / (\rho_0 * K)$$

这样，我们得与（1）式相类似的结果，但有明显的区别并赋有新的含义。

参考文献

[1] 钱人元《高分子通报》No2, 65(1991)

[2] Mott, N.F. Davis, E.A "Electronic Processes in Non−Crystalling Materials." 2nd Clarendon Press, Oxford 1979

[3] Mott, N.F., Phil Mag **19** 835(1969)

[4] Pollak, M. J.Non−Cryst Solids **11**, 1 (1972)

[5] Ambegaokar, V. Halpern, BI, Langer, JS Phys Rev13 Vol4, 21612 (1971)

[6] Frydman, A, Cohen, O, Ovadyhu, Z, Solid State Communications, Vol83, No3 249 (1992)

[7] Orbach, R, Science Vol 231 814(1986)

磁性超微粒的斑图形成*

杜伟亭　赵明华　黄　昀

(北京大学物理系，北京大学非线性科学中心，北京 100871)

近年来对磁性超微粒 (ultrafine partic.es，简称 UFP) 在惰性气体中蒸发并凝聚于薄膜上的结构进行实验与数值模拟的研究已日益开展[1-3]，但工作主要集中在对形成的凝聚斑图(pattern)进行分形维数 D_f的测定。目前中科院物理所李华[4]等同志在这方面作了一系列的实验研究，他们在不同的压力下对铁、钴、镍 UFP 进行薄膜凝聚，获得了许多不同类型的分形斑图。配合他们的实验，我们开展了计算机模拟的理论探讨，主要的目的是能进一步了解磁性超微粒在磁作用下发生凝聚的物理机理。首先简略地介绍一下实验过程。将铁、钴、镍分子蒸发于氩气(99.999%)中，其压力为 0.5—15 乇，在空间中形成为磁性 UFP，然后在收集薄膜上凝聚，通常收集器上的冷凝温度保持为液氮温度。图 1 显示了在薄膜上冷凝后所形成的几种不同的分形斑图(fractal pattern)。配合实验我们作了理论计算，得到了与实验相符的结果。本文将介绍模型的设计与计算结果的讨论。



图 1　不同实验条件下的分形斑图。

1.　理论与计算模型

磁性原子受热蒸发后在氩气空间内作平动运动，但粒子间存在着磁相互作用，当形成为 UFP 后还必然要作转动运动。考虑到这两种运动后，我们采用了在三维空间内无格点的集团-集团凝聚(Cluster—Cluster aggregation，简称 CCA)模型来模拟微粒的凝聚过程。具体计算时是利用分级(Hierarchical)方法，在点阵中随机地分布着 N 个磁性超微粒，第一步将所有的分离微粒结合为 $\frac{N}{2}$ 个两微粒集团，第二步再把两粒子集团结合为四粒子集团，依此类推，最后凝聚为一个 N 微粒的集团。微粒或集团在作平动或转动时必需按波尔兹曼分布规律进行运动，设控制平动、转动布朗运动的能量是由两个集团中磁性超微粒的偶极子相互作用来决定，相互作用能 W 的表达式为：

$$W = K \sum_{i \neq j, i, j=1}^{2N'} \frac{3(\vec{M}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{M}_j \cdot \vec{r}_{ij}) - (\vec{M}_i \cdot \vec{M}_j)}{r_{ij}^3} \tag{1}$$

* 本工作受国家基础性重大关键项目资助

其中 N' 是集团中的微粒数，$\vec{M}_i$，$\vec{r}_{ij}$ 分别是微粒的磁矩和微粒间的距离，这里我们已把单个超微粒的磁矩定义为单位磁矩，将单个超微粒的直径定义为单位长度，而 K 为一与超微粒的性质有关的常数，其值为：

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_M^2}{d_0^3} \tag{2}$$

这里的 μ_0是导磁率，μ_M 是 UFP 的磁矩，d_0是它的直径。

写出能量表达式后，立即可得到集团行走的概率为：

$$P = exp(-\frac{\triangle W}{K_B T}) \tag{3}$$

由它决定微粒在每一步行走时的可能性。计算时先作平动，再作转动。等新集团形成后就进行坐标变换，把各个微粒的坐标从原来集团的质心坐标系变换到新集团的质心坐标系，从而可计算出每一层次时集团的回旋半径 R_g，利用集团的回旋半径与集团微粒数的关系式

$$N = R_g^{D_f}, \qquad D_f = \frac{ln\ N}{ln\ R_g(N)} \tag{4}$$

就可定出凝聚集团的分形维数。

实验时使用了不同的磁性粒子，因此相应地具有不同的 μ_M 值，在不同的压力条件下，磁性原子在空间飞行时会聚合成不同半径的 UFP，它们的直径可以从 200 埃变化到 500 埃，这些变化都反映在参数 K 的数值上。我们在模拟时调节参数 K 的值从 0 变到 1000 以分别对应于不同的磁相互作用，其中 $K = 0$ 对应于无磁相互作用时的情况。为了能研究集团磁矩的性质，我们将凝聚成的集团样本分别投影到 XY 与 YZ 平面进行讨论。

2. 结果与讨论

A. 分形维数 D_f 与相互作用参数 K 的关系。图 2 反映了不同相互作用下的分形维数，由

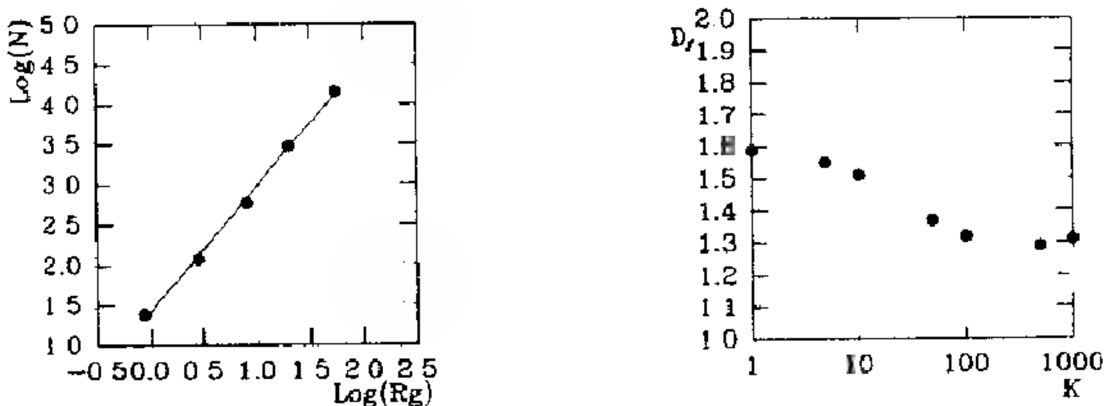


图 2 (a) $k = 10$ 时微粒数与回旋半径的双对数图。 (b) D_f 随 K 的变化曲线。

图 2a 可看出凝聚斑图很好地满足分形的标度律。图 2b 是 D_f随 K 变化的曲线，由于横轴是以对数形式标出，故略去了 $k = 0$ 的点。当 $K = 0$ 时，$D_f = 1.68$，这个结果与一般文献中无互作用的 CCA 结果一致。这说明我们所设计的模型是正确的。计算表明随着 K 的增加，D_f 的值逐渐地变小，但存在着一个明显的转折点，即当 $K > 300$ 后，D_f的数值基本上不再发生什么变化，其物理原因是在 K 的值大到某个数值后，凝聚过程完全受有规力的控制。这时的斑图呈

链状结构。我们还发现，如果不考虑集团具有受能量控制的转动布朗运动，那么在开始增加 K 的数值时，D_f的值不会出现显著的下降，而其形态（微粒在空间中的分布）却有明显的变化。另一方面若在考虑转动时只作随机运动而不受能量控制，则 D_f 的变化也甚微。由此可见，在考虑斑图的分形结构时受能量控制的转动布朗运动是很重要的因素，这点在以前的文献中都没有得到重视。

B. 凝聚斑图与集团磁矩。图 3 给出了在不同 K 值下，凝聚斑图的形态，其中 3a 与 3b 分别是 $K = 1$，与 $K = 10$ 时的一个典型斑图，它们的结构和图 1 的实验相片非常相似，这说明磁性 UFP 在凝聚时受到了磁相互作用，且 $K = 10$ 时，结构基本上为有分支的链状结构。当我们将 30 个样本叠加并投影到 XY，YZ 平面上时发现它们具有较明显的各向异性（见图 3c 和 3d）。这种不对称性来源于集团磁矩的各向异性，初始时刻磁性微粒随机分布在空间时，这时整个体系中的总磁矩为零，体系是各向同性的。随着凝聚过程的进行，在每一次结合过程中集团就会出现各自的磁矩，为了能更好地反映磁偶极相互作用对集团形态的影响，我们以各集团平均后的剩余磁矩方向为 Z 轴的方向，并把各集团中微粒的坐标从原有坐标系变换到新坐标系，同时定义了集团分布的取向度 S 为

$$S = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left\{3\left(\frac{r_{i,z}^2}{r_i^2}\right) - 1.0\right\} \tag{5}$$

利用式(5)可计算出，当集团为直链时 $S = 1$，而集团为各向同性时 $S = 0$ 。



图 4 (a) $K = 1$，时的凝聚斑图。 (b) $K = 10$ 时的凝聚斑图。



图 4 (c)，(d) 分别为 $K = 10$ 时 30 个样本叠加后在 YZ 与 XY 平面上的投影。

参考文献： 1. G. A. Niklasson, et al, Phy. Rev. Let. 60 1735 (1988)

2. Ander B. Eriksson, M. Jonson, Phy. Rev. B, 40 884 (1989)

3. Paulo M Mors, et al J. Phys. A 20 L975 (1987)

4. Hua Li, et al, to be published

相互作用对分形聚集的影响

孙强　　王前

（西南师大物理系，重庆 630715）

摘要　本文讨论了粒子之间的相互作用对其分形聚集的影响。根据 SAK 模型导出了分维度与相互作用能的关系。结果表明：随着粒子间相互吸引能的增加，聚集的分维度减小。从而解释了现有的实验结果和计算机模拟结果。

一、引言

从星云的形成、河沙的淤积、化学沉积到雾滴、尘埃、胶体的生成，聚集现象广泛地存在于自然界之中，并且有着广泛的应用。大量的实验分析和理论研究表明：自然界中的很多聚集现象都具有分形特征，如悬浮在气体中的固体微粒或液滴的聚集，溶液中金属离子在电极上的沉积等等。聚集过程要受到多种因素的影响，如介质特性、环境温度、化学组成、相互作用以及所加外场。在本文中我们将讨论相互作用对分形聚集的影响。

二、理论分析

设粒径为 a 的球形粒子在 d 维空间中的点阵上聚集，点阵的间距也为 a。一般说来，分形聚集是通过粒子间的短程相互作用形成较长程的自相似结构（也称为分形序），因此，在本文中我们仅考虑最近邻粒子之间的相互作用。设最近邻粒子间的相互吸引能为 E，环境温度为 T，由 SAK 模型可得[1]粒子聚集到有 n 个配位粒子位置上的几率为

$$P_n = 1 - \frac{1}{\tau_R} e^{-nE/KT} \tag{1}$$

其中 K 为玻耳兹曼常数，τ_R 为粒子从聚集体中发生裂解的时间常数。设点阵的最大配位数为 n_0，则聚集体中粒子的平均配位数为

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{n_0} n p_n = \sum_{n=1}^{n_0} \left(1 - \frac{1}{\tau_R} e^{-nE/KT}\right) n$$

$$= \frac{n_0(n_0+1)}{2} - \frac{1}{\tau_R} F \tag{2}$$

其中 $F = \sum_{n=1}^{n_0} n e^{-nE/KT}$，为了求出该函数的值，定义母函数

$$Z = \sum_{n=1}^{n_0} e^{-nE/KT} = \frac{1 - e^{-n_0 x}}{e^x - 1} \tag{3}$$

$$x = E/KT \tag{4}$$

则

$$F = -\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$= \frac{(1 - e^{-n_0 x})e^x - n_0 e^{-n_0 x}(e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} \tag{5}$$

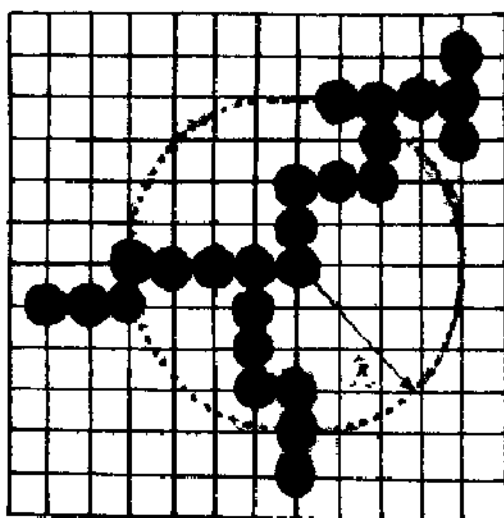


图1　粒子在二维正方点阵上的分形聚集

将(5)式代入(2)便得聚体中粒子的平均配位数 $\bar{n}$，其大小反映了聚集体结构的松散程度。而结构的松散程度又可由其分维度 D 的大小来表征，它与半径为 R 区域内的粒子数 N 之间的关系为

$$N \sim R^D \tag{6}$$

对于给定的R、D越大，结构就越密集。因此，D与n之间应存在一定的关系，下面我们来寻求这一关系。

对于图1所示的二维正方点阵，以聚集体中某个粒子为中心，以R为半径作一圆，该圆的面积为πR^2。点阵中每个小方格的面积为a^2，该圆所包含的方格数为

$$m = \pi R^2 / a^2 \tag{6}$$

每个小方格有四个格点，它们分别为相邻的四个小方格所共有，因此，每个方格贡献一个格点，若忽略边界的影响，则圆内的方格数应等于格点数。设圆内所含的实际粒子数为N，则平均配位数为

$$\bar{n} = \frac{N}{m}$$

由(6)式和(7)式得

$$\bar{n} \sim \frac{R^D}{R^2} \sim R^{D-2} \tag{8}$$

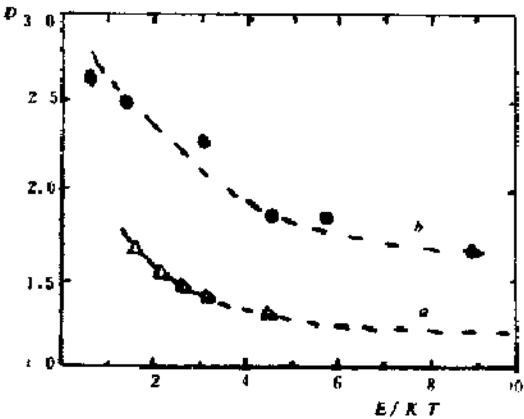


图2　D与E的变化　曲线a为模拟结果，曲线b为实验结果

若推广到一般的d维点阵，则有

$$m \sim R^d / a^d$$

$$\bar{n} \sim R^D / m \sim R^{D-d} \tag{9}$$

设比例系数为A，则有

$$D = d + \frac{\ln \bar{n} - \ln A}{\ln R} = d + \alpha \tag{10}$$

$$\alpha = \ln(\bar{n} / A) / \ln R \tag{11}$$

为了讨论相互作用能的变化对分形聚集的影响，现将(10)式两边对x求导

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{\bar{n} \ln R} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} = \frac{1}{n\, \tau_g \ln R} \frac{\partial F}{\partial x} \tag{12}$$

由(5)式得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e^x(e^x - 1) + (2n_0 - 1)e^{-(n_0-1)x} + n_0^2 e^{-n_0 x}(e^x - 1)^2 - 2e^x(1 - e^{-n_0 x})}{(e^x - 1)^3}$$

因$n_0 > 1$，$e^x > 1$，$e^{-n_0 x} < 1$，故有

$$\frac{\partial F}{\partial x} > 0 \tag{13}$$

代入(12)式得

$$\frac{\partial D}{\partial x} < 0 \tag{14}$$

上式表明聚集体的分维度随粒子间相互吸引能的增加而减小，这一结论为很多实验结果和计算机模拟结果所证实。

三、实验验证

$W \cdot Y \cdot Shih$等人在二维空间进行了Monte carlo模拟研究[1]，先让粒子均匀地分布在具有周期性边界条件的正方点阵上，然后让粒子作布朗运动，在时间τ_i内随机地运动一个点阵常数，当两个粒子相互位于最近邻点阵上时便发生聚集，以后该集团又作布朗运动，在运动中与其它粒子或集团发生聚集。在每一个τ_B时间内，用一个介于0到1之间的随机数γ来检验聚集体中粒子的状态，若$\gamma > e^{-nE/KT}$，则该粒子将被裂解，裂解后的粒子或集团在以后的运动中又将再聚集。结果表明分维度D随粒子间吸引能E的增加而减小，如图2中的曲线a所示。

为了从实验上证实模拟结果所得的结论，$J \cdot Liu$ 等人[2] 在 100℃ 的温度下，在液相中将金的氯化物与柠檬酸钠反应，得到了平均粒径为 15nm 的球形金超微粒。由于对带负电的柠檬酸盐离子的吸收，Au 粒子表面带负电，加入可溶于水的阳离子型表面活剂来中和一部分负电荷，从而改变粒子间的相互作用 E，这种相互作用可用修正的 $DLVO$ 理论来描述。实验表明 D 随 E 的增加而减小，如图 2 中的曲线 l 所示。

D 随 E 的增加而减小这一特点明显地存在于磁性粒子的分形聚集中。$P \cdot M \cdot Mores$ 等人所作的模拟结果表明[3]，当存在磁偶极相互作用时，$D = 1.35 \pm 0.08$；$G \cdot A \cdot Niklassen$ 等人对 C_o 超微粒的聚集进行了实验研究[4]，发现当粒径小于 8nm 时，聚集的分维度为 $1.9 \leqslant D \leqslant 2.05$，当粒径大于 8nm 时，$1.75 \leqslant D \leqslant 1.9$。8nm 是 C_o 粒子由铁磁性到超顺磁性转变的临界半径，当粒径小于临界半径时，粒子呈超顺磁性，这时粒子间的相互作用弱，大于临界半径时，粒子呈铁磁性，这时粒子之间的相互作用增强。因此，磁性超微粒在分形聚集中所表现出来的这种粒径效应，实际上是粒子间相互作用强弱变化的结果。

设聚集体中粒子所具有的磁矩为 μ，为简单起见，我们仍考虑最近邻相互作用。中心相距为 a，磁矩为 μ 的两个粒子之间的静磁相互作用能为[5]

$$E = -\frac{1}{18}\pi^2 a^3 M_s^2 = -\frac{2\mu^2}{a^3} \tag{15}$$

其中 M_s 为粒子的饱和磁化强度，代入(14)式可得

$$\frac{2D}{2(\mu^2/a^3KT)} < 0 \tag{16}$$

上式表明磁性粒子聚集体的分维度随粒子磁矩的增加而减小，这与 $G \cdot Helgesen$ 等人所作的计算机模拟结果[6]以及 $Liu \cdot B \cdot x$ 等人对固体薄膜表面磁性粒子聚集的实验研究结果[7]在定性上是一致的。$Liu \cdot B \cdot X$ 等人通过对 Fe、Co、Ni、Cr 四种粒子聚集行为的比较，发现分维度与原子的有效磁子数 m 之间满足。

$$D = 1.72 - 0.041m \tag{17}$$

对于由不同原子构成的粒径相同的粒子，m 越大，粒子所具有的磁矩就越大，粒子间磁相互作用的增加就使得聚集的分维度降低。

聚集体的分维度随粒子间相互吸引能的增加而减小，其原因是粒子间的吸引作用越强，其生长几率就越大，所产生的结构就越松散，因而分维度 D 减小。$M \cdot Matsushita$ 等人研究了扩散受限聚集的分维度 D 与集团生长几率的关系[8]，集团中某点的生长几率 P_i 与该点处的局域场 $|\nabla\phi|$ 之间的关系为

$$P \sim |\nabla\phi|^\eta$$

其中 η 称为生长几率指数，对于给定的 $|\nabla\phi|$，η 越大，生长几率也越大。数值研究表明 D 随 $Ln\eta$ 的增加而减小，$L \cdot Niemeyer$ 等人也得出了类似的结果[9]。这表明：相互作用 → 生长几率 → 结构的松散程度 → 分维度。

参考文献

[1] $W \cdot Y \cdot shih$, $I \cdot A \cdot Aksay$ and $R \cdot kikuchi$. Phys · Rev · A 36(1987)5015

[2] $J \cdot Liu$, $W \cdot y \cdot shih$, $M \cdot Sarikaya$ et al. Phys · Rev · A 41(1990)3206
$W \cdot Y \cdot Shih$, $J \cdot Liu$, $W \cdot H \cdot Shih$ et al. J · stat · Phys · 62(1991)961

[3] $P \cdot M \cdot Mores$, $R \cdot Botert$ and $R \cdot Jullien$. J · Phys · A 20(1987)L975

[4] $G \cdot A \cdot Niklasson$, $A \cdot Torebring$, $C \cdot Larssn$ et al. Phys · Rev · lett · 60(1988)1735

[5] $K \cdot Bridhe$, $J \cdot Watts$ and $C \cdot L \cdot Chien$. J · Appl · Phys · 63(1988)3233

[6] $G \cdot Heleyesen$, $A \cdot T \cdot Skjeltrop$, $P \cdot M \cdot Mores$ et al. Phys · Rev · lett · 61(1988)1736

[7] $Liu \cdot B \cdot x$, $Ding \cdot J \cdot R$ and $L \cdot J \cdot Hung$. Phys · Rev · B 40(1989)5834

[8] $M \cdot Matsushita$, $K \cdot Honda$, $H \cdot Toyoki$ et al. J · Phys · sic · Jpn55(1986)2618

[9] $L \cdot Niemeyer$, $L \cdot Pietronero$ and $H \cdot J \cdot Wiesmann$. Phys · Rev. lett · 52(1984)1033

气固相变时碘的分形凝聚

张济忠* 阳晓军 李恒德

清华大学材料科学与工程系
*中国高等科学技术中心(CCAST)
*中国科学院国际材料物理中心

碘加热后产生的蒸汽沉积于玻璃容器的内壁上，形成各种图案：均匀分布的颗粒，小颗粒凝聚体，网络形的生长物，以及对称性良好的枝状晶。其中小颗粒凝聚体明显地显示出分形的特征，颗粒成球形，其尺寸范围在25-..0μm之间，分形维数在1.50-1.75之间；而网络形的生长物是介于分形与枝晶之间的一种复杂结构。本文以核晶凝聚模型讨论了分形凝聚体的形成过程。

引言

在远离平衡的无序系统中的气固相变往往导致分形生长，在沉积的基体表面上形成各种形态的二维分形结构，如氧化钼在气相沉积时产生优美的图形[1-4]，这些图形结构致密，其分形维数在1.83-1.96之间。氯化镍在气固界面上也会沉积出具有自相似性的凝聚体，由于蒸汽压较高、沉积速度过快，因而凝聚体图形显示出准分形的特征[5]。

在非平衡不可逆的过程中，除了产生各种形态的分形结构外，还常常观察到一些单晶体，例如在氧化钼的气固相变实验中，不同形状的晶体与分形凝聚体同时产生。不仅如此，进一步的分析发现，在不同实验条件下获得的氧化钼分形凝聚体是由不同类型的晶体组成的，在750℃下得到由晶须堆垛成的致密凝聚体，在800℃下得到的网状凝聚体由藤蔓状的晶体组成，而在900℃下，大量狭长单晶片堆积成一个硕大的凝聚体[6]。

在以上的实验基础上，一个核晶凝聚模型(Nucleation Aggregation Model)被提出[2]，其主要内容是：在气固相变过程中，当气相中的原子或分子达到临界浓度值时，它们形核并生成晶体，随着实验条件的不同，晶体的形态可以是晶须、薄晶片、或者成束的棕榈状晶体等；在系统的整个空间范围内，由于温度和浓度的涨落是始终存在的，所以在某个临界点，空间相关性必然产生，在气固界面上形成一些分形图形的"种子"——由晶体组成的具有一定几何形态的某种组合结构体，随后，形核生成的晶体将以"种子"为核心凝聚，其方式可以是堆垛，也可以是在原有的"种子"基础上延伸长大，这将取决于具体的实验条件。

晶核凝聚模型的基本观点是：宏观上的空间有序结构可以是由微观上的平衡结构组成，如在750℃下获得的氧化钼分形凝聚体是由大量晶须组成的，在这里，晶须是典型的平衡结构，可按玻耳兹曼有序原理予以解释；而分形凝聚体是宏观上的空间有序结构，其形成可按耗散结构的有序原理予以说明。换一句话说，这样形成的分形凝聚体是玻耳兹曼有序原理与耗散结构的有序原理二者同时起作用的结果，即微观上的平衡结构，宏观上的空间有序结构。

对碘在气相沉积时的凝聚行为的实验研究，将有助于人们进一步了解物质在气固相变时分形凝聚的机理和过程。

二 实验

实验是在由玻璃容器组成的蒸发沉积装置中进行的，该装置包括加热、保温、控温三部分。将碘晶体放入装置中，采用间接加热的方法进行加热，即先加热碘周围的空气，空气再把热量传导给碘（热空气与碘并不直接接触），使之蒸发，蒸发的碘原子沉积在周围的PET薄膜上。

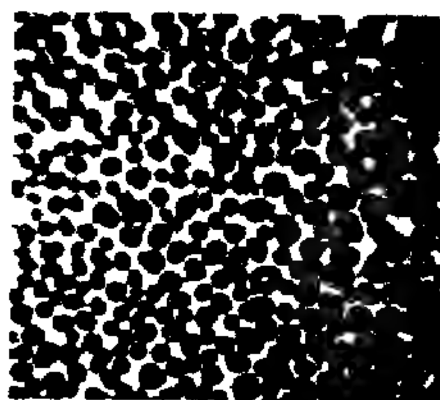
碘是一种化学性质较为活泼的非金属，具有紫黑色或深紫红色的结晶体，晶体结构为正交晶系，熔点为113.6℃。本实验选择加热温度在110-140℃之间，蒸汽压约为13KPa；冷却速率在0.6-3℃/sec之间。

在PET膜表面上得到了碘的沉积物，采用X光衍射确定沉积物的晶体结构，用光学显微镜观察其形貌，在十万分之一的精密天平上测定了沉积物的升华速度，对分形凝聚体测定了其分形维数。分形凝聚体在暴露于空气中约半小时后，由于碘的升华，其图形失去分形特征。

三 结果与讨论

在PET薄膜上得到的碘的沉积物大致分为五种不同的形态：基本均匀分布的碘颗粒，小颗粒分形凝聚体，网络形生成物，枝晶，以及结晶良好的碘晶体。前面四种沉积物的光学显微镜照片分别如图1中的a, b, c, d所示，a, b, c的放大倍数为20，d的放大倍数为40。

从图1可以看到，图a和图b形态比较接近，在图a的实验中，冷却速度约为3℃/sec，而图b的为0.6℃/sec。当冷却速度较大时，处于气相中的碘原子很容易形成大量的晶核，结晶析出，得到基本上均匀分布的颗粒。而当冷却速度较低时，晶核数目不太多，产生的晶粒也较少，当达到某个临界点时，产生了空间相关性，在气固界面上形成分形图形的"种子"，随着不断的凝聚，最后得到了分形凝聚体，该分形体分维为D=1.68，颗粒尺度范围在25-110μm之间。



(a)



(b)



(c) (d)

图1 不同形态的碘的沉积物： (a)均匀分布的颗粒，(b)分形凝聚体，(c)网络形生成物， (d)枝晶。

图1中的c和d也有共同之处，它们都由生长良好的晶体组成，但外观形态差别很大。在图c的实验中，冷却速度约为2℃/sec，而图d的为0.8℃/sec。在图c中，由于冷却速度较大，晶体迅速长大，从不同晶核处长出来的晶体会交迭在一起，最终形成网络状生成物；在图d中，由于冷却速度较慢，同时其它的实验条件，如温度、浓度等，也比较接近于平衡态，因而获得了对称性良好的枝晶。

应该说明的是，在上面的讨论中只涉及到冷却速度，实际上其它的实验参量，如温度、浓度以及它们的分布，对不同形态的沉积物的形成都有影响。

四 结论

碘在气相沉积时会在气固界面上形成分形凝聚体，该分形体由碘的小颗粒组成，颗粒尺度为25-110μm，分形维数D=1.68，它的形成机理与已报导过的分形生长模型不同，可以用核晶凝聚模型予以解释。

随着实验条件的不同，气相沉积物的形态可以完全不同，如基本均匀分布的颗粒，网络形生长物，以及枝晶等；实验结果表明，冷却速度是影响沉积物形态的主要参量之一。

参考文献：

1 Jizhong Zhang Physical Review B. Vol 41, No.13, (1990), 9614-9616
2 J Z Zhang. J.Phys ·Condens Matter 3, (1991), 8005-8009
3. 张济忠、李恒德，金属学报，Vo. 26, No 4, (1990), B277-280
4 张济忠 物理学报，Vol 41 No 8, (1992), 1302-1307
5 J Z Zhang, C H Zhang, and H D Li, J Phys :Condens Matter 4, (1992), L245-L248
6 Jizhong Zhang and Delu Liu, J.Materials Science, Vol.27, (1992), 4329-4332

分维度对单畴粒子聚集体矫顽力的影响

王前　　孙强

西南师大物理系，重庆 630715)

摘要　本文用偶极场近似法导出了单畴粒子聚集体的矫顽力与其分维度的关系式，讨论了分维度对矫顽力的影响，结果表明聚集体的矫顽力随其分维度的增加而减小；并通过对分维度与堆集密度之间关系的讨论，证实了所得结论与现有的理论结果和实验结果之间的一致性。

一、引言

矫顽力的大小是影响磁性记录材料质量的一个重要参数，提高矫顽力最有效的方法是减小粒子的线度，使之成为单畴粒子。但是在单畴粒子的集合体中，由于粒子间磁相互作用的存在，粒子要发生聚集。大量的实验分析和理论研究表明：磁性粒子的聚集体具有分形结构[1-6]。*G·A·Mikasson* 等人用惰性气体蒸发法制备出 C 超微粒[2]，电镜分析结果表明粒子的聚集体具有分形结构，单畴粒子(粒径 $r\leqslant 8nm$) 聚集体的分维度为 $1.9<D\leqslant 2.05$。后来，*A·B·Eriksson* 等人采用分级集团－集团聚集模型(Hierarchical Cluster　Cluster Aggregation Model) 对该实验进行了模拟研究[3]，所得结果为 $1.67\leqslant D<1.8(r\leqslant 8nm)$。分维度 D 与半径为 R 区域内的粒子数 N 之间的关系为

$$N\sim R^{D} \tag{1}$$

D 描述了粒子的聚集程度，它的大小将影响聚集体的矫顽力。在本文中我们将讨论单畴粒子聚集体的分维度对其矫顽力的影响。

二、偶极场近似

由于聚集体是一个多体相互作用系统，若要严格地导出分维度 D 与矫顽力 H_c 之间的关系，目前在理论上还存在着很大的困难。本文我们将采用偶极场近似法[7]，其基本思想是，把聚集体中每一个单畴粒子视为一个具有磁矩 μ 的偶极子，聚集体中粒子之间的静磁相互作用看成是某点之外的其它所有偶极子产生的磁场与该点的相互作用，相互作用场由聚集体中粒子的几何排列所决定。由电磁学可知：磁矩为 μ 的偶极子在位置矢量为 $\vec{R}$ 的 o 点处产生的磁场为

$$\begin{aligned}\vec{H}_1&=\frac{1}{4\pi\mu_0}\left[-\frac{\vec{\mu}}{R^3}+\frac{3\vec{R}(\vec{\mu}\cdot\vec{R})}{R^5}\right]\\&=\frac{\mu}{4\pi\mu_0R^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_R+\sin\theta\,\hat{e}_\theta)\end{aligned} \tag{2}$$

其中 μ_0 为真空磁导率，θ 为 $\vec{R}$ 与 $\vec{\mu}$ 的夹角，$\hat{e}_R$ 和 $\hat{e}_\theta$ 分别为 $\vec{R}$ 与极角 θ 的单位矢量。$\vec{H}_1$ 的量值为

$$H_1=\frac{\mu}{4\pi\mu_0R^3}(1+3\cos^2\theta)^{1/2} \tag{3}$$

设磁矩 $\vec{\mu}$ 的取向是无规的，H_1^2 对所有方向的平均值为

$$\overline{H_1^2}=\int H_1^2\frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu^2}{(4\pi\mu_0 R^3)^2}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(1+3\cos^2\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\mu^2}{(4\pi\mu_0 R^3)^2} \qquad (4)$$

其中Ω为立体角，φ与θ表征0点的方向。设dN是半径R到$R+dR$区域中的偶极子数，dN个偶极子所产生的场为

$$\bar{H}^2_{dN} = \bar{H}^2_1\cdot dN \qquad (5)$$

由(1)式得

$$dN = ADR^{D-1}dR \qquad (6)$$

其中A为系数。将(4)和(6)代入(5)得

$$\bar{H}^2_{dN} = \frac{2AD\mu^2}{(4\pi\mu_0)^2}R^{D-7}dR \qquad (7)$$

对上式积分便得到除某个偶极子以外，其它所有偶极子所产生的场

$$\bar{H}^2 = \int_r^{R_0}\frac{2AD\mu^2}{(4\pi\mu_0)^2}R^{D-7}dR$$

$$= \frac{2AD\mu^2}{(4\pi\mu_0)^2(6-D)}\left(\frac{1}{r^{6-D}}-\frac{1}{R_0^{6-D}}\right) \qquad (8)$$

式中r为单畴粒子的半径，R_0为聚集体的半径、因$r<<R_0$，$6-D>0$，故我们可忽略(8)式中含R_0的项，从而有

$$\sqrt{\bar{H}^2} = \frac{\sqrt{2A}\mu}{4\pi\mu_0}\sqrt{\frac{D}{6-D}}r^{\frac{D}{2}-3} \qquad (9)$$

由于磁矩取向的无规性，可设

$$\bar{H}_x^2 = \bar{H}_y^2 = \bar{H}_z^2 = \frac{1}{3}\bar{H}^2 \qquad (10)$$

忽略$\bar{H}_z$与$\sqrt{\bar{H}_z^2}$之间的差异则有

$$\bar{H}_z = \frac{\mu}{4\pi\mu_0}\sqrt{\frac{2AD}{3(6-D)}}r^{\frac{D}{2}-3} \qquad (11)$$

上式便为聚集体中除某个粒子以外其它所有粒子产生的磁场沿Z方向的分量值，设外场的方向沿着Z方向，则在反磁化过程中，$\bar{H}_z$的作用就是使聚集体退磁，因此聚集体矫顽力为

$$H_c = H_c^0 - \bar{H}_z$$

$$= H_c^0 - \frac{M_s}{3\mu_0}\left[\frac{2AD}{3(6-D)}\right]^{1/2}r^{\frac{D}{2}} \qquad (12)$$

其中H_c^0为孤立粒子的矫顽力，$M_s = \mu/\frac{4}{3}\pi r^3$为粒子的饱和磁化强度。因$\frac{1}{6}D<1$，故有

$$\sqrt{\frac{D}{6-D}} = \frac{1}{\sqrt{6}}D^{1/2}\left(1-\frac{D}{6}\right)^{-1/2} \approx 6^{-1/2}D^{1/2}\left(1+\frac{1}{12}D\right)$$

$$H_c = H_c^0 - \frac{M_s}{9\mu_0}A^{1/2}r^{D/2}D^{1/2}\left(1+\frac{D}{12}\right) \qquad (13)$$

由此可得$\frac{\partial H_c}{\partial D}<0$，即聚集体的矫顽力随其分维度的增大而减小。

三、讨论

在现有的理论和实验中，通常用堆集密度P（又称为填充因子）来表述聚集体的矫顽力。P的定义为

$$P = 聚集体中粒子的密度\ \rho/粒子在形成聚集体之前的密度\ \rho_0 \qquad (14)$$

若矫顽力由粒子的形状各向异性所决定，则 Ne'el 已从理论上导出[8]

$$H_c(P) = H_c(0)(1 - P) \quad (15)$$

式中 $H_c(0)$ 为孤立粒子的矫顽力。然而人们发现关系式

$$H_c(P) = a_v(1 - P) + b_v \quad (16)$$

能更好地与实验结果相吻合[9]。其中 a_v 与孤立粒子的矫顽力有关(由形状各向异性所决定)，b_v 与磁晶各向异性有关。对于针状单畴粒子，Knowles 采用磁极间平均距离近似法导出了下述表达式

$$H_c(P) = H_c(0)[1 - C(M_s/H_c(0))^2 P^{1/3}] \quad (17)$$

其中 $H_c(0)$ 为孤立粒子的矫顽力，C 为常数，M_s 为粒子的饱和磁化强度。由此可见，聚集体矫顽力随其堆集密度的增大而减小。

由(12)、(13)、(15)～(17)式，我们可以看到分维度 D 和堆集密度 P 都可用来描述因粒子的聚集而引起的矫顽力的减小。事实上，对于分形聚集体，D 与 P 之间存在着一定的关系，试考察 No 个粒子在 d 维空间中，体积为 V 区域中的聚集，聚集前粒子的密度为 $\rho_0 = No/V$，聚集后形成平均半径为 $\bar{R}$ 的集团，集团的粒子数为 $N \sim (\bar{R})^D$，集团的平均密度为

$$\rho \sim \frac{N}{(\bar{R})^d} \sim \frac{(\bar{R})^D}{(\bar{R})^d} = (\bar{R})^{D-d} \quad (19)$$

由堆集密度的定义(14)式得

$$P = \frac{\rho}{\rho_0} \sim \frac{V_0}{N_0}(\bar{R})^{D-d} \sim (\bar{R})^D \quad (20)$$

或表为

$$D = a + b\ln P \quad (21)$$

其中 a 和 b 为系数。上式表明聚集体的分维度随其堆集密度的增加而增加，这一结论已被 Ansell 等人所作的计算机模拟结果所证实[10]。

从上面的讨论我们看到由于聚集体的分维度随其堆集密度的增加而增加，而聚集体的矫顽力随堆集密度的增加而减小，因此聚集体的矫顽力随其分维度的增加而减小。这一结论与我们用偶极场近似所得的结论是一致的。

参考文献

[1] S·G·Kim and J·R·Block，J·colloid Interface Sci·166(1987)431

[2] G·A·Niklasson and A·Torebring，Phys·Rev·Lett·60(1988)1735

[3] A·B·Erikson and M·Jonson，Phys·Rev·B40(1989)884

[4] P·M·More，k·Botet·and R.Jullie，J·Phys·A 20(1987)L975

[5] G·Helgessen，A·T.Skjeltrop，P·M·More et al，Phys·Rev·Lett. 61(1988)17360

[6] Liu·B·X·J·R·Ding and L·J·Hung，Phys·Rev·B40(1989)7432

[7] J·E·Knowles，J·Magn·Mater·25(1981)105

[8] L·Néel，C·R·Acad·Sci·(Paris) 224(1977)1488

[9] B·F·Eldridge，J·Appl·Phys·32(1961)247s

[10] C·G·Ansell and E·Dickinson，Phgs·Rev·A 35(1987)2349

分形气溶胶聚合体的光学特性及其遥感的有关问题

王志恩　胡欢陵　周军
中科院安光所

气溶胶是悬浮在空气中的颗粒物，长期以来受到人们的极大关注，但许多关于气溶胶的研究都是基于一些假设的基础上进行的，比如气溶胶粒子的形状大都被假设为球形或某种规则形状。但是气溶胶粒子的真实形状千差万别很难准确描述。分形理论的诞生为气溶胶粒子形状的描述提供了一种新途径。研究发现象烟粒、泥土粒子等这些有小单元粒子组成的气溶胶聚合体具有一定特征分形维数的分形形态[1, 2]，分形气溶胶是由一定的动力学过程（如布朗运动）而形成[3]，表现出与球形粒子不同的特性。K.-H Naumann研究发现分形气溶胶具有比球形气溶胶低的沉降速度和快的凝聚速度[4]。分形气溶胶粒子的光学特性也得到了广泛的研究[5, 6, 8]。下面首先介绍这类气溶胶聚合体的分形特征及光学特性，然后讨论将基于球形粒子光学特性的遥感方法用于这类气溶胶时的有关问题。

一、气溶胶聚合体的分形特征及光学特性

1. 分形特征

象烟粒这类气溶胶是由许多小球形粒子聚合组成的稀疏的随机的簇状物[2, 5]，每个聚合体具有二个基本尺度参数：单元粒子的直径d(20-100nm)，组成聚合体的单元粒子数目N。在一个体系中每一个聚合体的d、N都可能不一样，对于由同一大小单元粒子组成的体系的大小分布（N的分布）可以用具有几何标准偏差为δ_g的离散对数正态概率函数P(N)来描述[6]。

S Forrest 和 T Witten 首先发现团簇状的聚合物具有一定分形维数的分形形态[1]，后来的研究表明分形形态是聚合物的普遍特征[3]。W Schaefer 和 D Keefer用小角X射线散射的方法也证明了多孔的硅气溶胶粒子也具有分形结构[7]。分形可以理解为一个物体具有标度对称不变性，也就是说在各种不同尺度标度上看起来是一样。在聚合物研究中常用的分形维数是质量分形维数，它是根据气溶胶聚合物的旋转半径来定义的[2, 8]。如果气溶胶聚合物中第i个粒子的质量是m_i，离质量中心的距离是r_i，聚合物总的质量是M，则聚合物旋转半径Rg可以依据质量的二阶矩定义如下：

$$M\,Rg^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2$$

Rg与单元粒子数目N具有如下幂指数关系：$Rg = c\,a\,N^{1/D}$

式中a是单元粒子的半径，c是比例常数，D就是常用的非整数的分形维数。按这种定义烟粒的分形维数约为1.78。有了分形维数这个特征参数，这类几何形状不规则但具有统计相似性的气溶胶聚合体特性才有可能方便地表式出来。

2. 光学特性

基于分形理论以及一些假设和用数值模拟和解析方法对这类气溶胶的光学特性已进行了许多研究，尽管几种方法给出的结果有所差别，但在一定的范围内基本一致[5, 6, 8, 9, 10,

11]。下面就以多分散系(单分散系是多分散系的特例)给出分形气溶胶聚合体的散射、吸收特性[6]。假设体系的复折射率为m,分布为P(N),分形维数为D,入射波长为λ(λ》d)。先定义以下关系式:

等体积直径:$D_{eq}=N^{1/3}d$,$N=K_f(Rg/d)^D$

$G(m)=(m^2-1)/(m^2+2)$,$E(m)=-Im[G(m)]$,$F(m)=|G(m)|^2$

$$Rg^2=\frac{\sum_N Rg^2(N)N^2P(N)}{\sum_N N^2P(N)} \qquad N^{*q}=\sum_N N^qP(N)$$

$k=2\pi/\lambda$, $x_p=\pi d/\lambda$ (x_p《1) ,$q=4\pi Sin(\theta/2)/\lambda$ (θ为散射角)

利用以上关系式其吸收、散射特性可以表示如下:

吸收截面:$$C_{abs}=\frac{4\pi N^{*1}x_p^3E(m)}{k^2}$$

散射截面:$$C_{sca}=\frac{8\pi N^{*2}x_p^6F(m)}{3k^2}\left(1+\frac{4}{3D}k^2Rg^2\right)^{-D/2}$$

微分散射截面:$$C_{VV}(\theta)=\frac{N^{*2}x_p^6F(m)}{k^2}f(q^2Rg^2)$$ (垂直极化光入射)

$X<1.5D$时: $f(X)=exp(-X/3)$

$X>1.5D$时: $f(X)=[3D/(2eX)]^{D/2}$ (e=2.71828)

但要注意的是以上微分散射截面只适用于前向散射。V. Berry利用平均场方法给出了微分散射截面的另一表达式,适用于整个散射角[5]。

$$C_{VV}(\theta)=\frac{Nx_p^6F(m)}{k^2}\left(1+\frac{(N-1)\sin\{(D-1)\tan^{-1}[2kR\sin(\theta/2)/b]\}}{(D-1)(1+4k^2R^2\sin^2(\theta/2)/b^2)^{(D-1)/2}2kR\sin(\theta/2)/b}\right)$$

$R=aN^{1/D}$, $b=[(D+1)D]^{1/2}$

二、讨论

象烟、泥土之类的分形气溶胶聚合体的光学特性不仅依赖其形状而且依赖其折射率,这类气溶胶的折射率依赖于其物化特性,并随波长而变化。文献[6]中取可见波段的代表值为1.75+0.3i,红外波段的代表值为3+i。下面的计算中也取这种值。分形维数取1.78。

体积消光P_{ext}是由单位体积内的消光截面乘以波长来定义的。球形粒子的体

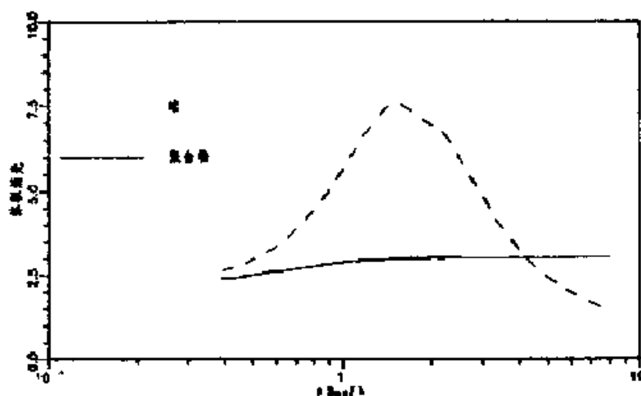
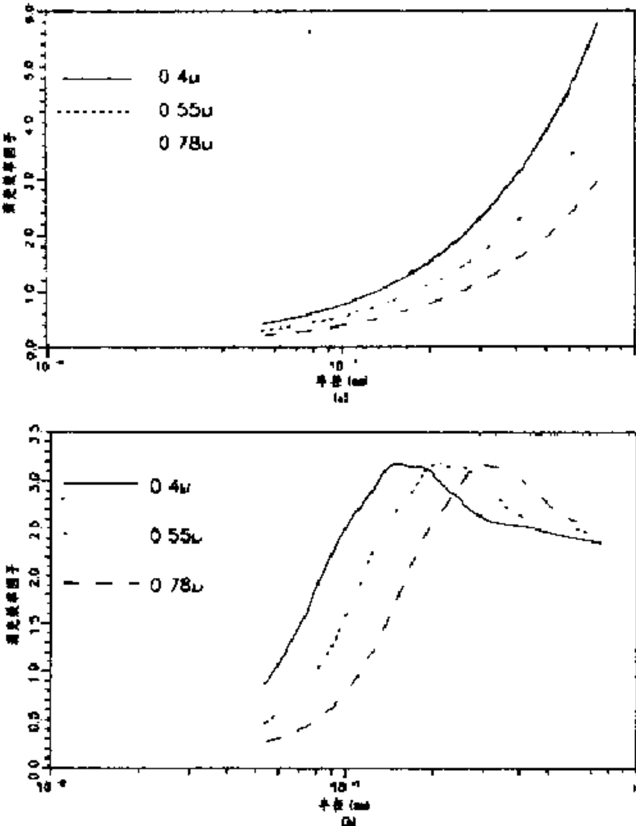


图 · 体积消光随π Deq/λ 的变化(λ=555nm, d=40nm)

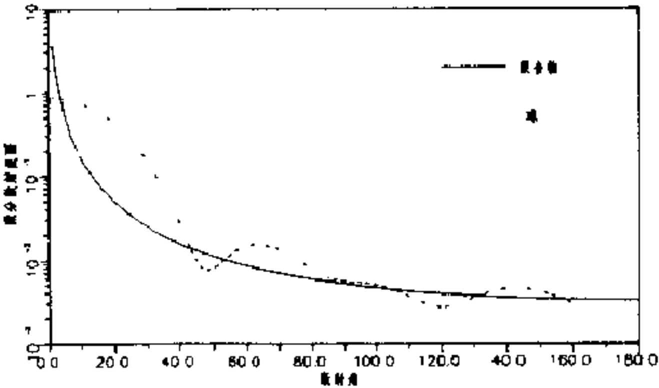
积消光可由Lorenz Mie理论计算 [12] 若分形气溶胶的散射吸收比为ρ_{sa}则分形气溶胶的P_{ext}为[6]: $P_{ext}=6\pi E(m)(1+\rho_{sa})$

图一给出了这类气溶胶聚合体与其等体积球形粒子的体积消光随尺度参数的变化。由图可见分形气溶胶聚合物的体积消光随尺度增加而增加并渐趋一定值，这意谓着随尺度增加散射在消光中所占的份额随之增加。等体积球形粒子在达到最大值后迅速下降，二者变化规律相差甚大，这说明气溶胶聚合体的消光不能用等体积球形粒子的消光来等效。

遥感方法是气溶胶研究的重要手段之一。基于球形粒子光学特性的遥感方法可用来遥测气溶胶浓度、谱分布以及它们的时空分布。依据球形粒子的Mie散射理论利用测量的气溶胶的小角散射特性或消光随波长变化特性或二者的联合可以反演出气溶胶粒子的谱分布[14]。图二a，b分别给出了不同波长分形气溶胶与等体积球形粒子消光效率因子随等体积半径的变化(分形气溶胶也是以等体积球形粒子的几何截面作其几何截面)。分形气溶胶的消光效率因子随等体积半径增加而单调增加，这与球形粒子消光效率因子的变化出现极大值不同。图三给出了分形气溶胶聚合体的散射强度随角度的变化 分形气溶胶的角散射特性随散射角单调变化，而等体积球呈振荡状态。这种光学特性上的差异意味这套方法不能有效地用于这类气溶胶。由测量的分形气溶胶聚合体的光学特性利用基于球形粒子的反演方法反演出来的光学等效球形粒子的谱分布与其等体积球形粒子的谱分布显然不一样。这样反演结果仅能在光学特性上等效不能反应出聚合物大小分布的信息。对于单分散系现可以利用散射消光特性求出聚合体的基本参数 d、N、Rg [13]，但对于多分散系确存在许多问题。光学粒子计数器是基于球形粒子散射特性来测量气溶胶谱分布的一种仪器，因此用它来测量烟粒这类气溶胶时就必须特别小心。



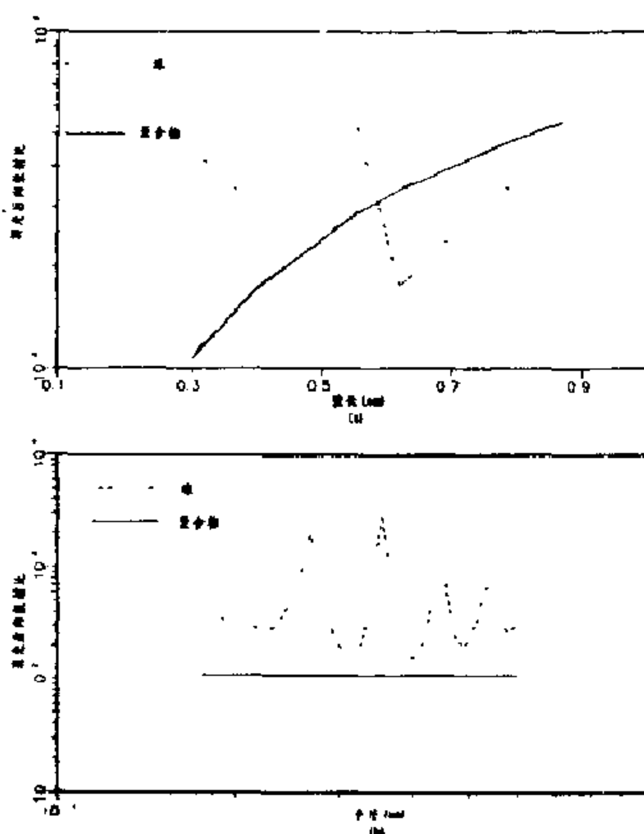
图二 消光效率因子随等体积球形粒子半径的变化 (a) 分形气溶胶聚合体 (b) 等体积球 (d=40nm)



图三 分形气溶胶聚合体及其等体积球形粒子的角散射特性(d=40nm, N=5000)

激光雷达现已成为大气遥感的一种重要手段，已广泛用于测量气溶胶时空分布[15]。解激光雷达方程中要用到的一个重要参数是气溶胶的消光后向散射比。图四a，b分别给出了分形气溶胶聚合体的消光后向散射比随波长和尺度的变化。分形气溶胶聚合体的消光后向散射比对尺度(N的大小)不敏感，但对波长却很敏感。球形粒子的消光后向散射比则不仅取决于尺度而且取决于波长。因而激光雷达测量烟这类气溶胶时，应该依据这类气溶胶的特点和所用波长作具体选择，若用球形粒子的消光散射比解激光雷达方程将带来误差。

从上面分析可见，由于烟粒这类分形气溶胶光学特性与球形气溶胶粒子存在差异，用基于球形粒子的遥感方法测量这类气溶胶时必须具体分析。篇幅所限这儿不做更具体的讨论。



图四　消光后向散射比随波长和聚合体和球形粒子半径的变化

a) N=5000　(b) 波长=550nm (d=40nm)

参考文献:

[1] S. R. Forrest and T. A. Witten, J. Phys A 12, L109-117(1979)

[2] R. J. Samson, G. W. Mulholland and J. W Gentry, Langmuir 3, 272-281(1987)

[3] J. E. Martin and A. J. Hurd, J. Appl. Cryst. 20, 61-78(1987)

[4] K.-H. Naumann and H. Bunz, J Aerosol Sci 23, Suppl.1 S361-S364(1992)

[5] M. V. Berry and I C Percival, Optica Acta 33, 577-591(1986)

[6] R. A. Dobbins and C. M. Megaridis, Appl. Opt. 30, 4747-4754(1991)

[7] D. W. Schaefer and K D Keefer, Phys. Rev. Lett. 56, 2199-2202(1986)

[8] H. Y Chen, M. F. Iskander and J E Penner, J. Mod. Opt. 37, 1871-181(1990)

[9] R. D. Mountain and G. W. Mulholland, Langmuir 4, 1321-1326(1988)

[10] R. A. West, Appl. Opt 30, 5316-5324(1991)

[11] B. L Drolen and C. L. Tien, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 37, 433-448(1987)

[12] A. R. Jones, J. Phys. D: Appl. Phys. 12, 1661-1672(1979)

[13] C. M. Sorensen, J. Cai and N. Lu, Appl. Opt. 31, 6547-6557(1992)

[14] T. Nakajima, M. Tanaka and T. Yamauchi, Appl. Opt. 22, 2951-2959(1983)

[15] 宋正方，孙凤仪，韩景城译，大气激光监测，科学出版社，1984

DLA模型的扩展及其分形聚集体的各向异性*

南昌大学物理系　　蒋进宇　张　萌
李渭清　范传光

传统的DLA(扩散控制聚集)模型中，布朗粒子是从距生长体充分远处开始进行无规行走，一旦走到生长体相邻的格子上就粘接上，新的布朗粒子又开始行走，分形聚集体不断长大。计算机所作的二维DLA模型生长模拟结果表明，其分形体的豪斯道夫维数D≈1.7左右，并具有很好的各向同性[1]。

何建国等所作的计算机模拟表明DLA形态的分形结构也可以在粒子扩散距离相对短的条件下获得[2]。

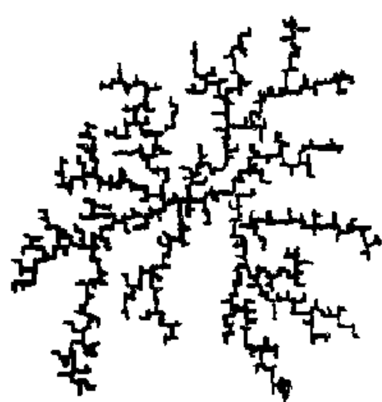
在此基础上，我们着重研究了扩散区域的大小对分形聚集体形态的影响。为此，我们在计算机模拟实验(二维)的程序中设置了两个参数K_1,K_2。具体模拟过程如下：初始核置于原点，R_0为随后生长的分形体的最远点到原点的距离(开始时R_0为0)。布朗粒子在R_0+1至$R=R_0+K_1$的圆环内产生，并开始作无规行走，直至碰上分形体，成为分形体的一部分。若布朗粒子随机行走过程中超出$R_2=R+K_2$则被取消。如此反复进行。显然K_1,K_2越大表示布朗粒子扩散区域越大。

应用上述模型，在XT 286微机上模拟的部分结果见表一，表中D为分数维，Rc为分形体重心到原点的距离，n为分形体所含粒子数。相应的分形聚集体形态见图一至图四。

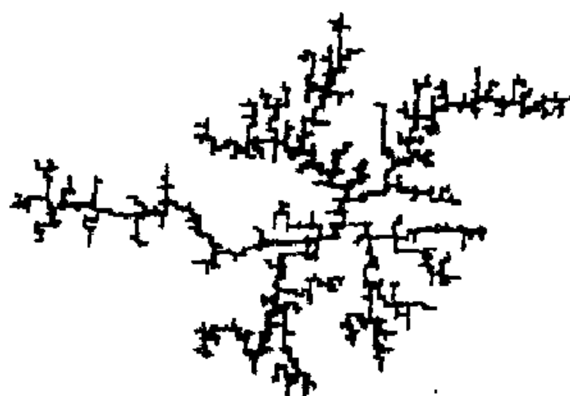
表一、计算机模拟结果

	n	K_1	K_2	Rc	D
图一	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.73
图二	[illegible]	20	[illegible]	6.1	1.71
图三	[illegible]	5	[illegible]	[illegible]	1.57
图四	[illegible]	2	[illegible]	[illegible]	1.50

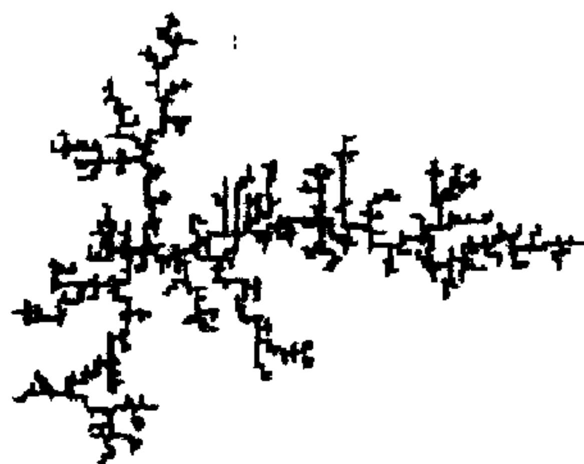
* 国家自然科学基金资助的项目



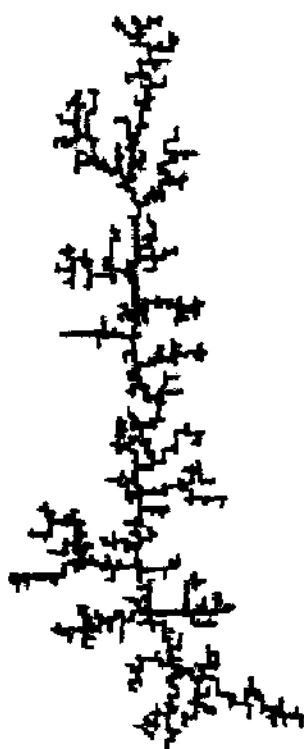
图一



图二



图三



图四

上述模拟结果表明，当布朗粒子的扩散区域较大时，所形成的分形体具有较好的各向同性，其形态及分数维与传统的DLA模型相近似(例如图一)。而随着K_1或K_2的减小，布朗粒子扩散区域减小，所形成的分形体的各向异性明显增强，甚至出现基本沿单向生长的形态

所如图四)。

值得注意的是,通常在研究分形聚集体各向异性生长时,都是通过对不同方向(例如 x 与 y)的生长参数(例如扩散速率、扩散区域、粘接率等)作不同的规定或限制来实现的。(例如[1])。而本文所述的模拟过程并没有对生长参数作任何方向上的限制,因此,在 K_1 与 K_2 取较小值时,模拟生长所出现的各向异性与上述那些在不同方向上作了外加规定所造成的各向异性在形成机理上有着本质上的区别;二者所形成的分形聚集体在形态上也相异。

大家知道,DLA 生长之所以形成分形结构,主要是因为生长体较外层的分枝具有屏蔽作用,使得布朗粒子不容易深入并粘接到较内层的分枝上。我们在 K_1 和 K_2 取较小值时的模拟,意味着限制布朗粒子只从生长体外的近处扩散聚集。在生长初期,受随机涨落的影响某个或某些方向先开始生长。在随后的生长过程中,离已生长方向较远产生的布朗粒子须作较长距离的扩散才能到达生长体,而由于扩散区域小,它们被取消的几率较大。相反,在已生长方向附近产生的布朗粒子较易到达生长体。其效果相当于强化了生长体较外层分枝的屏蔽效应,从而使得各向异性生长的趋势不断得到放大与加强,最后形成各向异性的聚集体。

由于设置了参数 K_1 与 K_2,传统的 DLA 模型被扩展了。改变 K_1 与 K_2 的取值,扩展后的 DLA 模型不仅可用于传统的 DLA 型分形体的研究,还可以用于形态不同的各向异性聚集体的研究。例如可以用来模拟金属合金中单分支枝晶的生长等。K_1 与 K_2 的数值反映了晶体(或准晶体)生长速率、粒子扩散速率以及粒子浓度等物理量之间的数量关系。

我们还研究了产生布朗粒子区域的大小对分形聚集体形态的影响,进一步扩展了 DLA 模型。这方面的工作正在整理之中,拟另文发表。本文作者与李莉、刘新强等进行过有益的讨论,特此致谢。

参考文献:

[1]T. A. Witten and M. Sander, Phys. Rev. Lett. 47,(1981)1400

[2][日]高安秀树《分数维》 地震出版社 1989.12 第一版

[3]侯建国、毕岭松、吴自勤,物理学报,39(1990),1183

[4]冯跃新等,物理学报,41(1992),1

耗散孤立波的长期行为及分形维估计

储志俊　　田立新*

(江苏工学院)

耗散系统中非线性发展方程的长期特征的研究，近年来作了大量的工作，特别是提出非级性发展方程的惯性流形后，在一定程度上将无穷维动力系统的约化为有限维动力系统的研究，这方面工作主要集中于研究描述湍流的 N-S 方程、K-S 方程，反应扩散问题，研究它们的惯性流形，整体吸引子，凝聚以及锥不变性质，吸引子的 Hausdorff 维数，Fractal 维数，Lyapunov 指数等，但是对于孤立波问题中的吸引子，分形维研究目前很少涉及。本文是这方面工作的开始，主要研究耗散孤立波的长期特征、整体吸引子、凝聚及锥不变性质、整体吸引子的分形维估计。

1 引　言

称方程(1.1)为耗散孤立波方程

$$u_t + \nu u_{xxxx} + \alpha u u_x + u_{xxx} + \beta u = 0 \tag{1.1}$$

满足$(x,t)\in[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]\times R^+$，$\alpha>0$为常数。

初值条件　$u(x,0)=u_0(x)$　(1.2)

边界条件　$u(\pm\frac{L}{2},t)=u_x(\pm\frac{L}{2},t)=0$　(1.3)

式(1.1)中，β为实数。$\beta=0$，以及去掉 νu_{xxxx} 项后就是经典的 kdv 方程。$H=L^2(I)$、$I=[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$

本文主要研究 $\nu=1$ 时，(1.1)—(1.3)的长期特征，对于一般的 ν 以及 $\nu\to 0^+$ 时长期特征的研究，我们将另文研究。

2 耗散孤立波方程的整体吸引子

对半群 $\{S(t)\}$，$X\subset H$ 称为 H_w 的吸引子，若满足：(1)X 在 H 中紧，(2)$S_t X=X$，t

* 中科院力所L. N. M 开放实验室

$\geqslant 0$、(3) 对任意有界集 B，$S_t B \to X$，$t \to \infty$，即 $dist(S_t\beta, X) \to 0$，$(t \to \infty)$.

引理 2.1　设 $u(x,t) = y(x,t) + \psi(x)$，$\psi$ 仅是 x 的某个函数，$\psi \in L^2(I)$，若令

$$J(y,\psi) = \|y_{xx}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_I \psi' y^2 dx + \beta\|y\|^2$$

则当 $\mu > 0$，$0 < \varepsilon < 1$ 时，存在 $\psi \in C_0^\infty(I)$，使 $J(y,\psi) \geqslant \varepsilon\|y_{xx}\|^2 + \mu\|y\|^2$，对任意 $Y \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$.

引理 2.2　若 $u(x,t)$ 为 (1.1) - (1.3) 对任意 $t \geqslant 0$ 所存在的解，则存在 $R = \mu^{-1}\|F\| + \frac{4r}{\delta}L$，与初值条件无关，使得

$$\limsup\|u(x,t)\| \leqslant R$$

进一步，对任意方程的解 $u(x_1,t)$，存在时间 $t_u > 0$，在 t_u 之后，u 进入 $L^2(I)$ 中半径为 $2R$ 的球 B_{2R} 中且留在 B_{2R} 内。

定理 2.1　B_{2R} 为 (1.1) - (1.3) 的吸收集。

引理 2.3　设 $u(t) = S(t)u_0$，且 $t \geqslant t_0 > 0$ 时，$u(t) \in B_{2R}$，则存在 $R_1 = \max\{24R, (\frac{1}{4}|\beta| + 16)^{\frac{1}{4}}R\}$，使得

$$\limsup\|A^{\frac{1}{4}}u(t)\| \leqslant R_1$$

其中 $A = \frac{\partial 4}{\partial x^4}$，若令 $u(t) \in B_{2R} = \{u \in H \mid \|A^{\frac{1}{4}}u\| \leqslant 2R\}$，$t_1 \geqslant t_0$ 时，则有 $t \geqslant t_1$ 时，$u(t) \in B_{2R}$，进一步，$B_{2R} \cap B_{2R}$ 为吸收集。

定理 2.2　整体吸引子 $A = \bigcap_{t>0} S(t)B_{2R}$

3　耗散孤立波方程的凝聚及锥不变性质

$A = \Delta^2$，$D(A) = H^4(I) \cap H_0^2(I)$，特征值 $\{\lambda_k\}$，特征向量为 $\{W_k\}$，记 P_N 为 $D(A)$ 到 $\mathrm{Span}\{W_1, \cdots, W_N\}$ 的正交投影，$Q_N = I - P_N$，记 $B = \bigcup_{t \geqslant t_0} S_t(B_{2R} \cap \beta_{2R})$ 为吸收集。设 $0 \leqslant r \leqslant 1$，锥不变性质指锥 $C_N(r) = \{[u,v] \in B \times B \mid \|Q_N(u-v)\| \leqslant r\|P_N(u-v)\|\}$ 是严格不变的，即若 $\|Q_N(u-v)\| = r\|P_N(u-v)\|$，$[u,v] \in B \times B$，$u \neq v$，则成立 $\|Q_N(S_t u - S_t v)\| \leqslant r\|P_N(S_t u - S_t v)\|$，$t \geqslant 0$，凝聚性质是指，存在常数 $\beta > 0$，使 $\|S_t u - S_t v\| \leqslant \|u - v\|e^{\beta t}$，其中 $[u,v] \in B \times \beta$，$[S_t u, S_t v] \in C_N(r)$，$t \geqslant 0$

引理 2.1　设 $B = S_{(t)}B_{2R}$，若 u_1^0，$u_2^0 \in B$，$u_1(t) = S(t)u_1^0$，$u_2(t) = S_{(t)}u_2^0$，$t \geqslant 0$，则

有

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leq\|u_1(0)-u_2(0)\|e^{-\beta t}\qquad t\geq 0$$

其中 $\beta=\frac{15}{8}\lambda_1+2\beta-\frac{7}{8}(2R\alpha)^{\frac{8}{7}}$

引理 2.2　若 $[u_1(t),u_2(t)]\in B\times B$，$0<r\leq 1$，$[S(\tau)u,\ S(\tau)u_2]\bar{\in}C_N(r)$，对任意 $\tau\in(0,t)$，当特征值 $\{\lambda_n\}$，n 充分大时，即有

$$\lambda_{N+1}>\max\{|\beta|^4,\ (1+CR)^4,\ (1+\frac{\sqrt{2}}{r})^4\},\ c=\frac{2^{\frac{5}{2}}}{r}d$$

时下式成立

$$\|S(\tau)u_1-S(\tau)u_2\|\leq\|u_1-u_2\|\exp(-\lambda_{N+1}\tau)$$

引理 2.3　若 $v_{N+1}-\mu_N>0$，则 $C_N(r)$ 是严格不变的，这里

$$v_{n+1}=\lambda_{N+1}+\beta-\frac{\sqrt{2}}{r}\lambda_{N+1}^{\frac{3}{4}}-CR^{\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{\frac{1}{4}}$$

$$\mu_N=\lambda_N-\beta+(r^2+1)\frac{1}{2}\quad\lambda_N^{\frac{3}{4}}+C_1R^{\frac{1}{2}}\lambda_N^{\frac{1}{4}}$$

定理 3.1　存在 N，对 $0<r\leq 1$，当 $\lambda_{N+1}-\lambda_N>\max\{1,\ \frac{2}{3}|\beta|\}$，$\lambda_{N+1}>\max\{(\frac{C-C_1}{6})^4R^2,\ (\frac{C_1}{4})^4R^2,\ \frac{1}{6}[\frac{2}{r}-(r^2+1)^{\frac{1}{2}}],\ [\frac{1}{6}(r^2+1)^2]^4\}$ 时成立

(1) 锥 $C_N(r)$ 是不变的，即任意 $t\geq 0$，$[u_1,u_2]\in C_N(r)$ 时，$[S(t)u_1,S_{(t)}u_2]\in C_N(r)\setminus\partial C_N(r)$。

(2) $B\times B\setminus C_N(r)$ 是指数凝聚的，即 $[u_1,u_2]\in B$，$[S(t)u_1,\ S(t)u_2]\bar{\in}C_N(r)$ 时，有

$$\|S(\tau)u_1-S(\tau)u_2\|\leq\|u_1-u_2\|\exp(-\lambda_{N+1}\tau),\quad\tau\in(0,t).$$

4　耗散孤立波方程的惯性流形

若对无究维空间 H 中的一个有限维 Lipschitz 不变流形，它是指数方式吸引所有轨道，并且它含有系统的整体吸引子，则流形就是惯性流形。

定理 4.1　(1.1)–(1.3)的惯性流形存在。

定理 4.2　修正的方程的惯性流形中的（1.1）~（1.3）的整体吸引子的任意开领域都是(1.1)-(1.3)的惯性流形。

5　耗散孤立波的分形维估计

定理 5.1　当 $\lambda_1+\beta>0$ 时，(1.1) (1.3)的整体吸引子的分形维小于或等于$\frac{4}{3}$.

进一步的工作是对参量 v 的吸引子与惯性流形、近似惯性流形的研究，研究这时的单参数半群 $S_t(v)$ 与惯性流形及渐近特征的工作目前已有部分结论，另文给出。

参 考 文 献

1 Foias C, Sell G, Teman R. Inertial Manifolds for Dissipatione PDES.J. Diff.Equ., 1988, 73: 309～353

2 Foisa C, Sell G, TitiE. Exponential Tracking and Approximation of Inertial Manifold for Dissipative Nonlinear Equations, J. Dyn. Diff. Equ., 1989, 1(2): 199～244.

4 谷超豪等. 孤立子理论及应用, 杭州: 浙江科技出版社, 1990.

中高能重离子碰撞中的阵发混沌

葛凌霄　　张晓东　　朱全伶
(中国科学院近代物理研究所　兰州　730000)

摘要

在量子分子动力学模型计算多重碎裂基础上，应用阶乘矩方法分析了多重碎裂. 对^{197}Au(200 MeV/A)+^{197}Au碰撞系统的计算. 发现多重分布有阵发混沌存在. 并对临界现象做了初步讨论

一　引　言

近年来，在有关复杂的多粒子产生现象的研究中，人们都发现了阵发混沌(intermittency)现象. 在相对论重离子碰撞研究中，间歇性已成为一个重要的实验观察量[1]，用于分析夸克胶子等离子体产生. 这种大的、非统计性的涨落在原子核、强子、轻子碰撞中[2]都已被观察到. 由于阵发混沌反映了物理系统的标度不变性，人们认识到阵发混沌可能是物理系统发生相变的普遍信号. 在中高能(≥100MeV/A)重离子碰撞中，多重碎裂已成为反应的主要机制，碎块质量多重数分布和电荷分布[3]接近于幂定理(Power－law)，类似于液－气相变的预言[4]，在临界区，碎块尺寸分布为 $N(S,\varepsilon)\propto S^{-\tau}f(\varepsilon S^{\sigma})$. $f(\varepsilon S^{\sigma})$为标度函数，$\varepsilon$ 为关联长度，S 为碎块尺寸，τ、σ 为临界指数. 所以，在中高能重离子碰撞中，系统可能已进入液汽相变临界区. 在此能区中，阵发混沌现象的存在，将对碎裂机制，液汽相变的研究，有非常重要的意义.

渗透模型[5]和碎裂的统计模型[6]都已经给出了多重碎裂中的阵发混沌. 但它们都是静态模型，不能真实反映重离子碰撞的机制及多重碎裂产生. 利用一个能反映重离子碰撞的动力学行为的模型来研究临界现象、阵发混沌已成为一个迫在眉睫的问题. 量子分子动力学(QMD)模型，在研究集团的形成和碎裂中有突出的优点. 在这个模型中，每个核子由一个双高斯波包来表示，直接通过两体、三体相互作用考虑核子间的相互作用势，对反应一个事件一个事件地模拟，保留了涨落和关联. 在 QMD 模型基础上计算的碎块多重数分布[7,8]，都很好地符合了实验. 利用 QMD 模型，对阵发混沌的研究，不但能真实模拟阵发混沌在一个实际物理系统中的起源，而且也是对 QMD 模型本身的一个检验.

本文中，我们利用 QMD 模型，计算了^{197}Au+^{197}Au系统在 200MeV/A 的入射能量下的阶乘矩(Scaled Factorial moments)，清楚地观察到了阵发混沌的存在，并对临界现象做了初步的讨论.

二　模　型

假定每个核子在相空间中由一个双高斯波包表示，系统的 Wigner 分布函数为

$$f(\vec{r},\vec{p},t)=\sum_i f_i(\vec{r},\vec{p},t)=\sum_i \frac{1}{(\pi\hbar)^3}\exp\{-(\vec{r}-\vec{r}_i)^2/2L-(\vec{p}-\vec{p}_i)^2\cdot 2L/\hbar^2\} \tag{1}$$

由方程(1)可得到系统在坐标空间中的密度

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{i} \frac{1}{(2\pi L)^{3/2}} \exp\{-(\vec{r}-\vec{r}_i)^2/2L\} \quad (2)$$

模型中，直接通过两体和三体相互作用，得到核子间的相互作用势，我们选用了 Skyrme 类型的短程相互作用势，Yukawa（表面弥散）和 Coulomb 类型的长程相互作用势.

对碎块集团的选取与文献[7,10]相同，即考虑核子为每个集团的组成部分. 若两个核子间的距离小于临界值 3.0fm，就判断为相同的集团，对所有核子重复判断后，系统分为孤立的核子的某些集团.

Bialas 和 Peschanski 提出的阶乘矩方法，对分析阵发混沌起了重要作用. 类似于文献[5]，我们将碎块电荷 Z 的变化区间 ΔZ 分成 M 个窗口，每个窗口的尺寸 $\delta Z=\Delta Z/M$，然后计算阶乘矩：

$$\langle F_q \rangle = \frac{M^{q-1}}{\langle N \rangle^q} \langle \sum_{j=1}^{M} n_j(n_j-1)\cdots(n_j-q+1) \rangle \quad (3)$$

其中，$\langle N \rangle$ 为反应事件的平均碎块多重性. n_j 为每一个事件中，第 j 个窗口中碎块的数目. 由于碎块分布在每个小窗口 δZ 分布的不均匀性，给出了一个修正因子

$$R_q = M^{q-1} \sum_{m=1}^{M} \frac{\langle n_m \rangle^q}{\langle N_f \rangle^q} \quad (4)$$

其中 $\langle n_m \rangle = \frac{1}{N_{events}} \sum_{i=1}^{N_{events}} n_{m,i}$，$\langle N_f \rangle$ 为区间 ΔZ 中的平均碎块多重度，N_{events} 为产生事件的总数目.

Bialas 和 Peschanski[1] 注意到 $F_q^{corr} = \langle F_q \rangle / R_q$ 可以消去统计涨落，如果去掉统计涨落，若多重产生服从平滑的分布，随着窗口的变窄，阶乘矩会达到饱和，最终趋于常数，反之，如果存在动力学涨落，阶乘矩会随窗口 δZ 的变化而变化. 若 F_q^{corr} 随 δZ 的变化有指数行为

$$F_q^{corr} \propto (\delta Z)^{-a_q} \quad (5)$$

其中 a_q 为间歇指数，则此系统存在自相似的分形结构. 分形的维数

$$d_q = a_q/(q-1) \quad (6)$$

三 结果和讨论

图 1 为 QMD 计算的 $^{197}Au + ^{197}Au$ 系统在入射能量为 200MeV/A 时，中心碰撞所产生的电荷分布，其最主要的特征是符合幂定理(Power -law). 其幂指数为 −2.92.

由于 QMD 模型是一个动力学模型，其碎块质量，电荷分布随时间的演化而发生变化. 反应发生后在每个时间间隔上产生的碎块都可能是实验上有意义的观察量. 我们在一次模拟中，将每 10fm/c 产生的碎块做为一个事件，经过多次模拟，我们得到了足够多的事件. 这样，不但反映了反应的动力学演化，而且节省了大量的 CPU 时间. 但这样不可避免地产生了非碎裂机制的产物. 但在我们计算中，我们选择了 $N_{fr} \geqslant 3$ 且 $Z_{fr} \geqslant 3$ 的事件，N_{fr} 和 Z_{fr} 分别是碎裂多重数和电荷，即选择了产生中等质量碎片反应的事件. 保证了这些事件是由碎裂产生的中间质量碎片.

F_q^{corr} 分布与 $-\ln(\delta Z)$ 的关系如图 2 所示. 随 δZ 减小，F_q^{corr} 连续增长，符合 $F_q^{corr} \propto \delta Z^{-a_q}$ 的关系. 对 δZ 变量，我们利用最小二乘法拟合，得到了其斜率 a_q.

$$a_2 = 0.0020, a_3 = 0.0055, a_4 = 0.0096, a_5 = 0.0144$$

$$a_6 = 0.0195, a_7 = 0.0260, a_8 = 0.0317, a_9 = 0.0387$$

由此说明，在 QMD 模型中，动力学涨落在碎裂反应中起到非常重要的作用，且清楚地存在阵发混沌.

200MeV/A 的 $^{197}Au + ^{197}Au$ 碰撞，占优势的反应机制是多重碎裂. 产生多重碎裂的机制是什么？是近年来人们关注的问题，已从动力学和统计两种观点进行过讨论. 动力学观点认为，在碰撞动力

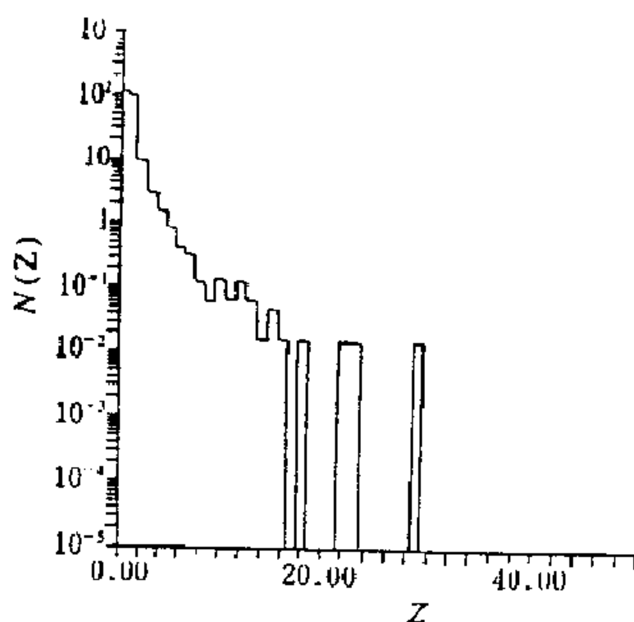


图 1 ^{197}Au (200MeV/A) + ^{197}Au 碰撞系统的电荷多重性分布

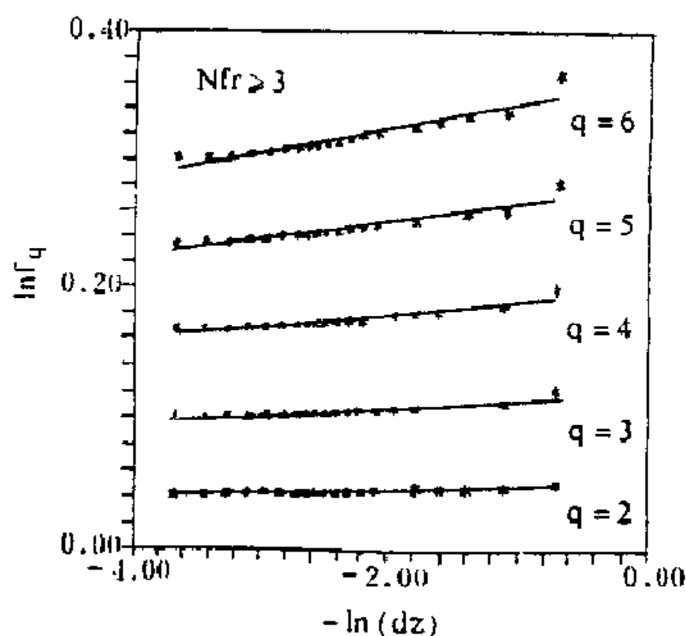


图 2：$\ln F_q^{\mathrm{eve}}$ 与 lndZ 的依赖关系(看正文)

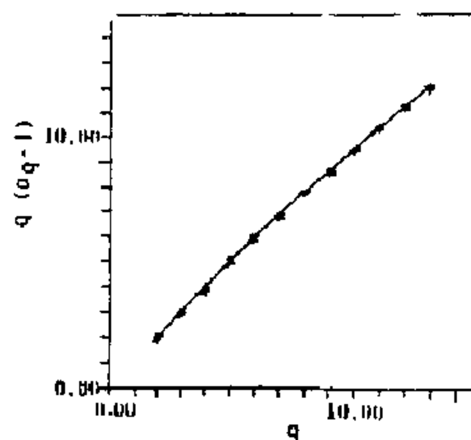


图 3，间歇指数与阶乘矩阶数的关系

学过程中,大的动力学涨落,也就是说,平均场和密度涨落是产生碎裂的主要因素.用QMD方法计算的碰撞过程中,密度分布二极矩和其它一些集体变量象动量分布四极矩,四极矩的涨落的动力学演化[12]的结果说明:一旦多重碎裂占主要优势,这些涨落是一直增加的.涨落的动力学演化和反应机制密切相关.当然,这些涨落仍然是从常规的统计出发.而阶乘矩 F_q^{corr} 排除了统计涨落,仅仅留下动力学涨落部分.计算的阶乘矩会随窗口 δZ 的变化而变化具有指数行为并不是偶然的,它可能反映了反应机制跃迁的特性.但这种规律能否是一个多重碎裂信号还需要继续研究.

文献[11]指出,在相变区,随阶乘矩阶数增大,存在一个临界值 q_{cr},在此临界值处

$$\frac{\delta}{\delta q}[(\alpha_q+1)/q]|_{q=q_{cr}}=0 \tag{7}$$

在图3中,我们做出了阶乘矩的阶数 q 与 $q/(\alpha_q+1)$ 的关系.但我们未能发现此临界值.

四 结 论

在这个工作中,我们在QMD模型计算多重碎裂基础上,应用阶乘矩方法分析了多重碎裂,为我们认识一个高激发核的反应机制跃迁提供了一些新的认识.计算发现,对200MeV/A的 ^{197}Au + ^{197}Au 碰撞系统.反应机制为多重碎裂占优势,碎块多重分布有阵发混沌存在,动力学涨落是导致碎裂的一个重要因素.但现在所做的多重数分布的研究尚不能指出临界现象的信号,也不能确定反应机制的跃迁就显示出临界现象的性质.

QMD方法是一种模拟重离子碰撞的动力学模型,成功描述了碎裂和其它反应机制,它再现了阵发混沌,说明,其可以是模拟真实的物理系统中阵发混沌和反应机制跃迁的一个有力且可行的工具

参考文献

[1] A. Bialas and R. Peschanski, Nucl. Phys. ,B273,703(1986); B308,857(1988).

[2] T. H. Burnett et al. , Phys. Rev. Lett. ,50,2062(1983); P. Holynski et al. , Phys. Rev. lett. , 62, 733(1989).

[3] B. Jackbsson et al. , Nucl. Phys. , A509(1990) 195

[4] M. G. Fisher, Physics ,3(1967)225;X. Campi. ,J. Phys. ,A19,917(1986)

[5] M. Ploszajczak and A. Tucholski, Phys. Rev. Lett. , 65(1990)1539

[6] D. H. E. Gross et al. ,Phys. Rev. Lett. , 68(1992)146

[7] 朱全伶,葛凌霄,李祝霞,高能物理与核物理,16(1992)658

[8] J. Aichelin,Phys. Rep. ,202(1991)235

[9] P. Carruthers and M. Zachariasen, Rev. Mod. Phys. , 55(1983), 245

[10] C. Hartnack et al. , Nucl. Phys. , A495(1989)303

[11] A. Bialas and R. Peschanski, Phys. Lett. , B207,59(1989)

[12] 张晓东, 朱全伶, 葛凌霄, Ann. Report(IMP) 1992

圆形紊动射流的分维测量和分析①

黄真理

（清华大学水电系，100084，北京）

一、引　言

湍流是长期的、世界公认的难题之一，探索湍流机理一直未能取得突破性进展。1922年，Richardson提出了"完全发展湍流是由不同尺度的涡构成"的重要思想，正是受这一思想的启发，分形理论应用于湍流研究[1]。Sreenivasan和Meneveau(1986)、Prasad和Sreenivasan(1990)等人积极开展了湍流分维测量，取得了有广泛影响的成果[2-4]。

湍流分维测量的困难表现在两个方面：一是湍流图象的获取；二是分维测量本身。本文在笔者利用PLIF(Planar Laser Induced Fluorescence)技术获得圆形紊动射流图象的基础上[5]，结合数字图象处理技术，提出了与前人不同的分维测量方法，得到了更为合理的结果。

二、分维测量方法及测量软件的检验

1. 分维测量方法

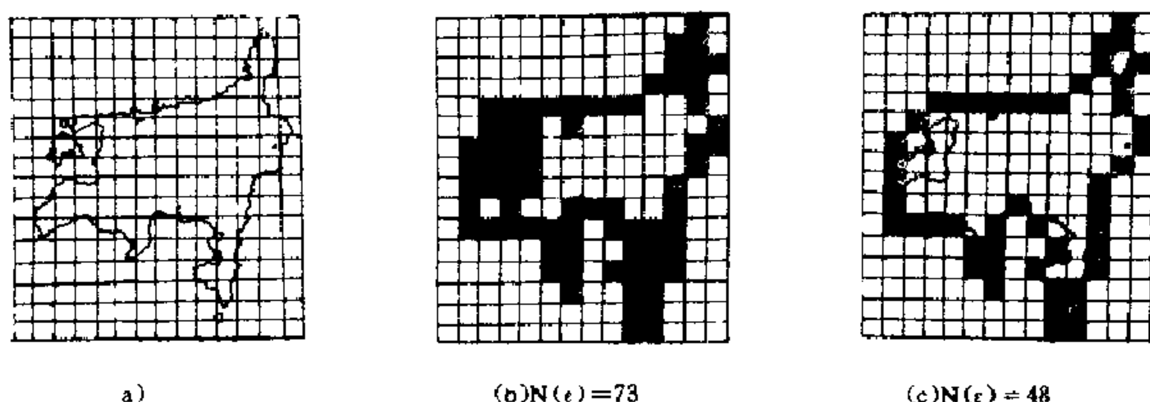
分维是分形理论的基本量。实用的分维测量方法较多，视具体的研究对象而定。粗视化技术是常用的分维测量方法[6]，根据具体操作的不同可将其分成三种[5]，即"脚规"法、"香肠"法和"数盒子"法。其中，"数盒子"法是最常采用的方法，因为它不仅适用于分形曲线，也适用于平面上点的分布以及有大量分岔的河流。更为重要的原因是，该法易于在具有图象处理功能的计算机上实现。Prasad和Sreenivasan(1990)[4]主要是利用此法进行了湍流/非湍流界面分维的测量。

"数盒子"法的要点是：用边长为ε的正方形网格分割分形图形(象)，即进行空间量子化。然后数出要研究的形状中所含的正方形网格数$N(\varepsilon)$。这样，利用$N(\varepsilon)\propto\varepsilon^{-D}$或$L(\varepsilon)\propto\varepsilon^{1-D}$的关系就可确定分维。

通过仔细研究，我们发现：利用"数盒子"法去测量卷褶(convolutedness)较严重的分形曲线(如海岸线)，如果把含有海岸线的所有网格都记入$N(\varepsilon)$的话，测得的分维D就偏小。如果把记入$N(\varepsilon)$的网格涂黑，因为码尺ε反映的细节过多了一点，以致出现成片的黑正方形，如图1(b)所示。而粗视化技术的重要思想在于，码尺ε越大，反映的细节越少，反之亦然。

因此，我们提出了修正"数盒子"法：如图1(c)所示，把含有一小点岛及海岸线的正方形涂黑，把与白正方形相接的黑正方形看成岛的海岸线的近似。图1(c)中为简便美观起见，仅把与白正方形相接的部分涂黑，即岛的近似海岸线。而涂黑的近似海岸线内部的迂回曲折的部分"真正海岸线"被忽略了，因为码尺ε现在还无法反映这部分"真正海岸线"的细节。随着码尺的减小，这部分细节会被逐渐反映出来。

① 本文工作得到清华大学智能技术与系统国家重点实验室的经费支持。



a)　　(b)N(ε)=73　　(c)N(ε)=48

图1　用"数盒子"法和修正"数盒子"法近似某岛的海岸线

2. 分维测量软件的检验

本文的分维测量工作在配有Itex151伪彩色图象处理系统的SUN 工作站上进行。该系统有两个16位帧存储器FrameA 和FrameB，可分成四个8位帧存储器，Frame A 分成HIGH 和LOW，Frame B 分成B1和B2，其中B1和B2可以相互共存覆盖。利用这一点，在分维测量中，可以将分形图象放在B1中，利用B2来作空间量子化。使空间量子化过程比较形象，同时，分形图象和空间量子化网格之间互不影响。图象显示屏的分辨率为512×512，测量软件用C语言编写。

在图象处理技术中，显示屏上每个象素(pixel)可作为空间量子化的基本单位。由于每个象素在长和宽方向所代表的实际长度不同，有一个长宽比(本文为1.44)。因此，空间量子化网格为长方形而不是正方形，过去的一些研究中未注意到这个问题。但是，从理论上可以证明，用长方形网格进行空间量子化对分维测量结果无任何影响[5]。

为了检验测量软件，我们先在计算机显示屏上生成三条标准曲线——Koch 曲线、直线和圆形曲线，然后测量其分维。

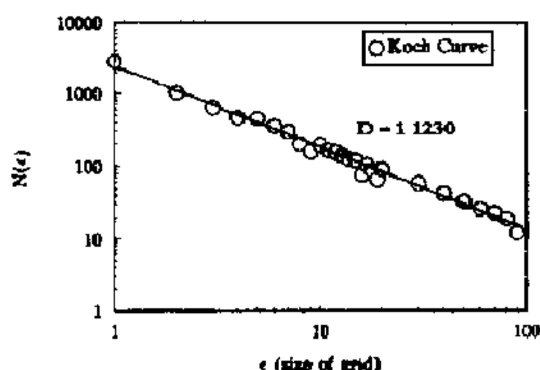


图2　用"数盒子"法测量Koch 曲线

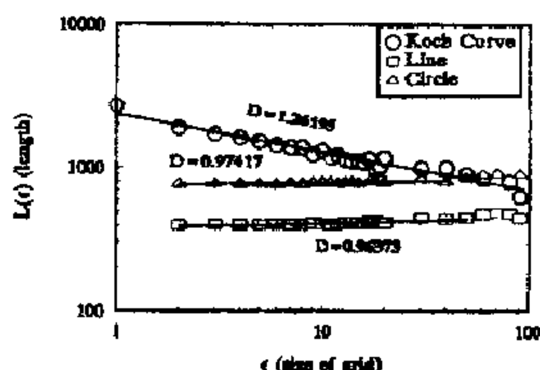


图3　用修正"数盒子"法测量Koch 曲线、直线和圆形曲线

首先，我们比较一下"数盒子"法和本文提出的修正"数盒子"法在测量Koch曲线的差别。如图2所示（实线是回归结果），利用"数盒子"法测得网格数N(ε)和网格尺寸ε(以pixel为单位)的关系，测得Koch曲线的分维D＝1.1230，这个结果与理论值1.26186…相差ΔD≈0.1389。一般说来，这个差值过大，不是由误差和所谓分维测量的不确定性引起的。对直线和圆形曲线的测量发现，所得结果相当好，有理论值1基本接近。

图3是修正"数盒子"法的测量结果，其中分形体长度L(ε)＝N(ε)·ε。从图中可以发现，测量结果与理论值相当接近，相关性也很好。

过去，一些学者在利用分形体周长P和面积A的关系$P\propto\sqrt{A}^{D}$测量分维D时，发现并研究了分维测量的不确定性问题[7]。为了进一步研究本文分维测量的精度，我们研究了修正"数盒子"法测量分维的不确定性问题[5]，发现不确定性带来的最大绝对误差约为±0.04。

三、圆形紊动射流的分维测量与分析

圆形紊动射流图象由我们研制和开发的PLIF技术测量系统获得[5]。图4是PLIF技术测量装置简图。波长为488nm的激光经过φ4的半圆柱透镜形成约1.5mm厚的片光，照射入水箱中。水箱的长、宽、高分别为80×60×30cm，射流喷口设在水箱一侧、水深一半的位置，水平排放，以防止和减少水箱边壁和水面对射流的影响。图象的拍摄采用CCD摄像机，图象存入磁带以供图象处理用。摄像机拍摄速度为1/24秒/帧，这个时间与湍流最小时间尺度相比仍然较大。文献[4]中瞬时图象的抓拍速度最高能达到0.8秒/帧，比本文瞬时图象的时间还长。本文的象素分辨率最小可达到0.14(水平)×0.1(垂直)mm/pixel。比文献[3]中明确报道的象素分辨率0.5×0.5mm/pixel要高得多。

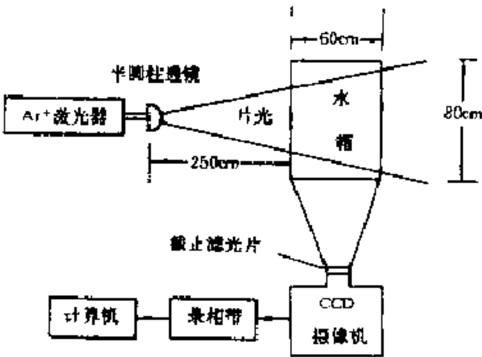


图4 PLIF技术测量浓度场试验装置简图



照片1 紊动射流的PLIF图象

应该指出，湍流信息实际上包含在瞬时图象中。照片1是一幅二值化射流瞬时图象，射流区的灰度为0(黑色)，非射流区的灰度为255(白色)。在分维测量中，我们没有象文献[2－4]那样先从图象中提取边界线(湍流/非湍流界面)，然后再测定边界线的分维。本文编制的修正"数盒子"法测量分维的软件能自动寻找出边界线。

由于篇幅限制，本文仅仅在图5中给出出口雷诺数约为4550的两幅不同象素分辨率时获得的射流图象(No.1和No.2))的分维测量结果。从图中可以发现，射流中确实存在某一尺度范围的自相似性。

No.1中，网格ε在8～20pixel(相当于1.12～2.8mm)范围内分维D＝1.4296，回归相关

系数为0.9059。No.2中，网格ε在1 5pixel(相当于0.6 3mm)范围内分维D=1.4952，回归相关系数为0.9347。

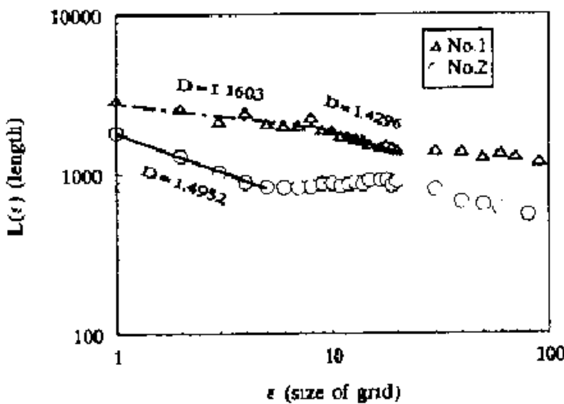


图5 No.1和No.2紊动射流的分维

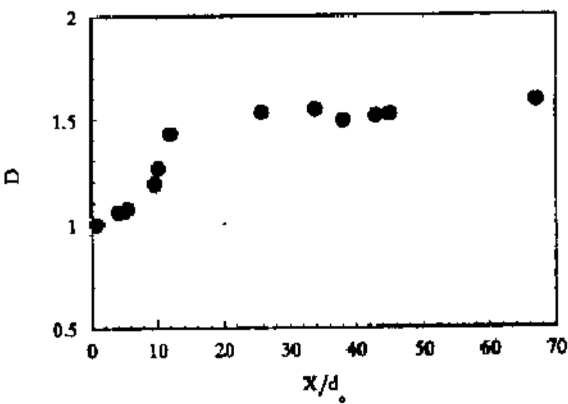


图6 射流分维的沿程变化

紊动尺度的测量较为困难。利用Wygnanski和Fielder(1969)的成果[8]，可以粗略估计出本文射流在轴线上的最大纵向积分尺度Λ_f=8.9mm，最大横向积分尺度Λ_g=3.6mm；最大纵向耗散长度尺度λ_f=1.1mm，最大横向耗散尺度λ_g=0.85mm。因此，将分维与湍流尺度结合起来，可以认为，射流分维尺度的上、下临界点约为积分尺度和耗散长度尺度。其他射流图象的测量和分析也证实了这一点。

利用各向同性湍流中耗散长度尺度λ_g与Kolmogorov尺度η的关系[9]，可以粗略估计η约0.044mm，这个尺度比耗散长度尺度约小一个量级。

在No.1中ε小于8pixels(1.12mm)的数据似乎也有自相似性，分维D=1.1603，相关系数为0.7464，如图5中虚线所示，网格尺度范围为0.14—1.12mm。由于这个测量范围的测量较少，而且数据的相关性似乎略小了一些。这个尺度范围是否具有分维，还需进一步研究。

Sreenivasan等人(1986,1990)[2-4]通过对几种典型湍流进行分维测量和分析后认为，湍流分维存在两个区。其中积分尺度和Kolmogorov尺度之间称为K区，分维为1.36±0.05。Kolmogorov尺度和Batchelor尺度之间称为B区，分维为1.7±0.03。

应该指出，Sreenivasan等人K区测量的结果比本文测量的结果偏小，正如前面分析所指出的那样，是由测量方法带来的。

图6是紊动射流沿程(X方向)发展时分维的变化。随着紊动射流的发展，射流图象的空隙和"孤岛"增多，界面破碎更严重，分维D也逐渐增大，当X/d_0(d_0为喷嘴直径)为67时，分维D高达1.5883。在X/d_0约为6附近，分维D有一个"跳跃"，这是由于紊动射流从初始段向完全发展区(主体段)转化，经过很短的过渡段。从这里可以看出，分维的沿程变化，可以反映射流的分区特性。

四、结束语

1. 本文将分维测量与数字图象处理技术结合起来，发现"数盒子"法测量卷褶较严重的分形曲线的分维结果偏小。

2. 提出了修正"数盒子"法，并对该法进行了检验。

3. 利用修正"数盒子"法测量了圆形紊动射流的分维,研究表明:①紊动射流分维尺度的上、下临界点约为积分尺度和耗散长度尺度;②紊动射流的分维能反映流动分区特性,分维 D 沿程增加,在 $X/d_0 \approx 6$ 附近存在一个"跳跃"。

参 考 文 献

[1] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1982.

[2] Sreenivasan, K. R. & Meneveau, C., "The fractal facets of turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 173, 1986. pp. 357－386.

[3] Prasad, R. R. & Sreenivasan, K. R., "Quantitative three－dimensional imaging and the structure of passive scalar fields in fully turbulent flows", *J. Fluid Mech.*, Vol. 216, 1990, pp. 1－34。

[4] Prasad, R. R. & Sreenivasan, K. R., "The measurement and interpretation of fractal dimensions of the scalar interface in turbulent flows", *Phys. Fluids A*, Vol. 2, No. 5, 1990, pp. 792－807.

[5] 黄真理,"平面激光诱导荧光(PLIF)技术及其测量射流浓度场的研究",清华大学水电系博士论文,1993 年 4 月。

[6] 高安秀树著(沈步明、常子文译),分数维,地震出版社,1989。

[7] 杨国伟,"用 $P(\varepsilon)=P_0\varepsilon^{1-D}$ 计算实际分形体维数的不确定性",科学通报,1992 年第 10 期,pp. 953—956。

[8] Hinze, J. O. 著(周光坰,魏中磊译),《湍流》(下),科学出版社,1987 年,pp. 220。

[9] Hinze, J. O. 著(黄永念,颜大椿译),《湍流》(上),科学出版社,1987 年,pp. 247.

[10] Hentschel. H. G. E. and Procaccia, I., "Intermittency exponent in fractally homogeneous turbulent", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 49, No. 16, 1982, pp. 1158－1161.

[11] Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I., "Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion", *Physical Review A.*, Vol. 27, No. 2, 1983, pp. 1266－1269.

[12] Hentschel. H. G. E. and Procaccia. I., "Relative diffusion in turbuleut media: the fractal dimension of clouds", *Physical Review A*, Vol. 29, No. 3, 1984, pp. 1461－1470.

湍流混沌和涡旋混沌形成负熵过程

[illegible]天根　(杭州大学化学系 310028)

摘　要

大量矢量标积湍流[illegible]空间的涡旋[illegible]，构成单峰映射的标序列(A Sinθ A[illegible])。涡旋形成是[illegible]矢量标积(A A[illegible])。涡旋[illegible]特性参数变化是 ω_{CR} = H Sinθ。混沌熵变是 ΔS_{CR} = kln(H Sinθ L) < 0.1 [illegible] 涡旋[illegible]形成负熵过程，负熵集中低势能量转化为[illegible]势能量。混沌能[illegible] ΔE_{CR} = kT ln(H Sinθ L) < 0、混沌的[illegible]变化 Δ_{CR} = kT(H Secθ dSinθ lnLdt)。当 θ→π/2，[illegible] Secθ→[illegible]涡旋[illegible]，形成大范围的涡旋。解释了台风形成负熵过程。

热力学的熵增过程与涡旋混沌的熵减过程相耦合，构成了宇宙能量的循环。

一、熵增过程与熵增过程

地球上有许多单方向变化的过程。如高温热量向低温方向传导；高处水向低处流；滴液表面收缩成球形的趋势等等。热力学第二定律总结了孤立体系熵趋于增加。以 ΔS 表示熵变，那么热力学第二定律的表式就是，

$$\Delta S_{孤立} \geq 0 \tag{1.1}$$

孤立体系熵有增大的趋势，直到最大，此时体系就是平衡状态。此时变量不再变化，照此说来，宇宙会趋向热寂？熵增的微观解释是，状态趋向最可几分布。若状态数的变化是 ω 那么熵变 ΔS，

$$\Delta S = k_B \ln\omega \geq 0 \tag{1.2}$$

对于开放系统，以熵产生 dS/dt 表示系统熵随时间的变化。系统内部的熵产生 d_iS/dt，内外交换的熵产生 d_eS/dt，那么系统总熵产生 P 等于[2]，

$$P = \frac{dS}{dt} = \frac{d_iS}{dt} + \frac{d_eS}{dt} \tag{1.3}$$

系统的熵产生趋于最小：最小熵产生定律。然而宇宙并不趋于热寂。因为宇宙除了熵增现象之外，还有逆过程：负熵过程。高山流水是熵增现象，而地面上的水蒸发，下雨，即经过混沌过程使高山上的水得到再生。高温热量流向低温，而电冰箱里压缩低沸点气体液化，经过低压蒸发的混沌过程，低温的热量又返流到高温区去。高压气体自然要流向低压，而台风形成的大范围的涡旋，由低压向高压流动。

现在我们不仅用非平衡热力学的开放体系，用熵产生来解释熵增不适用于开放体系，而且用非热力学混沌现象来说明。混沌形成负熵与熵增相耦合，构成了宇宙的整个过程。

二、标积负熵和湍流混沌

热力学只涉及热、功的标量过程。标量过程与熵增相联系；矢量过程才有可能与熵减过程相联系。湍流可能形成负熵。以一定速度流动的河水，形成湍流，若湍流过程中两个微小矢量 A_i 及 A_{i+1}，如速度，动量，矢量标积，按照矢量作用规则，标积的值为，

$$A_i \cdot A_{i+1} = A_i A_{i+1} \cos\theta \tag{2.1}$$

θ 为两矢量夹角。当两矢量的夹角趋于零，θ→0，那么两矢量的标积值与纯标量的积相等。

$$A_i \cdot A_{i+1} = A_i A_{i+1} \cos\theta = A_i A_{i+1} \tag{2.2}$$

在湍急的河流拐弯处，水流受阻被迫拐弯，河水通过混沌产生湍流旋涡。假若单元体积内有多个相空间 A_i，相空间之间处于摩擦流动之中，诸相空间这此相交，θ≠0 的夹角。矢量 A_i 间的标积是，

$\Pi A_i = \Pi A_1 A_2 \cdots\cdots A_{i-1} A_i \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots\cdots \cos\theta_n$ (2.3)

这是一个数字字列，构成混沌系列，可表示：

$(A_i \cos\theta_i A_{i+1})$ (2.4)

鉴于 $\cos\theta_{i\to 0} = 1$，所以这是一个单峰映射的揉序列[3]。以 A_c 表示矢量的标积，

$A_c = \Pi_i (A_i A_{i+1})$ (2.5)

在河水直流处，湍流矢量间的夹角 $\theta = 0$，矢量 A 的标积为 Aa，

$Aa = \Pi_i (A_i A_{i+1})$ (2.6)

湍流拐弯前后矢量积状态数的变化 ω 是，

$$\omega = \frac{A_c}{A_a}$$ (2.7)

代入(2.4)(2.5)，得到：

$$\omega = \frac{A_c}{A_a} = \frac{\Pi_i (A_i \cos\theta_i A_{i+1})}{\Pi_i (A_i A_{i+1})} = \Pi_i \cos\theta$$ (2.8)

湍流混沌熵变与状态数变化 ω 的对数成正比，湍流标积混沌熵变 ΔS_c，

$\Delta S_c = k_B \ln (\Pi_i \cos\theta_i) \geq 0$ (2.9)

湍流河水在改变流动方向时，矢量标积对数是负值，使标积矢量产生负熵，称之为标积负熵。若混沌前后的能量密度变化 ΔE_c，

$\Delta E_c = \Delta S_c T = kT \ln \cos\theta_i \geq 0$ (2.10)

湍流混沌在河水拐弯处出现旋涡，但不是迭代过程。不会越变越大。

三、叉乘负熵与涡旋混沌

当两矢量 $A_1 A_2$ 不是平行流动的相空间，而是近于互相垂直相交的两矢量时，构成了叉乘积。如太阳直射下水气蒸发的上升气流，带动四周的空气向中心流动，垂直上升的气流 A 与水平流动气流 A_2，两矢量作积，

$A_1 A_2 = A_1 A_2 \sin\theta$ (3.1)

叉积矢量垂直于 A 与 A_2，是沿水平面圆周的切线方向的合力，构成右手系[3]。叉积的合力形成转动的涡旋。构成了数字序列 CR(4)，

$(A_i \sin\theta_i A_{i+1})^n$ (3.2)

当 $\theta \to \pi/2$，$\sin\theta$ 有最大值。故上式序列是单峰映射的揉序列。由于这三个力相互垂直，互相作用构成了一个迭代过程：$(A_i \to A_j) \to A_{CR}$，接着 $A_{CR} \to (A_{i+1} A_{j+1}) \to A_{CR+1} \cdots$，

$f_0(A_i \sin\theta A_j) = f_1{}'(CR_1)$

$f_1{}'(CR_1 A_{i+1} \sin\theta_{i+1} A_{j+1}) = f'_2(CR_2)$ (3.3)

······

$f_{n-1}{}'(CR_{n-1} A_{n-1} \sin\theta_{n-1} A_{n-1}) = f_n{}'(CR_n)$

迭代加强了涡旋混沌的强度。矢量叉乘积 A_{CR}，

$A_{CR} = \Pi_{i,j} (A_i \sin\theta_i A_j) / L$ (3.4)

未形成涡旋混沌前，湍流矢量积是，

$A_a = \Pi_{i,j} (A_i, A_j)$ (3.5)

湍流混沌形成前后矢量积(状态数)的变化 ω，

$$\omega = \frac{A_{CR}}{A_a} = \frac{\Pi_{i,j} (A_i \sin\theta_i A_j)}{\Pi_{i,j} (A_i, A_j)} = \Pi_i \sin\theta_i$$ (3.6)

涡旋混沌熵变与状态数的对数成正比，涡旋混沌熵变 ΔS_{CR}，

$$\Delta S_{CR} = k_B \ln \Pi_i \left(\frac{\sin\theta_i}{L}\right) < 0$$ (3.7)

若迭代因子 $L = 2^n$，每经过一次迭代过程，熵的绝对值增加一倍，那么系统的总熵变是，

$\Sigma \Delta S_{CR} = k_B \ln \Pi_i \sin\theta / 0.693 = 1.443 n k_B \ln \Pi_i \sin\theta_i$ (3.8)

涡旋混沌能量密度变化 ΔE_{CR}：

$$\Delta E_{CR} = \Sigma \Delta S_{CR} T - kT\ln L|\Delta S|n\theta,\quad L>0 \tag{3.9}$$

涡旋混沌形成负熵，集中低能密度，转化为高能量密度。混沌因子 L≠1，随着迭代过程的加强，涡旋混沌能量密度是一个开放的量，发散的量。开放体系的熵产生是 $d\Delta S_{CR}/dt$，负熵产生是：

$$\Sigma \frac{d\Delta S_{CR}}{dt} = k_B|\Delta S|\frac{dSin\theta}{\ln L dt} = k_B|\Delta S|Sec\theta\frac{dSin\theta}{\ln L dt} \tag{3.10}$$

涡旋混沌功率密度变化 η_{CR}：

$$\eta_{CR} = \Sigma\frac{d\Delta S_{CR}}{dt} = k_B T|\Delta S|Sec\theta\frac{dSin\theta}{\ln L dt} \tag{3.11}$$

当 $\theta\to\pi/2$，$Sec\theta\to\infty$，当 $n\to\infty$，涡旋混沌经多次迭代，其功率密度越来越大。台风是一个典型的涡旋混沌过程[5][6]。在几百公里范围内形成切线方向旋转的涡旋，它所造成的功率密度可在万兆瓦以上的量级。

四、结论：

矢量的标积与叉积，其对数产生负熵，矢量过程产生负熵。热力学的功与热过程是标量积过程，于是产生熵增。湍流与涡旋过程是矢量相乘过程，产生熵减。通过混沌的迭代过程而加强，构成了宇宙的增势、增压、增温过程。熵增与熵减的耦合，构成了宇宙的大循环。混沌形成负熵过程的概念，改变人们对宇宙的认识史观。

参考文献：

〔1〕傅献彩等：《物理化学》上册　高等教育出版社 1990

〔2〕G. 尼科利斯，I. 普利高京《非平衡系统的自组织》徐锡申等译　科学出版社

〔3〕郑伟谋、郝柏林：实用符号动力学　物理学进展 1990(3) 316 V10

〔4〕数学手册编写组：《数学手册》　人民教育出版社 1979

〔5〕毛法根：《混沌学》　杭州大学教材 1991

〔6〕师崇健：大自然探索 7(1) 1988 35

Monte Carlo 模拟固体中原子电离的分布及其分形描述*

丁泽军　吴自勤
中国科技大学基础物理中心，合肥 230026

一、引言

带电粒子在介质中的输运问题是个复杂的非线性过程。在材料科学的研究领域内，分析材料的化学组成的一种强有力的手段就是利用了中至高能粒子束（10-100 keV）作用于固体样品后产生的各种信号。就电子束入射的情况而言，几种典型的实验手段包括：电子探针微分析术(EPMA)、Auger 电子能谱（AES）、电子能量损失谱（EELS）、扫描电镜（SEM）等。这些信号的产生机制都起源于电子束与固体原子的非弹性碰撞所导致的原子内壳层电离现象。激发态原子经过弛豫将产生特征X射线或发射 Auger 电子，它们分别是 EPMA 和 AES 研究的对象。而 EELS 关心的是入射电子的特征能量损失。另外，原子电离时从内壳层中激发出的电子通常具有较高的能量。通过级联过程，这个电子可以产生大量的低能二次电子，SEM 就是利用了这些二次电子。因此，了解样品内原子的电离过程及其分布对于实验结果的分析是极为有益的，在作定量分析时甚至可以说是必不可少的。

对 EPMA 来说，X光产生的深度分布函数 $\Phi(\rho z)$ 是定量修正中的关键要素。而实际上，空间中原子的电离分布 $\Phi(r)$ 是3维的。同样，入射电子束由于非弹性散射而造成的能量沉积也是有其空间分布的。在以往的微分析领域中没有定量地讨论它们，因此，我们的目的就是研究 $\Phi(r)$ 的形成过程及分析其分形性质。

二、模拟计算方法

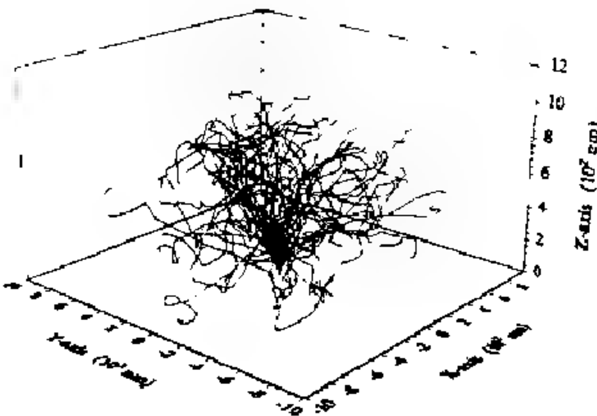
原子的电离是联系于入射电子轨迹的一种局域元激发过程。由此必须采用一种适当的电子轨道的计算方法。高能电子的运动与粒子的随机行走（H=1/2）不同的是，电子运动轨道的随机性是受动力学规律支配的。造成电子运动方向的变化主要原因是电子与原子的弹性碰撞。同时，电子在固体内的各种非弹性散射过程（内壳层激发，电子-电子散射，等离子体激发等）都会使电子产生能量及动量转移。而运动的随机性在于，对于某次具体的弹性或非弹性散射事件，物理量的变化几率是由相关的散射截面决定的。由此可见，由随机数决定电子轨道的散射事件的 Monte Carlo 模拟方法是研究电子束与固体相互作用的一有效手段。[1]

我们所采用的 Monte Carlo 模型是：1　用 Mott 微分截面描述弹性散射，由 [0,1] 区间的一个均匀随机数 R_1 可定出散射角。2　用 Gryzinski 公式（包括能量损失截面、总截面及阻止本领）描述内壳层电离，用另一个随机数 R_2 可定出能量损失量。二体碰撞近似下，非弹性散射角与能量损失之间有一简单的关系。3　除所模拟的内壳层电离之外，其它所有的非弹性散射对电子能量损失的贡献均由 Bethe 阻止本领包括。4.　平均自由程由弹性散射总截面与内壳层电离截面之和决定，用随机数 R_3 从 Poisson 分布中得到两次散射事件之间的步长。5　用随机数 R_4 并根据弹性散射截面与电离截面的比值定出散射事件是弹性的还是非弹性的。为计算 $\Phi(r)$ 我们把相互作用区域有效范围内的空间分成 360×360×360 的立方网格，当格子内有电离事件发生时它即为占据态，然后用盒计数法求 logN-log δ 的关系。[2]

*国家教委优秀青年教师基金资助项目

三. 计算结果及讨论

我们模拟了 10keV 电子束垂直入射的情况下，Si 样品中 Si 原子的K壳层电离的分布。δ 取为 3nm，有效激发深度约为 1μm。当电子的能量低于K壳层的电离能时便停止追踪此电子。计算结果表明，大约每 20 个入射电子才能产生一次电离事件。为了了解电离的空间分布的形成过程，我们计算了 10^4-10^7 个入射电子的轨迹。



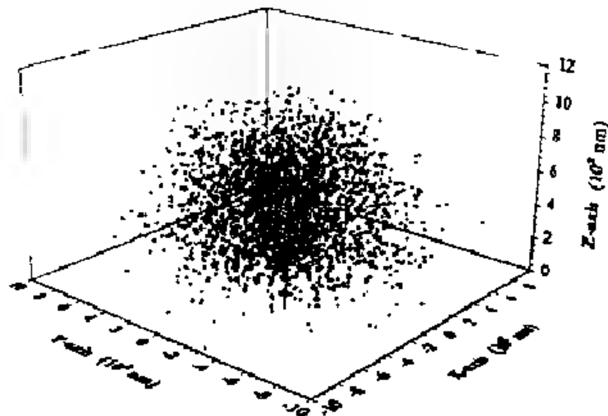
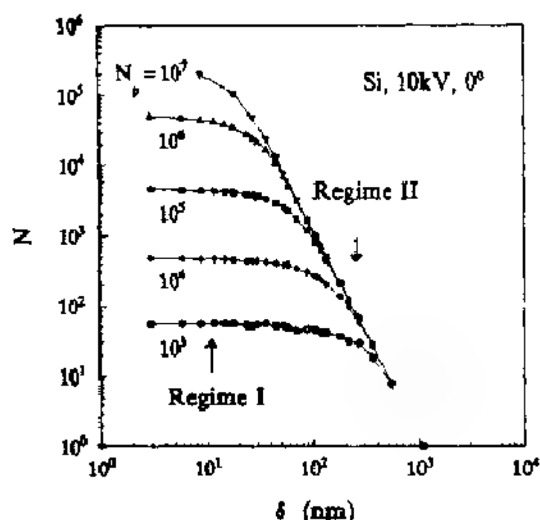


图1　电子轨迹　　　　图2　Si 原子K壳层电离的空间分布

图1所示是一百个电子在垂直入射时的电子轨迹，对应的一万个电子入射时产生的K层电离的空间分布由图2显示。它的特征是，在电子束入射的表面附近，密度很大。随着电子束的扩散，分布逐步向体内延伸且密度降低。当电子能量降低到不足以电离原子时，分布达到最大深度，即有效激发深度。因此，空间分布的形状类似于梨形。而在这个梨形的相互作用体内有许多空洞，即未占据的单胞格子。随着入射电子数的增多，体积内的空格子将不断地被占据，使其空间分布逐步变为实心的。可以预计，盒计数的双对数线性有赖于入射电子数。

图3中给出了对应于不同入射电子数的 logN-logδ 曲线。对于较少的入射电子，由于能够产生的电离数甚少，因此当δ在小尺度上变化时，N 的变化率很小，这一段曲线的斜率接近于零。当δ在大尺度上变化时，曲线的斜率接近于3。随着电子数的增加，斜率约为零的直线段的范围逐渐减小，而斜率约为3的直线段逐步趋于单胞的尺度范围内。可以推断，对于相当多的入射电子，logN-logδ 曲线将从原子尺度至相互作用体积大小的整个尺度变化范围内保持一斜率接近但小于3的直线。然而，为了达到使相互作用体积内的绝大部分原子至少电离一次，需要相当大的入射束电流。其电流量可从所需的入射电子数及电子有效行程所耗的时间算出。对我们所算的最多电子数即 1.2•10^7 个电子轨道的情况来说，在10^1-10^3 nm 尺度上，分维数约为 2.74。



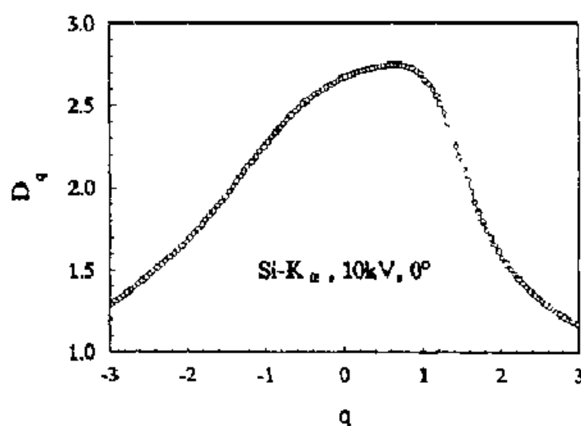


图3. 不同入射电子数目下的 logN-logδ 曲线　　图4　多重分形的 D_q 曲线

在计算 Hausdorff 维数时，不论格子中有多少次电离都只认为这个格子是一个占据态。因此没有考虑到空间分布的非均匀性。模拟计算的强度分布显示，强度极值主要处于沿入射方向的一段直线上，而沿径向是迅速衰减的。这样，体内不同位置处电离数密度或X光产生的强度是不同的，也即占据态的几率不同。多重分形维数可以用来定量的描述这个强度分布轮廓。把单胞内发生的电离数用总电离数去除，可得到单胞的占据态几率 p。用盒计数法求 p^q 的和，从而得到不同指数 q 下的广义维数 D_q。[3]

图4所示，当 q 从负值开始增加时，D_q 也随之增加到一极值，然后开始减小。这种现象会造成 f 函数有一折转点，即所谓的标度间断。[4,5] 产生这种现象的原因可以这样去理解：在 q 取极限 -∞ 和 +∞ 下，D_q 强调的分别是强度分布中强度极弱区域及强度极强区域的分形行为。而在本例中，这些区域的尺度是很小的。因此在这两种极限下，分维数都只略大于零。而在 q 值不大不小时，D_q 描述强度适中的区域。这些区域占据空间中较大的范围，因此分维数也是接近于3的。至于是否能认为 f 函数发生折转就意味着标度律开始失效还需进一步商讨。

参考文献:

1. R. Shimizu and Z.-J Ding Rep. Prog. Phys 55 (1992) 487.
2. 赵凯华、朱照宣、黄畇，非线性物理导论，北京大学非线性科学中心 (1992).
3. 王坚，物理，第 21 卷 (1993) 747.
4. J. Lee and H.E. Stanley, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2945.
5. 李后强、赵华明，化学物理学报，第 4 卷第 1 期 (1991) 13.

电子在固体中运动轨迹的分维计算*

李华 丁泽军 吴自勤
中国科学技术大学基础物理中心

一、电子与固体相互作用的 Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 方法的基本原理是：当所要求解的问题是某随机事件出现的概率、或者是某个随机变量的期望值时，可以通过数字模拟试验的方法得到这种事件的频率、或这个随机变量抽样实验的算数平均值，并用它们作为问题的近似解。

电子射入固体后发生弹性和非弹性散射，运动方向不断改变，电子在固体中的运动轨迹是一条曲折的线。在散射过程中，入射电子不断损失能量，不断有次级电子产生，次级电子也与固体相互作用，其运动轨迹亦是折线。但由于入射电子与次级电子的能量有很大的差别，它们的轨迹形状也很不一样。

电子与固体相互作用的 Monte Carlo 模拟[1,2]是基于电子散射的随机描述。电子的散射角、能量损失都与随机数相关。电子散射后的运动方向及能量由散射前的运动方向及能量所定，由此模拟实际情况的电子在固体中的运动规迹。

本文用Mott微分截面处理弹性散射，对于非弹性的能量损失及动量转移的微分截面是由介电函数得到的。由于使用了光学常数的实验数据来推导一般的介电函数，因此，非弹性散射的各种元激发过程都已包括在模拟中。次级电子正是由入射电子在非弹性碰撞过程中产生的。我们同样模拟了次级电子的级联产生过程。这样，一个入射电子可以产生数十个至数百个次级电子（只计算 10eV 能量以上的次级电子）。

二、电子轨迹分维的计算

电子的运动轨迹具有分形的性质，此电子轨迹的分形具有类似于布朗运动无规分形的性质[3]。

由盒计数法[4]计算电子在三维空间的运动轨迹的分维。取包含整个电子轨迹的长方体，将其转换为单位边长的立方体，且将电子被散射点的位置坐标作相应变换，将长方体中的电子轨迹变换到了单位边长的立方体中，再分别将此立方体作边长为

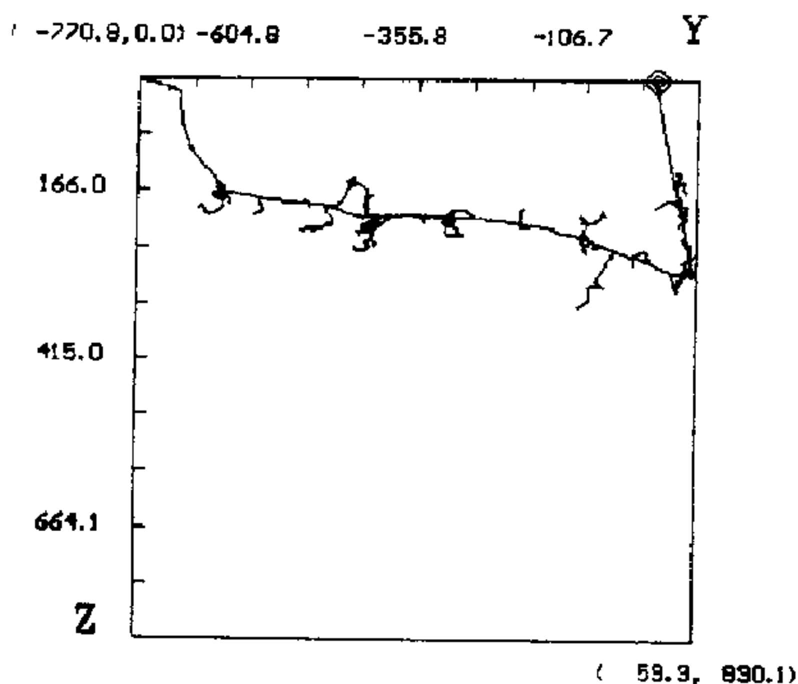
$$\varepsilon_i = n_i/128 \qquad (n_i = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128)$$

的小立方体去划分，分别计数电子轨迹经过的小盒子的总数N_i，由此得到 ε_i, N_i的曲线图，其中直线部分的斜率为电子轨迹分维的负值。

三、计算结果及结论

我们分别计算了能量为 1keV、3keV、6keV、10keV，从 (0,0,0) 位置垂直入射到硅中

*国家自然科学基金资助项目

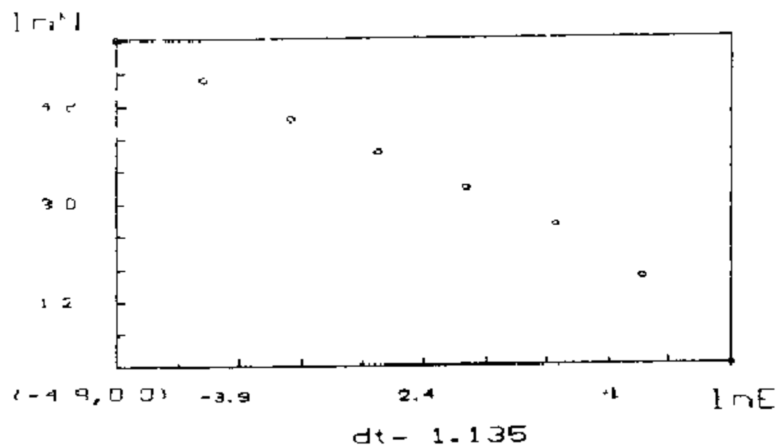


图一. 3keV 电子在硅中的运动轨迹

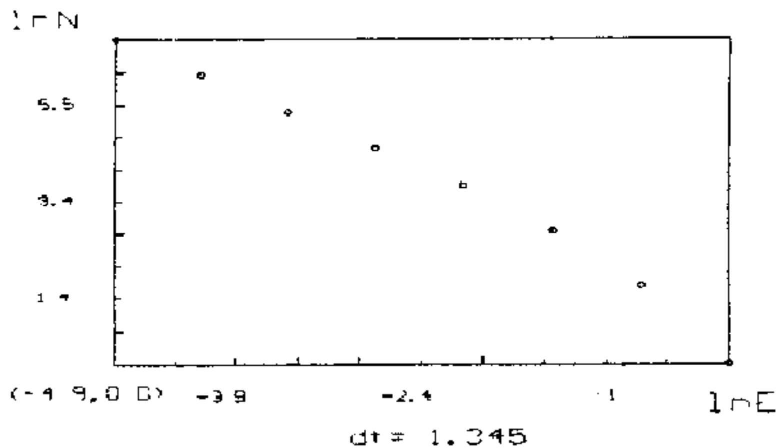
Monte Carlo模拟次数		1	2	3	4	5	平均
电子能量 1 keV	轨迹 1	1.159	1.207	1.232	1.220	1 235	1 211
	轨迹 2	1.486	1 437	1.470	1.482	1.461	1.467
电子能量 3 keV	轨迹 1	1.152	1.227	1.135	1.118	1.233	1.173
	轨迹 2	1.558	1 530	1.345	1.303	1.479	1.443
电子能量 6 keV	轨迹 1	1.143	1.154	1.193	1.218	1.144	1.170
	轨迹 2	1.243	1.306	1.325	1.375	1.309	1.312
电子能量 10keV	轨迹 1	1.144	1 146	1 101	1.192	1.132	1.143
	轨迹 2	1.237	1 258	1 214	1.332	1.213	1.251

注: 轨迹 1 为入射电子轨迹, 轨迹 2 为入射电子及次级电子轨迹

表　不同入射能量的电子轨迹分维的计算结果



a　入射能量为3keV的电子轨迹 1



b　入射能量为3keV的电子轨迹 2

图二　由盒计数算得的电子轨迹的分维

的入射电子轨迹、入射电子及其产生的次级电子轨迹的分维数。对各入射能量的电子由Monte Carlo方法做了五次模拟，电子轨迹在Y-Z平面上的投影由图一可见，其中由入射点(0,0,0)为起点的长折线为入射电子轨迹，围绕入射电子轨迹的短折线为次级电子轨迹。算出其各次模拟所得的电子轨迹的分维，相应于图一的电子轨迹的分维由图二可见，最后将这五次模拟的电子轨迹的分维作平均，得到所要求的该能量电子轨迹的分维。

由表一可见，随着入射电子能量的增大，电子在硅中的运动轨迹的分维减小。由此说明电子能量愈低，电子轨迹愈曲折，维数愈大

参考文献

1　R. Shimizu and Z.-J. Ding, Rep. Prog. Phys., 55(1992) P487

2　Ding Ze-Jun Fundamental Studies on the Interactions of kV Electrons with Solids for Applications to Electron Spectroscopies (Ph.D Thesis, Osaka Univ.) (1990)

3　赵凯华、朱照宣、黄畇，非线性物理讨论，北京大学非线性科学中心 (1992).

4　王坚，物理 第21卷(1993) P747

用恒相角阻抗法研究导电聚合物聚苯胺的分形结构

袁仁宽★　王永宾☆　袁　棠★　陈志辉★

★南京大学物理系，南京210008

☆江苏教育学院物理系，南京210013

摘　要

本文在恒相角阻抗分形理论的基础上，提出一种适用于测量导电性材料表面分形维度的新方法——阻抗模频谱法(或称恒相角阻抗法)。这种方法只需通过相对简单而精确的阻抗测量，辅以适当的数据处理即可得出表面分形维度。

兼有导电性和分形结构的聚合物材料——导电聚合物是用阻抗谱法研究其分形结构的理想对象。本文选择稳定性较好并有良好应用前景的导电性聚合物——聚苯胺进行阻抗谱的研究。实验发现聚苯胺在不同的标度范围内存在着两种分形结构；聚苯胺的分形维度与其掺杂程度有关。而阻抗谱方法与导电聚合物材料及其电化学制备的巧妙结合——"动态"阻抗谱研究则提供了若干有关电化学聚合过程的信息。

一、引　言

低频下电极/电解液(或固体电解质)界面的阻抗谱常常呈现出所谓的"恒相角"(constant phase angle，简称CPA)特征，即在很宽的频率范围内，界面阻抗谱遵从以下幂律[1-6]：

$$Z(\omega) = Z_0(i\omega)^{-\eta} = Z_0\omega^{-\eta}(\cos\theta - i\sin\theta) \tag{1}$$

此处$i=\sqrt{-1}$，ω为圆频率，$\theta=\frac{\pi}{2}\eta$为位相角，Z_0为一与频率无关的常数。CPA指数η也是个常数，其值在0与1之间，并与电极表面的粗糙程度呈负相关[3-6]。

根据作者提出的一个普适的电极／电解液界面模型[7]，CPA阻抗与粗糙电极表面的分形几何结构有关。CPA指数η与电极表面分形维度D_s之间存在着简单的关系：

$$\eta = 3 - D_s \tag{2}$$

上述结果与其他作者对几种模型分形电极(如Cantor棒，Cantor块[8]和Sierpinski地毯[9-11])阻抗的计算是一致的，从而可确信电极表面的分形结构是恒相角阻抗的物理根源。我们还得出了频率ω与标度λ之间的关系：

$$\lambda = \beta\,\omega \tag{3}$$

β为比例系数。这样就可以通过阻抗谱的测量分析给出有关电极表面分形结构的信息。只要测出η或θ，便可根据(2)式求得表面分形维度D_s。这为分形研究提供了又一种实验手段。

二、实验方法

1. 样品制备

所有用于阻抗谱测量的聚苯胺样品均用电化学方法(恒电流方式)聚合在衬底(导电玻璃或蒸发上金膜的硅片)上，所用电解液为0.5M Na_2SO_4+1M苯胺+H_2SO_4(pH=1)。部分样品制备好后分割为二，以提供一对结构相同的电极(分别作为样品与辅助电极)。

实验中用到的金膜电极均为表面蒸金的硅片。部分实验中用到的一对相同的金膜电极也是从同一片上分割开的。

所有的电极侧面和背面都用绝缘材料(漆或石蜡)保护起来，以防衬底的影响。

2. 阻抗谱的测量与分析

CPA指数η既可以通过相角θ，也可以通过阻抗模的频率色散关系求出，但后者测量起来较为简便且精度较高。我们采用电压比较法测量阻抗模的频谱。将一标准电阻箱与电解池串联起来接到低频信号发生器上，调节电阻箱使得其上压降与电解池上的压降相等，电阻箱上的读数即为电解池阻抗的模。通过改变信号发生器的频率就可以得到阻抗模的频谱。为了从中得出有用的信息，还需要对阻抗谱进行拟合。

实际的电解池总是由样品电极与辅助电极组成的，电解池的总阻抗应为两个电极与电解液界面的阻抗和电解液体电阻的复数和:

$$Z(\omega) = Z_w(i\omega)^{-\eta_w} + R_e + Z_c(i\omega)^{-\eta_c} \tag{4}$$

上式中“w”、“c”分别表示样品与辅助电极，R_e为电解液的体电阻。当两个电极完全相同时，上式可简化为

$$Z(\omega) = Z_0(i\omega)^{-\eta} + R_e \tag{5}$$

此时阻抗谱最容易分析。通常制备两个完全相同的电极较困难，可选用表面结构已知(因而η或D_s也已知)的辅助电极，例如表面非常平整光滑(η→1或D_s→2)的硅片，这样它对电解池总阻抗的影响容易区分出来。Boukamp曾专门讨论了阻抗谱的拟合算法[12]，可供编程时参考。

三、结果与分析

1. 聚苯胺膜内外表面的分形结构

图1中的实心圆点是以聚苯胺膜为样品电极，以硅片上的金膜为辅助电极的电解池的阻抗谱数据，它可用两个串联的CPA阻抗拟合(η分别为0.70和0.24)，如图中的曲线。这两个CPA阻抗初看上去好象分别是聚苯胺膜和金膜各自与电解液界面的阻抗，对应于聚苯胺膜与金膜表面的分形结构。但是，用另一完全相同的金膜电极取代聚苯胺膜电极后所测得的阻抗谱(图1中的三角形)用(5)式拟合后给出金的CPA指数η=0.79，与前面的0.70或0.24都不同。这就表明前面的两个CPA阻抗都是属于聚苯胺的。我们也测量了由两个完全相同的聚苯胺电极组成的电解池的阻抗谱，见图2。它也包含了两个CPA阻抗(η分别为0.68和0.062)，显然它们都是属于聚苯胺的。

用分形的观点来看，上述这些结果说明了聚苯胺在不同的标度范围内存在着两种维度不同的分形结构。聚苯胺膜是一种多孔性材料，材料整体上呈现的外观表面(外表面)与由孔隙形成的内表面是很不相同的。在低频下(对应于较小标度)，离子可以在很大的范围内随着交变电场

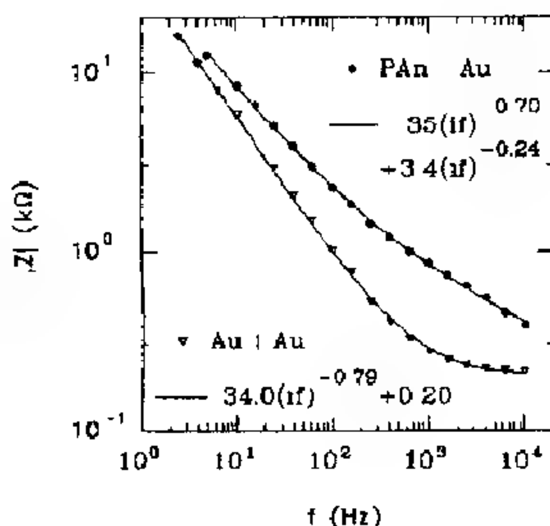


图1. 聚苯胺—金与金—金的阻抗谱

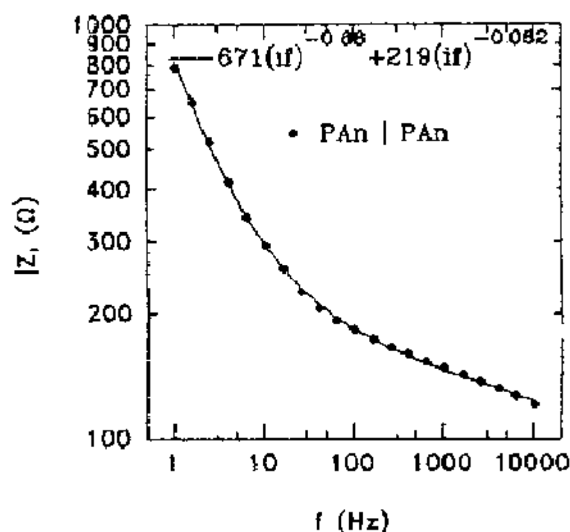


图2. 聚苯胺—聚苯胺的阻抗谱

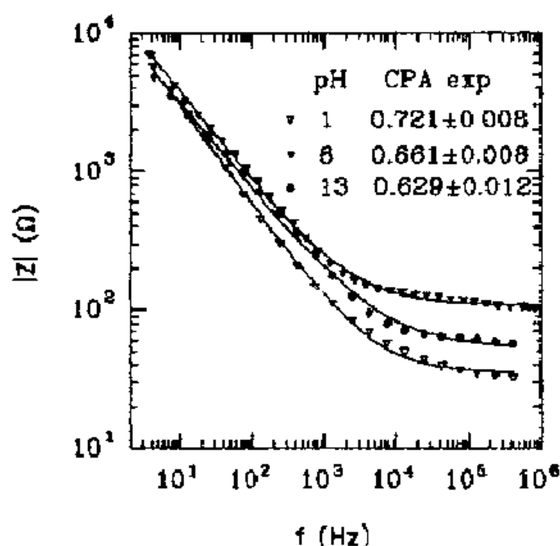


图3. 聚苯胺阻抗谱与掺杂(pH值)的关系

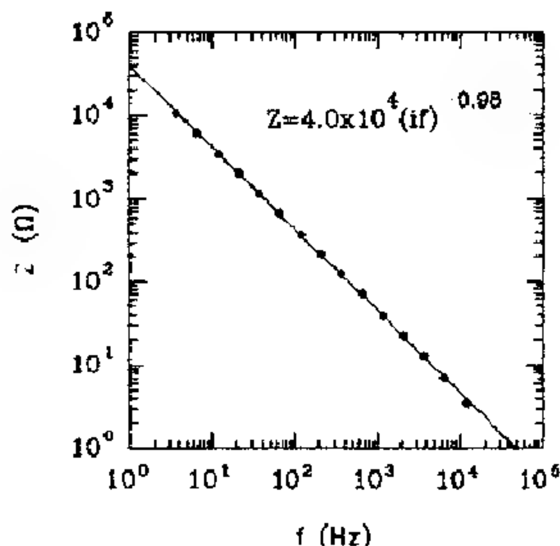


图4. 一对硅片电极的阻抗谱

作漂移运动，能够深入到孔隙中去，因而低频下观测到的D_s应该是聚苯胺膜内表面的分形维度；而高频下的D_s则是聚苯胺膜外表面的分形维度。两者的D_s明显不同表明它们在结构上有较大的差别。

2. 聚苯胺膜的分形维度与掺杂浓度的关系

刚刚制备好的聚苯胺膜呈翡翠绿或蓝绿色。停止聚合后，若样品继续置于强酸性的电解液中，聚苯胺膜的颜色将逐渐变为浅黄色，这一现象与聚苯胺的化学掺杂有关[13]。我们用阻抗谱方法研究了掺杂对聚苯胺分形结构的影响。

聚苯胺的掺杂浓度可通过电极电位或pH值来控制。为方便起见，实验中是通过改变pH值来控制掺杂浓度,掺杂量与pH值间的关系已经实验研究过[14],可以通过pH值求出相应的掺杂浓度。随着掺杂浓度由低向高变化，聚苯胺膜的颜色将从紫红依次向蓝、绿、黄变化，在高掺杂下变

得几乎完全透明。X光衍射研究表明掺杂将导致聚苯胺结构上显著的变化。低掺杂时聚苯胺基本上处于完全无序的状态，随着掺杂浓度增加，结晶程度逐渐增加，同时，聚苯胺分子链的扭摆角也趋向减小，意味着分子链变得更加平直。至全掺杂时结晶度约为50%[15]。

阻抗谱的测量结果表明，随着掺杂浓度变高(相应地聚苯胺的颜色由紫红向绿变化，直到几乎完全透明)，聚苯胺的分形维度变低，特别是高掺杂时维度的变化较为明显，如图3所示。这说明H^+的掺入明显改变了聚苯胺分子链及膜的结构。很显然，结晶化程度愈高，整体的分形维度也将越低，这与上述X光衍射的结果是一致的。这一结果还说明在对聚苯胺进行阻抗谱测量时，一定要注意它对pH的敏感性，否则不可能得到可重复的结果。另外，原来高频区η较小的CPA阻抗(图1与图2)都观察不到了。因为不能排除溶液电阻的影响，无法断定这是否由于结构上的改变所引起的。

3. 电化学聚合过程中的“动态”阻抗谱研究

我们在电化学聚合聚苯胺膜的电解池中测量了聚合过程中部不同阶段的阻抗谱(以下称为“动态”阻抗谱)，藉以研究聚合过程中聚苯胺膜分形结构的变化。以经过仔细抛光的重掺杂p^+100晶向的硅片(电阻率0.005Ω·cm)为辅助电极，硅片背面蒸发上钛-金以供欧姆接触之用。图4示出了一对这样的硅片电极在聚合所用的电解液中的阻抗谱，其CPA指数η为0.98，相应地表面维度为2.02，表明硅片表面是相当光滑的。选用蒸发在硅片上的金膜作为制备聚苯胺膜的衬底。

“动态”阻抗谱的实验结果见图5。聚合开始之前(t=0)测得的η=0.95(相应地D_s=2.05)，与用作辅助电极的硅片的数值不同，说明金膜表面的维度是2.05。开始聚合后，表面维度先是由2.05很快下降到2.02，然后再很快上升到2.11左右，此后则继续缓慢上升。在以前制备聚苯胺的实验中多次发现，当电极表面有划痕时聚苯胺总是先在划痕处生长，然后才全面铺开。结合这一现象和图5，我们可以得出生长过程的大致图象：刚开始时，聚苯胺先在电极表面凹坑中局部聚合，将最为凹凸不平之处填满，而且紧靠电极表面的这部分聚苯胺可能有较高的结晶度，因此电极表面维度逐渐趋于2(光滑表面的维度)。之后开始大面积铺满电极表面，使表面维度迅速上升，表明在最初的一层之上结构发生了明显的变化，无序与不均匀程度增加，此后表面维度

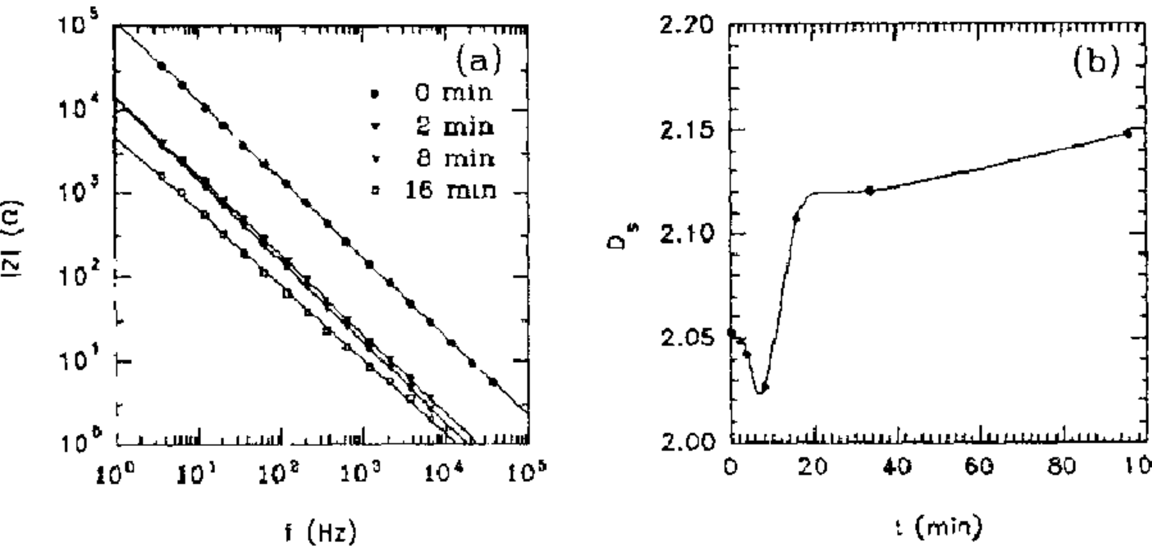


图5. (a)聚苯胺的“动态”阻抗谱(部分)；(b)维度随时间的演化曲线

随着膜变厚而逐渐有所上升。可见恒相角阻抗方法可以为我们展示出生动的生长过程的图象，而且表明紧靠电极表面与在它之上的聚苯胺可能具有不同的结构。

四、结 论

恒相角阻抗谱方法是分形研究中一种全新的实验方法，它测量简单，精度高，适用于导电性材料表面分形的研究。对聚苯胺恒相角阻抗谱的初步研究发现其内、外表面有不同的分形结构；掺杂导致了聚苯胺分形结构的显著变化。阻抗谱方法与导电聚合物材料电化学聚合的结合——"动态"阻抗谱研究更为我们提供了若干有关电化学聚合过程的有用信息。

五、参考文献

[1] I. Wolff, *Phys. Rev.* 27, 755 (1926)

[2] R. de Levie, *Electrochim. Acta* 10, 113 (1965)

[3] P. H. Bottelbergs, in *Solid Eletrolytes*, edited by P. Hagenmuller and W. van Gool (Academic, New York, 1978), Chap. 10
P. 哈根穆勒等著，陈立泉等译，*固体电解质* (科学出版社， 1984)， 第十章

[4] P. H. Bottelbergs and G. H. J. Broers, *J. Electroanal. Chem.* 67, 155 (1976)

[5] R. D. Armstrong and R. A. Burnham, *J. Electroanal. Chem.* 72, 257 (1976)

[6] J. B. Bates, J. C. Wang and Y. T. Chu, *Solid State Ionics* 18/19, 1045 (1986)

[7] 王永宾，袁仁宽，袁 宏，陈忠辉；待发表

[8] S. H. Liu, *Phys. Rev. Lett.* 55, 529 (1985)
T. Kaplan, L. J. Gray and S. H. Liu, *Phys. Rev. B* 35, 5379 (1987)

[9] B. Sapoval, *Solid State Ionics* 23, 253 (1987)
B. Sapoval, J. -N. Chazalviel and J. Peyriere, *Phys. Rev. A* 38, 5867 (1988)

[10] R. M. Hill and R. A. Dissado, *Solid State Ionics* 26, 295 (1988)

[11] Y. T. Chu, *Solid State Ionics* 26, 299 (1988)

[12] B. A. Boukamp, *Solid State Ionics* 20, 31 (1986)

[13] Yuan Renkuan, Gu Zhiping, Yuan Hong, Yuan Xuesong, Wang Yongbin, Liu Xiangna and Shen Xuechu, *Proc. SPIE* 1519, pt. 2, 831 (1991)

[14] J. C. Chang and A. G. MacDiarmid, *Synth. Met.* 13, 193 (1986)

[15] M. E. Josefowicz, R. Laversanne, H. H. S. Javadi, A. J. Epstein, J. P. Pouget, X. Tang and A. G. MacDiarmid, *Phys. Rev. B* 39, 12958 (1989)

分形结构材料的介电谱

姚合宝　贺庆丽
(西北大学物理系)

一 前言

复介电常数是物质的基本性质之一，它又是标志许多物质光、电特性的最重要参数．复介电常数随测试电频率 ω 的变化称为介电谱．它的实用意义早已为人们熟知，然而，最近几年的研究揭示，它也是了解物质特别是无序材料结构的重要分析手段之一．

对结构无序材料介电谱的物理解释已有不少工作[1]，近年来关于分形的研究成果在其中起了关键性的作用，此理论中最引人注目的部分是介电谱反常低频色散(ALFD)标度规律的分形解释．近几年大量实验证明，许许多多无序结构材料的介电谱 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_1(\omega)+i\varepsilon_2(\omega)$ 显示出反常低频色散，其关系式为

$$\begin{cases}\varepsilon_1(\omega)-\varepsilon_\infty\sim\varepsilon_2(\omega)\sim\omega^{-P} & (\omega<\omega_c)\\ \varepsilon_1(\omega)-\varepsilon_\infty\sim\varepsilon_2(\omega)\sim\omega^{n-1} & (\omega>\omega_c)\end{cases} \tag{1}$$

其中 ε_∞ 是介质在高频时的介电常数，ω_c 是一个特征频率。

下面我们在第二部分简单介绍指数 n，P 的分形解释，在第三部分中介绍我们自制的介电谱仪，在第四部分中介绍我们制备的 a-C：H 与 $a\text{-}C_{1-x}C_x$：H 膜的介电谱．

二 理论简述[1]

介电常数与频率的关系依赖于载流子的扩散系数 $D(\omega)$，其计算公式为

$$\varepsilon(\omega)=i\sigma(\omega)/\omega=iNe^2D(\omega)/\omega kT \tag{2}$$

其中 $\sigma(\omega)$是复电导率，N 是载流子密度，e 是电子电荷，k 是玻尔兹曼常数，T 是温度．

对于一定的固体统计力学模型，可以导出[1]

$$D(\omega)=-\frac{1}{6}\omega^2\int_0^\infty dte^{-i\omega t}<r^2(t)> \tag{3}$$

其中，$<r^2(t)>$ 是无规行走的载流子的均方位移值，它与无规行走的载流子在时间 t 返回到原来位置的概率 $P_0(t)$有关，即

$$<r^2(t)>\sim(P_0(t))^{-2/D} \tag{4}$$

其中，D 是物质结构的维数．这样 $\varepsilon(\omega)$就与物质结构联系起来了。对不同的材料结构，可得出下列结论：

(a)一个规则的点阵，显现出的是直流电导率的特性，此时 $\varepsilon_1\sim$常数，$\varepsilon_2(\omega)\sim\omega^{-1}$。

(b)在分形结构上的无规行走可用无规行走的维数 D_W 来描述，它由下式来定义：

$$<r^2(t)>\sim t^{-2/DW} \tag{4}$$

在这种情况下，可以得到：$n=1-D_f/D_W$，D_f是在 $\omega>\omega_C$ 时的分形维数[1]。

(c)除了几何结构上的分形性质之外，$\varepsilon(\omega)$还决定于分形时间过程．它可以由一个无规行走的载流子来说明，这个载流子每走一步都要等待一些时间，通常可认为这个时间分布 $\psi(t)$ 为如下的形式．

$$\psi(t) \sim t^{-1-D_t} \tag{6}$$

其中，D_t 是时间过程的分形维数。这个特性是指数分布俘获或多重捕获的结果，或者是在一个无规链上的跳跃、陷阱控制跳跃或是带有激活能量的指数分布跳跃所产生的结果。

(d)如果时间分形过程存在于一个分形结构上，即以上两种因素同时存在，可以得到[1]：$P = D_t$，在 $\omega < \omega_c$ 时，$1-n = D_t D_f / D_\omega$ 在 $\omega > \omega_c$ 时，这就意味着：

$$(1-n)/P = D_f / D_W \tag{7}$$

三. 介电谱仪简介

我们利用现有的仪器，设计研制了一台计算机数据处理介电谱测试仪，其框图如图(1)所示。在此仪器上对 a-C: H 与 $a-C_{1-x}Cl_x$: H 膜测试的结果，说明仪器工作是正常的。

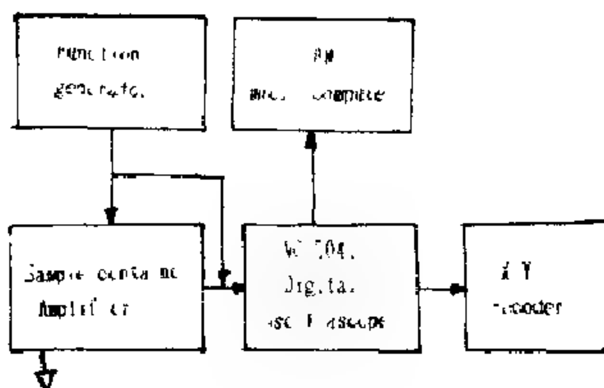


图 1　介电谱测试仪的方框图

四. a-C: H 与 $a-C_{1-x}Cl_x$: H 的介电谱

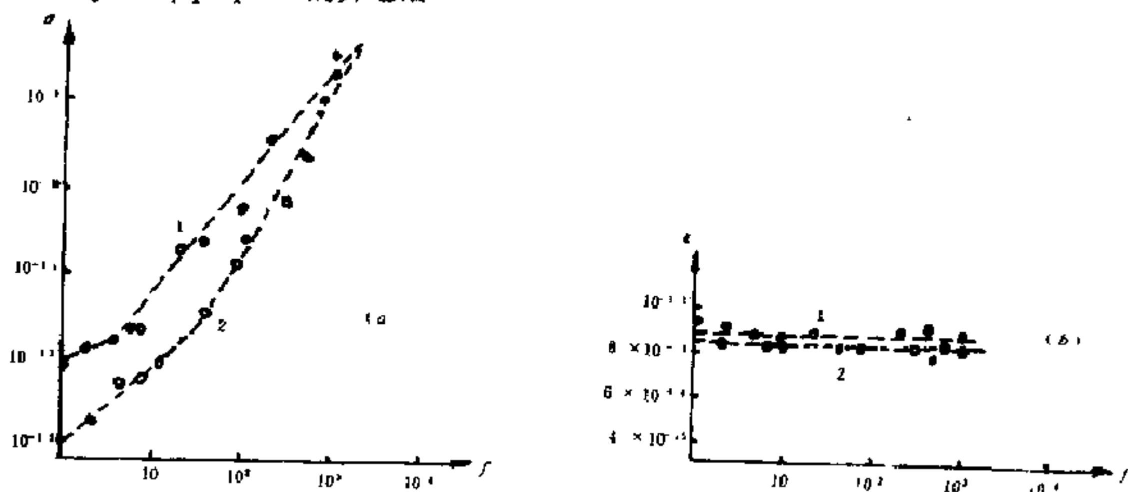


图 2　测试结果.

图(2)——(a)、(b)分别画出了我们测得的 $Cu/a-C_{1-x}Cl_x$: H / Cu(曲线(1))和同样工艺条件下制备的 Cu / a-C: H / Cu(曲线(2))的 σ–f 即 $\omega\varepsilon_2 - \frac{\omega}{2\pi}$、$\varepsilon - f$ 即 $\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2\pi}$ 曲线。由图(2)–(a)中看到，两种样品的试验数据在 $f > f_C$ 和 $f < f_C$ 时分别在双对数坐标平面上形成斜率不同的直线，即遵从(1)式所示的幂指数规律。图中虚线是数据最小二乘法拟合的结果，拟合得到的数值为：$a-C_{1-x}Cl_x$: H(曲线(1))：$f_C \cong 62.8Hz$　$-P = S-1$　$f < f_C$ $(s \cong$

0.42)　$n-1=S-1$　$f>f_C$ ($s\cong1.2$)。a-C:H (曲线(2)): $f_C\cong275Hz$，$-P=S-1$　$f<f_C$($S\cong0.88$)，$n-1=S-1$　$f>f_C$($S\cong1.8$)。与(6)、(7)式对比，可以看出，由此结果并不能反解出D_f、D_W、D_t，这说明我们了解到的理论结果还不足以解释实际测试结果而确定结构。

我们建议用一个极简化的模型来大致理解上述测试结果传达的结构信息。用一个球形表示某一隙态定域态，球的半径以某种形式取决于温度T(它决定了声子供应的能量)及定域态的具体性质，许多这样的球形将形成一个渗流分形[2]，当球形的密度或平均半径增加，以致给出一个空间中无限曲折连通路径时，称作达到了渗流的临界点，若再增加，就过渡到扩展态导电。这个模型实际给出一个由局域态构成的分形，与前面思想完全一致。由此模型容易判断，随着温度T或缺陷态密度N的增加，σ f(即$\omega\varepsilon_2$　$\frac{\omega}{2\pi}$)双对数坐标平面上表征标度规律(1)的直线的斜率将下降。

再来看图(2)-(a)所示我们测得的a-C:H和a-$C_{1-x}Cl_x$: H的σ-f曲线。它们是在同一温度(约25℃)下测试的，因此，按照上述图象，可大致认为斜率的不同仅仅标志了隙态密度的不同。显然，至少当掺入Cl的比例不大时，可以得出结论，同样工艺参数制备的a-$C_{1-x}Cl_x$: H要比a-C:H具有更高的隙态密度。

这项工作表明，低频反常色散介电谱确实可以传达物质结构的信息，随着理论的进一步发展，应该能更定量地描述物质的结构。

本工作是在陕西省科委FE-85307基金支持下完成的。

参考资料

[1] G A.Niklasson, J Appl phys, 62(7), (1987)R_1

[2] 非晶物理学，黄昀等译，北大出版社(1988)153-231

一种研究滤饼结构的新方法**

徐新阳　邓常烈　罗倩

（东北大学139#沈阳 110006）

康　　雁

（中科院金属研究所）

摘要：滤饼结构的实测结果表明，虽然不同物料、不同条件下形成的滤饼具有不同的结构但其孔隙尺寸均满足分形标度律，是一种分形，测得了不同滤饼的分维数，探讨了分维数与物料比表面积及各操作条件的关系。

1、前言

过滤（尤其是滤饼过滤）作为固液分离的基本方法之一，已有近百年的研究历史，而且无论是过滤理论还是过滤技术都取得了较大进展。但是，迄今为止，人们主要还从过滤的整体行为的角度去研究过滤问题，由于测试手段和研究方法的限制，对直接决定过滤行为的滤饼结构则研究很少。然而，要想深化对过滤机理的认识，揭示滤饼含水的微观机制，以提出强化脱水的措施，就必须对滤饼的内部结构进行一些研究，因此，滤饼结构的研究是近来过滤研究的热点。

滤饼是由具有不同几何外形、不同尺寸的固体颗粒堆积而成的，而且还受过滤条件的影响，因此，滤饼具有极其复杂的内部结构，难以用传统的几何学加以描述，分形理论的建立为滤饼结构的描述提供了一种合适的理论模型。

2、分维数的测定方法

描述滤饼结构的分维数有许多种，例如，孔隙边界曲线的分维数和描述孔隙尺寸分布的分维数等，前者用于表征孔隙断面边界曲线的复杂程度，后者用来描述孔隙尺寸的分布情况，限于篇幅并考虑到孔隙尺寸分布对滤饼渗透性的重要意义，本文仅研究孔隙尺寸分布的分维数。

滤饼结构的分维数测定是基于体视学的基本观点[1]，对于一个均匀体系，在取向随机的任一方向上投影的几何参数的平均值相等。因此，只要取一具有代表性的滤饼剖面，如果测得剖面的分维数为D_o，那么滤饼结构的分维数为$D=D_o+1$[2]，即：$D_o=D-1$。

---

* 本文得到国家自然科学基金的资助

** 本文得到中科院沈阳分院理化测试中心的资助

本文是根据分布函数的方法求得滤饼孔隙尺寸分布的分维数的，把孔隙直径记为 d，直径小于 d 的孔隙概率（即占总孔隙的面积百分数）为 A（<d），若按直径的分布概率记为 a（d），则有：

$$A(<d)=\int_0^d a(s)ds \tag{1}$$

如果滤饼结构是一种分形，则滤饼结构就存在⺈相似性，因此，分布概率类型与放大倍数无关，即对任意 λ>0，有：

$$A(<d)\propto A(<\lambda d) \tag{2}$$

成立，而能满足（2）式的函数型只限于下面的幂函数型[3]:

$$A(<d)\propto d^{D_0} \tag{3}$$

用 $D-1$ 代替 D_0 并写成等式:

$$A(<d)=A_0 d^{D-1} \tag{4}$$

式中 A_0 为与滤饼结构有关的常数。对式(4)两边取对数，得:

$$LnA(<d)=LnA_0+(D-1)Lnd \tag{5}$$

因此，借助SM505型扫描电镜和IDASKAT380型自动图象分析仪测得滤饼中孔隙的面积当量直径分布后，可以LnA(<d)对Lnd作图，得到一条直线，根据直线的斜率和截距即可求得 D 和 A_0。

研究还表明，求得的分维数 D 和常数 A_0 具有明确的物理意义，D 的大小反映了孔隙尺寸分布的不均匀程度，D 越大，分布越不均匀，反之则越均匀，A_0 的大小反映了小孔隙相对含量的多少，A_0 越大，小孔隙的相对含量越大，反之小孔隙的相对含量越小。

3、分维数的测定结果：

不同滤饼的分维数测定结果如图 1、2、3 所示：

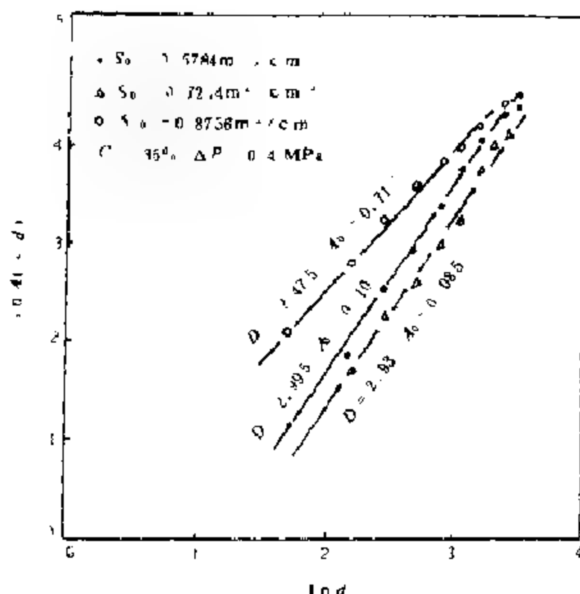


图 . 分维数与比表面积的关系

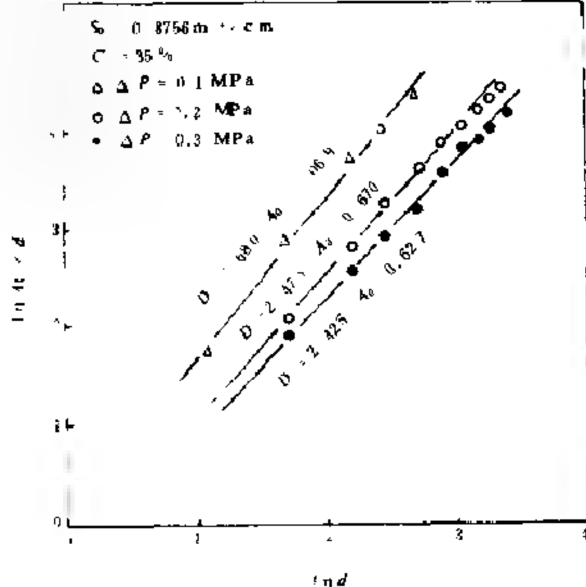


图 2　分维数与过滤压差的关系

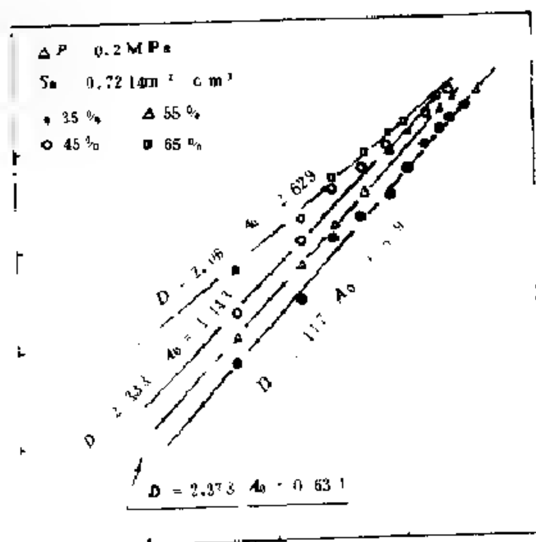


图 3　分维数与矿浆浓度的关系

从上述测试结果可以看出，分维数 D 和常数 A_0 都与物料比表面积、过滤压差和过滤浓度有关：

（1）物料比表面积越大，分维数 D 越小，A_0 越大，说明比表面积越大，孔隙尺寸分布越均匀，细孔隙的相对含量越高。

（2）过滤压差越大，分维数 D 和常数 A_0 均越小，说明压差越大，孔隙尺寸分布越均匀，细孔隙的相对含量越低。

（3）浓度越高，分维数 D 减少，常数 A_0 增大，说明浓度越高，孔隙尺寸分布越均匀，细孔隙的相对含量越小。

一 结论

不同物料、不同条件下形成的滤饼具有随机自相似性，是一种分形结构，可以用分形理论去描述滤饼孔隙结构，而且分维数 D 具有明确的物理意义，D 是物料比表面积和各操作因素的函数，今后的工作是找出此函数的表达式，以实现利用分形理论描述过滤机理的目标，进一步的工作正在进行之中。

参考文献

[1] 余永宁、刘国权 《体视学》 冶金工业出版社 1989.12

[2] Mamdelbrot B.B. Fractal in physics(Trieste) 1985.476. North--Holland Amsterdam. 1986.

[3] 高安秀树[日] 分数维. 地震出版社. 1980.12

烧结金属粉末的超声衰减的机制研究*

从扩展的声子态到局域的分形子

沈中城

（苏州职业大学　　基础部）

无序体系里经典波局域化是凝聚态物理学的一个重要问题。早在1958年安德森就首先提出了电子局域化问题。电子局域化本质上是一个相当复杂的问题。安德森局域化是无规散射波干涉效应的体现，与量子性质或粒子的统计特性并无密切的关系。因而可以推测无序体系中的声子也是局域化的。强烈局域化振动，称为分形子。

本文讨论了烧结金属粉末的超声衰减实验里观察到衰减对超声频率反常幂规律，论述衰减的机制：从扩展的声子态到局域化的分形子的渡越。

一、实验结果

早在八十年代前期，加拿大大学Queen大学的M・C・Maliepaard[1]等使用超声技术来研究无序体系——烧结金属铜粉末的振动模。

超声声速和衰减是用被干抛光的、薄园般状的试样里测量，烧结试样是被两个园柱熔融石英棒夹住，在其两端用压电陶瓷传感器测量。超声衰减的大小是由超声信号振幅相对于从延迟棒/烧结体界面折射过来的参考脉冲的变化作为频率的函数。超声衰减很大的变化，主要归结为由于烧结体声吸收。后来J・H・Page等改进他们的实验装置，使用一个新的相不灵敏传感器来作多孔铜粉末烧结体的超声衰减随频率变化。实验是在1—20MHZ频率范围内进行，试样烧结铜粉末，粉末直径d＝0.5和10μm。占有体积部分从0.3到0.6。超声脉冲由一个钛酸锆传感器产生，通过薄园盘试样由CdS相不灵敏传感器来检测。实验结果见于图1。

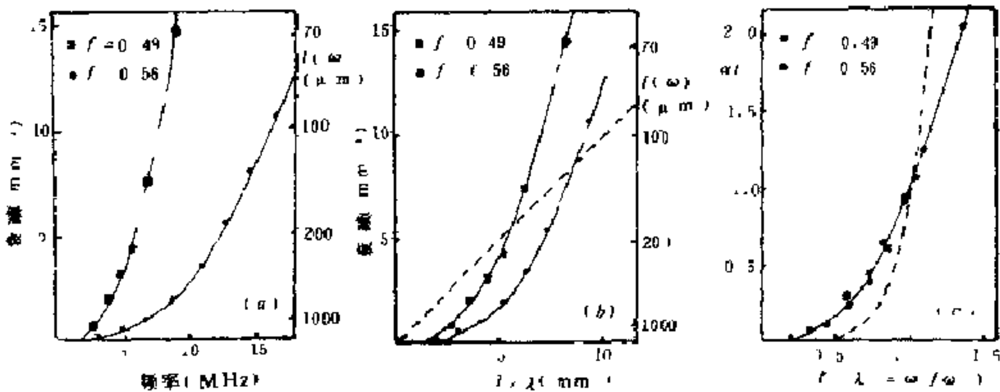


图1　在10μm烧结体纵超声波的衰减

a)衰减对频率关系　局域化长度左右边用标度表示)　(b)衰减与波长倒数关系（虚数α　λ，决定临界局域化长度）

(c)衰减对l　λ关系　虚曲线是EMA)

* 本文主要内容已被国际第十届固体内耗和超声衰减会议接受。

由此可见：超声波衰减量随频率增大而剧烈地增长。如果占有体积部分更低，观察到衰减极大值比块状铜里的衰减要大得多。这意味着衰减不是由金属里普通的声吸收机制造成的，而是推测由烧结物里几何无序散射相关。观察到衰减对超声频率反常的幂规律，实验中观察到很大衰减是与烧结体里的局域化振动膜的转变相关，是一种新的超声衰减机制：从扩展的声子态到局域化的分形子态的渡越。

二、渗流网络振动谱的标度论证

de Gennes[3] 早已指出：渗流体系的弹性刚度类似于渗流网络的临界传导率。无序体系从力学上可以近似地看作各向同性，而不像晶态严格地讲是各向异性的。因此，人们假设弹性势能正比于两点之间相对位移矢量的平方。用$\vec{R}_i$和$\vec{R}_j$两点来表示坐标，它们的位移用$\vec{r}_i\vec{r}_j$。那末弹性势能是

$$V_{ij} = (k/2)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \tag{1}$$

k 是弹性常数。Feng 和 Sen 对此作了修正[4]：

$$V_{ij} = (k/2)[(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\cdot(\vec{R}_i - \vec{R}_j)]^2 \tag{2}$$

这个模型称作中心力势模型。作者们研究两种网络，两维三角形网络和三维面心方立网络。他们在数值上研究体模量 Ke 和切变模量 μe 是键浓度的函数，发现这两个模量具有幂函数规律，在阈值是奇异的。

$$Ke, \mu e \alpha (P - Pc)^t \tag{3}$$

对于两维网络，Pc＝0.35 和 t＝1.2，具有各向同性弹性力；对于同样网络具有中心力，Pc＝0.58 和 t＝2.4。对于三维网络，类似的结果将得到。

对于弹性模量的标度关系

$$Ke \alpha L^{-t/\nu} \tag{4}$$

而渗流集团，相关长度是由 $\xi \alpha (P-Pc)^{-\nu}$ 给出。弹性模量是 $Ke \alpha (P-Pc)^t$，我们能修正等式（4），以 $Ke\alpha\xi^{-t/\nu}$，和

$$t/\nu = D - 1 \tag{5}$$

各向同性力的模型 t 是相同的，人们得到：

$$t/\nu = 1, 2 \qquad 对于\ D = 2, 3$$

$$\mu/\nu = 0.737, 1.585 \qquad 对于\ D = 2, 3.$$

Kantor 和 Webman[5] 认为由附加键一弯曲弹性力在正方网络上渗流集团是稳定的。基于这弹性力模型，他们表明弹性阈是与导电率阈同一的，但弹性模量临界指数是比传导率高得多。值得指出：无序分形结构是由纤细的、稀疏的链状结构单元。在分形结构的网络模型里，在网络上产生的聚团有随机几何相似性对应于相应的物理结构。对于渗流聚团，网络点是随机地以概率 P 选择。当 P≥Pc，一个横跨试样的聚团能形成，这个聚团是分形的，直到大小标度号在 Pc 处发散。一般的分形结构，弹性特点由弹簧、弯曲骨架支配。

可以推出振动态密度在渡越频率处有一跳跃式的增长：$\Delta N(\omega) = A\omega_{co}^{\bar{d}-1}\omega\Delta f$。（7），结果概括在图 2。

三、超声衰减实验与分形子解释

超声信号沿 x 方向传播，其强度随 x 变化

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha(\omega)x} \qquad (8)$$

衰减常数能被解释为依赖于频率的振动局域长度 l (ω) 的倒数，也就是

$$I(x) = I_0 e^{-x/l(\omega)} \qquad (9)$$

在低频，局域长度是大的 (l≫λ)，因此也就是扩展的振动态，相当于声子区。在高频，局域长度随频率迅速减少，在目前实验室里可观察到极大衰减，l (ω) 变得比超声波长更小。当超声衰减的标度以渗流相关长度 ξ (f)，f 是烧结体的体积部分。具有不同占有体积部分 f_1 和 f_2 烧结体里局域长度按以下方式来标度：对于 $\lambda_1/\xi(f_1) = \lambda_2/\xi(f_2)$，

$$\frac{l_1(\omega_1 = 2\pi v_1/\lambda_1)}{\xi(f_1)} = \frac{l_2(\omega_2 = 2\pi v_2/\lambda_2)}{\xi(f_2)} \qquad (10)$$

局域长度的临界值 l_l^* 是正比于 ξ，定义为传播单个波长后超声强度衰减 1/e，也就是 $l_l^* = l(\omega^*)$ 在临界频率 ω^*，这样 $l(\omega^*) = \lambda = 2\pi \frac{v}{\omega^*}$。实验上[12] 可以得到 $l^*_{0.56} = 116\mu m$ 和 $l^*_{0.49} = 141\mu m$，所以到 $l^*_{0.56}/l^*_{0.49} = 0.82$。这与从相关长度之比 ξ (0.56) /ξ (0.49) =0.83，是一致的。这是在 10μm 粒子烧结体所作的结果。同样，对于粒子直径 0.5μm 的烧结体，也与标度预言相一致。确实在烧结体里发生在由相关长度 ξ 决定的长度标度的振动局域化的开始，也就是 ξ 是欧几里德和分形区域之边界。渡越波长和频率是 $\lambda_c \sim \xi(f)$ 和 $\omega_c(f) \sim 2\pi v(f)/\xi(f)$，v (f) 是超声波速。

烧结金属粉末的电子显微图像表明：烧结体是很不均匀的，用聚团的聚团将是更好的描述。Rutherford[9] 等假设：连续媒质声子的上限和块状金属德拜声子的下限之间的频带，存在包括一个或少许粉末粒子的局域模，这些模的平均密度是常数。这三个不同的频带图示于图 (3)。而 Webmen 和 Grest 等[10]基于微观弹性模型，准确地描述烧结体的弹性特征，预言一个 $\omega^{0.1}$ 依赖性。这一预言与 Rutherford 等假设的态密度 ω^0 依赖性相一致。

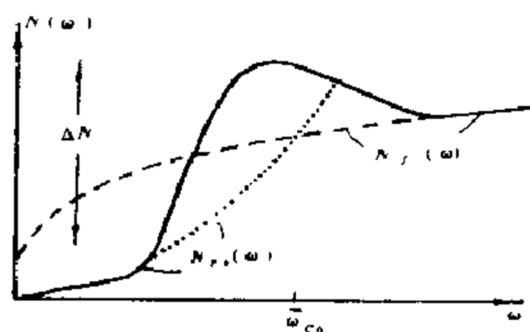


图 2

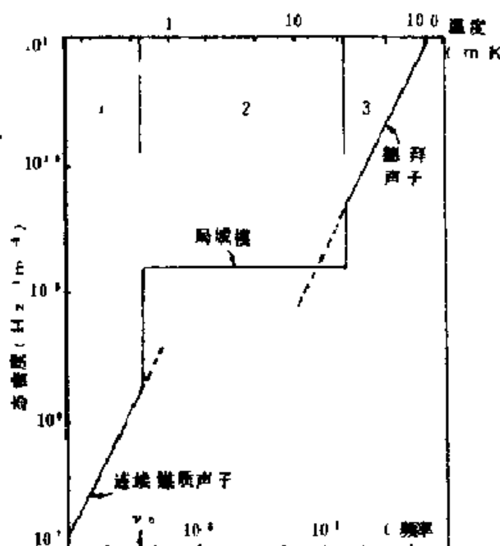


图 3

参考文献

1. M·C·Maliepaard, J·H·Page, J·P·Harrison and R·J·stubbs, Phys. Rev. B. 32, 6261, (1985);

2. J·H·Page and R·D·McCulloch, Phys. Rev. Lett. Vol. 53, 1324, (1986);

再入飞行器烧蚀问题分形研究

伍小平　　金峰

（中国科技大学近代力学系）

摘要　本文从再入飞行器烧蚀模型试验出发，对湍流边界层的分形行为进了讨论，计算出与之紧密相关的烧蚀表面分维数，并提出热流风洞模型试验数据的分析方法。

关键词　再入飞行器，湍流，烧蚀，分形，分维

一、引言：

烧蚀问题是航天科学和武器研究中的一个重要问题。在飞行器再入大气层时，由于高速空气摩擦的烧蚀作用，造成形状的小尺度不对称，这种不对称产生纵向与横向的扭转力矩，导致飞行姿态的改变，造成飞行器轨道偏移甚至飞行器的毁坏[1]。针对烧蚀，国内外科学家进行了理论分析和实验研究[2]。

烧蚀图象是与边界层流场状态紧密相关的层流、湍流以及转捩区有着不同的烧蚀花样。但目前对烧蚀图象的研究多数是唯象的、半定量的，对烧蚀后表面的状态也没有合适的表征方式。烧蚀问题实验研究还有一个难题是，预研实验只能在地面做，鉴于电弧加热风洞的功率有限及耐高温材料的昂贵，只能做很小尺度的几何相似模型。然而烧蚀实验是复杂的，仅有几何相似是不够的。烧蚀表面是复杂图形，再入大气时飞行器表面的压力脉动也是随机时间序列，如果利用非线性科学采用的分形概念，用分维数定量描述烧蚀表面复杂性和压力脉动时间序列，从而有可能建立烧蚀模拟实验的可信度，而且可以用熔点低些的廉价材料做大尺度的模型实验，以获得关于烧蚀的更多的信息，本论文对烧蚀问题，进行了分形分析的探索。在测量的基础上，计算出所提供样品的烧蚀表面的分维数并提出压力脉动时间序列分维数的计算方法，为进一步研究烧蚀问题的相似律打下了基础。

二、湍流的分形行为

由于对再入飞行器烧蚀图象起决定作用的是边界层流场状态，而其中湍流占主导地位，因此对湍流的研究有助于烧蚀问题的分析。

当流体运动有较高的雷诺数的时候，流体中就会出现湍流运动现象，其特征是：流体除了一个以平均的速度运动外，在这个平均的流动上还叠加了一个非常不规则的流体运动，称作涨落运动[3]。这种涨落运动是‘流体团’或“涡旋”运动。湍流运动的基本方程是 Novier－Stokes 方程：

国家自然科学基金资助项目

$$\begin{cases}\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho}P_{,i} + v\nabla^2 u_i & (1)\\ u_{j,j} = 0 & (2)\end{cases}$$

式中 u 是速度张量，P：压力，ρ：流体的常数密度；v：流体的运动粘性系数。

由于湍流的复杂性和方程的非线性，求解 Stokes 方程存在着巨大的困难。就在"山重水复疑无路"的时候，分形理论另辟蹊径，揭示了湍流运动的分形行为。显示湍流的分形结构的方法有多种，一种是测量流体中一点速度的平方随时间变化[4]；另外一种是在流场中加入少量的长链分子然后通过偏振片观察[6]，这些长链分子的排列受到湍流剪应力的作用，在剪应力大的区域各向异性的高分子对散射光有退偏振效应，这样就显示了涡旋结构。

通过对散射光自相关函数的测定[6]，证明了这样两点结论：

1、包含能量的涡旋在几何结构上是分形。

2、当雷诺数 Re 超过一定的临界值时，湍流的分维值随雷诺数而变化。

散射光自相关函数：

$$g(t) = \langle I(t')I(t'+t)\rangle / \langle I(t')\rangle^2 \qquad (3)$$

这里 I(t)是散射角为 θ 的光强，可以证明[7]：

$$g(t) = 1 + f(A)\cdot G(t) \qquad (4)$$

当光强只来自一相关区域时，几何因子 f(A)～1，这样主要问题转化为函数 G(t)的形式[7]：

$$G(t) = \int_0^L h(R)dR\int_{-\infty}^{\infty} P[V(R)]\cdot\cos[kV(R)\cdot t]\cdot dV(R) \qquad (5)$$

h(R)是在长度 L 的区内，发现相距 R 的一对质点的概率；P(V(R))是概率密度函数，$\bar{k}$ 是散射矢量，模为：$k=(4\pi n/\lambda)\sin\frac{\theta}{2}$，n 为折射率，λ 光波长。

可以看出，内层积分是特征函数 P[V(R)]的傅氏变换。P[V(R)]具有无量纲形式(scaling form)：

$$P[V(R)] = Q[V(R)/u(R)]/u(R) \qquad (6)$$

其中 $$u(R) \sim [\langle V(R)^2\rangle]^{\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

那么 $$G(t) = \int_0^L h(R)\mathscr{F}[kt\,u(R)]dR \qquad (8)$$

事实上 L 可以认为是通过宽度 L 的狭缝可以观察到的最大涡旋尺度。在一个很宽的雷诺数和狭缝宽度范围内，G(t) 具有无量纲形式(scaling form)：

$$G(kt, L, R_e) = G(K) \qquad (9)$$

$K\sim k^{\alpha}L^{\xi}t$，在双对数坐标系中作 G(K)- K，则可以看出这种标度不变行为(scaling behavier)，见(图 1)。

因为涡旋运动的耗散时间 T～ 1/ku(L)，而 u(L)～L，则在双对数座标系作出 T--L，其斜率给出了指数 ξ. 随着 Re 增加，ξ 取值从 0～ 1/3，见图(2)。这里给出的结果是与湍流耗散机制相符合的：由压力差所联系着的流体平均运动的能量能够通过流体元素的变形与转动传输到涨落运动(涡旋)，后者又通过不同级尺度的涨落运动，逐级传输到尺度最小一级粘性流动而最后耗散为热能[3]。最快的耗散速率是与涡旋的最大尺度 L 相联系的。

因为湍流的分形维数 D=(3ξ+2)，所以 2 <D< 3，也随着 Re 增加。

湍流运动是由许许多多微小的涡旋运动组成，这种涡性结构有着这样的物理图形：组成湍流的每个涡旋的涡量比较集中在一个小体积范围内，涡旋本身在自己的涡量感生下能作移动运动，但在涡量的作用范围之外涡旋在流体中感生的速度比较小[8]。这样，湍流的能量集中于维数小于 3 的空间内，表现出湍流的局域化特性。当 D=3，湍流充分发展充满整个空间。

三、烧蚀图象分维计算

通过上面的分析可以看出，具有分形结构的湍流边界层将导致具有分形结构特征的烧蚀图象。烧蚀图象的分维计算采用 SIA(Slit Island Analysis)方法，此方法首先由 Mandelbrot 提出，用于测量材料断裂表面的分形维数，其原理如下：

对于规则图形的周长 P 和面积 A 之间存在这样的关系：

$$P \sim A^{1/2} \tag{10}$$

类似地，对于不规则图形(具有自相似性或自仿射性的分形)的周长和面积之间的关系：

$$P^{1/D} \sim A^{1/2} \tag{11}$$

其中，D 为不规则曲线的 Hausdorff 维数

对(11)式两边取对数，有

$$\log P = (D/2)\log A + const$$

因此，在双对数坐标上会得到 logP～logA 的一条直线，其斜率的二倍即分维值。在测量材料断面的分维值时，首先在试件断面上镀一层 Ni，然后平行于断口平面用细砂纸磨去一层并抛光，这时原来凸起的部分被磨去之后在显微镜下呈现出各种各样象岛屿和湖一样的图案。重复上述过程，便会得到一系列发亮的“岛”和发暗的“湖”，计算“岛”和“湖”的面积和周长，并把所得数据在双对数坐标上作图。得到一条能够很好拟合所测数据的直线，由此可得到断面的分维值。这是常规的一种方法，可以看得出其工作量较大，处理过程繁复。

在这里，我们采用光学方法测得试件烧蚀表面形状等高线，用计算机图象处理系统自动采集等高线的座标值，并计算等高线的周长和面积。这样就获得了一系列剖面的周长和面积，再用线性回归方法处理这些数据，就可以直接得到断面的分维值。这样既提高了计算精度，又简化了处理过程，缩短了实验周期，有利于进行大批量试件的统计分析。(图 3)给出了各试件烧蚀表面的分维值。

B－2－2：D ＝ 2.385546；　　B－3－2：D ＝ 2.5627434

B－1－3：D ＝ 2.5022462；　　C－2－5：D ＝ 2.3157278

四、热流风洞模型试验数据的分形分析

在热流风洞中进行材料烧蚀模型试验的过程中，测得试件表面压强 P 随时间的变化。当流场进入湍流状态时，压强 P 随时间的涨落(或称波动)是无规的，对这样的数据可以用时间序列的分形分析方法进行研究[2]。

首先，判断此时间序列是否为分形。在相空间内相图 P(t)－P(t+τ)。

如果相图上出现奇异吸引子(strange attractor)，则可断定 P(t)为混沌现象

然后，计算此时间序列的分形维数，其原理如下：

对于时间序列 P(t)将其嵌入 m 维空间，处 m 维向量：

$$\vec{y_1} = (P_1, P_2, P_3, \cdots P_m)$$

$$\vec{y_2} = \{P_2, P_3, P_4, \cdots, P_{m+1}\} \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\vec{y_{n-m+1}} = \{P_{n-m+1}, P_{n-m+2}, \cdots P_n\}$$

则分维

$$D = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} (1/N^2) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \theta(\varepsilon - |\vec{y_i} - \vec{y_j}|) \tag{13}$$

其中，ε 为 m 维小球的直径。(12)式中函数 $\theta(x)$ 的定义为：

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{14}$$

随着嵌入空间的维数 m 的增加，D 也随之增加，到一定程度则趋于饱和，则此时临界值 D 即为此分形的分维值。

对这样的压力脉动的时间曲线，还可采用另外一种较简单的方法计算分维值。

在 X(t)——t 坐标下，以一个固定的单位标尺 a 测量任意两点 A、B 之间的曲线长度为 N（=N）（这就等价于计算 AB 之间曲线包含直径为 a 的小球的数目）：计算标准差

$$X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_c)^2$$

$$T^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_c)^2 \tag{15}$$

这里 $x_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$，$T_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$，$(t_i, x_i)$ 是坐标系中第 i 点坐标。

重复这个过程得多组数据并在双对数坐标系下作 X—N，t—N，可以看出它们具有这样的关系：

$$X \sim N^{\upsilon_x}, \qquad T \sim N^{\upsilon_t}$$

因而 $X \sim T^H$，指数 $H = \upsilon_x / \upsilon_t$ 并且分形维数 $D = 1 - H$。

五、结论：

分形分析对烧蚀问题的研究具有重要的意义：

1、可以给出烧蚀表面特征的定量描述：烧蚀后表面是复杂图样，用分维这个参数，可以很清楚地给了其定量表征，藉助于分维，可以对不同的烧蚀图样加以比较，使图样的分类建筑在更科学的基础上。

2、可以为模型试验的相似律提供根据。分维数作为无量纲数，按相似律的要求，分维数必须保持不变。过去的实验没有注意这一问题。同时，烧蚀实验相似律的完善，有可能用目前国内的电弧加热风洞和适当的材料，做较大尺度的模型试验，以期对烧蚀问题获得更多的信息。

3、可以做碳－碳纤维增复合材料设计的一个重要依据。烧蚀表面的分维值定量反应了表面相对烧蚀情况，通过对不同材质、不同工艺方法制造出的材料进行实验、计算，可以选择出最佳的方法。

参 考 文 献

1. J. P. Crenshaw, J. E. Zimmer and J. L. Saperstein, AIAA 80-1474

2. 金峰，伍小平，实验力学，6(增刊)，1991，86－89.

3 周培源，物理学报，13(3)，1959，220—242.

4. K. R. Sreenivasan, R. Ramshankar and C. Meneveau, Proc Roy. Soc. (London) A .21,(1989),79.

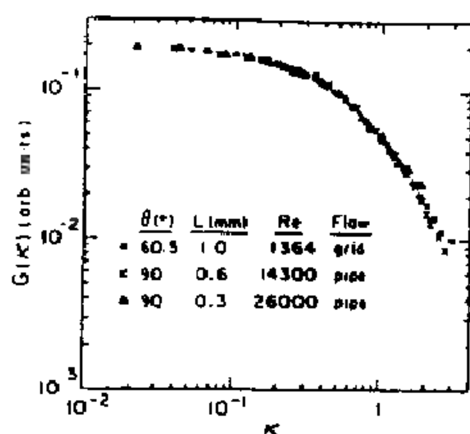
5. E. RLindgren, Arch. Fys. (1959),97

6. W. I. Goldburg, P. tong and H. K. Pak , Physica D, 38, (1989),134—140.

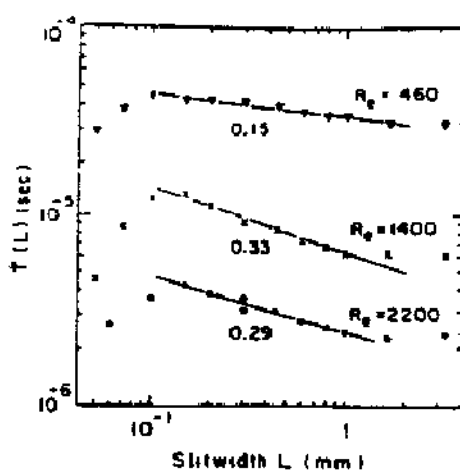
7. P. tong and W. I. Goldburg, phys. Fluid.31,(1989),2841.

8. 周培源，是勋刚，李松年，北京大学学报，1965,11(1),39—52.

9. Mitsugu Matsushita and Shunj Ouchi,physica D,38,(1089),246—251.



(图 1)



(图 2)



(a) B-2-2 Δh—0.22mm 分维 D—2.38



(b) B-3-2 Δh=0.23mm 分维 D=2.56



(c) B-1-3 Δh=0.21mm 分维 D—2.50



(d) C-2-5 Δh=0.40mm 分维 D=2.31

(图 3)

全息法等高线图(Δh 等高线间距)

分形表面及其近场散斑的奇异吸引子

李江伟　　伍小平

(中国科学技术大学,力学系)

摘要　本文从 Rayleigh-Sommerfeld 衍射积分公式出发,利用超小型计算机 VAX-11/8700,生成了具有给定分维数的分形表面,计算了透射相干光近场散斑的光强分布. 其相空间的图形,显示了近场分形散斑具有奇异吸引子.

关键词　分形几何,分维,奇异吸引子,激光散斑统计,近场散斑.

1　前言

Mandelbrot 等开拓的分形几何,在基础科学的理论与实验研究中,有着愈来愈广泛的应用. 光的散射是物理学的一个经典课题. 它在诸如遥感,粗糙度测量以及微小变形分析等领域,有很强的应用背景,关于分形表面的光散射,已有文献报道,论文[1]讨论了高斯随机位相屏散射模型引起的散射光的统计特性. 论文[2]讨论了分形表面的光学富里叶变换性质. 本文则是利用 R. F. Uoss 提出的一种方法来生成分形表面,然后在菲涅尔深区,研究透射散斑场的光强分布,计算和模拟的结果是令人感兴趣的.

2　原理

2.1　分形表面的生成

R. F. Uoss 提出了一种生成分形布朗运动的方法,称为"连续随机增量法"[3],参考这种方法,按如下步骤形成分形表面:

1)起始状态是一个位置序列:$x(t_1)$、$x(t_2)$,…,$x(t_N)$,对应的时刻是 $t_1,t_2,\cdots t_N$. 一般地,开始时可以取 N=3,且有

$$t_i = 0,\frac{1}{2},1$$

$$x(t_i) = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

2)在 $x(t_1)$,$x(t_2)$和 $x(t_3)$上,叠加一个正态分布的随机增量,该增量具有零均值及方差 σ_1^2 为 1

3)在中间时刻插值,生成 5 个时刻的位置序列,即在 t_1 并 t_5 分别为 $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$ 的时候的 $x(t_i)$,i=1,2,3,4,5.

4)在现在 5 个 $x(t_i)$上,又叠加一个随机增量,其均值为零,方差为

$$\sigma_2^2 = (\frac{1}{2})^{2H}\sigma_1^2$$

5)再经过插值,就生成 9 个时刻的位置序列. 以上过程重复几次后,就可以生成一个随机布朗运动. 这个随机位置序列,是由随机增量和插值得到的. 随机增量是正态分布的,其均值为零,方差为

$$\sigma_n^2 = (\frac{1}{2})^{2H}\sigma_{n-1}^2 = (\frac{1}{2})^{2nH}\sigma_1^2$$

ss 证明了利用这种计算法生成的序列，具有自相似性，其分数维数 D_0 为

$$D_0 = 2 - H$$

1 给出了三种 H 值相应的位置序列. 现在把这些函数做为表面的高度起伏函数，因而，这就对应具有三种不同分维数的分形表面. 顺便指出，$H=0.5$ 即对应于通常的完全随机的布朗运动.

2.2 散斑场光强的计算

考虑准直光照明上述的三种透射的分形表面，按 Rayleigh-Sommerfeld 衍射积分公式，计算距表为 Z 处的光场复振幅 $U(x',z)$，见图 2.

$$U(x',z) = \frac{1}{j\lambda}\int_l e^{jk(r+h)}\frac{\chi(\theta)}{r}dl = \frac{1}{\lambda}[\frac{1}{j}c + s]$$

中

$$C = C(x',z) = \int_l \frac{\chi(\theta)}{r}\cos k(r+h)dl$$

$$S = S(x',z) = \int_l \frac{\chi(\theta)}{r}\sin k(r+h)dl$$

中，λ 为相干光波长，$k=2\pi/\lambda$，$\chi(\theta)$为倾斜因子，h 为表面高度分布，r 见图 2 所示. 由此可得光强为

$$I = U \cdot U^* = \frac{1}{\lambda^2}[C^2 + S^2]$$

为研究的近场属于菲涅尔深区，为了计算的合理性，考虑了一次挡光效应，即光线被表面起伏挡后，就不再计算其贡献. 为简单起见，按上述公式仅处理一维的情况.

结果及讨论

3.1 相空间描述

图 3 为分形表面取 $D_0=1.4$ 的相图，横坐标为表面高度 h，纵坐标为 h 的导数 h'，图 4 为该表透射相干光散斑场的相图. 横坐标为散斑光强 I，纵坐标为 I 的导数 I'. 有关的计算参数分别 $\lambda=0.633\mu m$，$z=50\mu m$，$l=10\mu m$.

图 3 和图 4 的相图表明，经过光场的积分公式，表面高度起伏具有不动点型奇异吸引子，而其射的散斑光强分布，具有极限环型奇异吸引子.

3.2 简章讨论

我们认为，近场散斑的光强分布与表面特性息息相关. 对光场统计特性的进一步了解，无疑具十分重要的意义. 分维数作为一个参数，在散斑光强统计中有一定的作用. 对于近场的情况，从用散射来讲，是最重要的，但对近场散斑的统计分析，不论在理论上和实验上，都存在着相当的困，而计算机模拟是一种很有效的分析途径.

参 考 文 献

[1] Jakeman E., Scattering by Fractals, in *Fractal in physics* (ed. L. Pietronero & E. Tossatti) Elsevier Science Publishers B. V., 1986, 55-60.

[2] Allain c., Optical Fourier Transforms of Fractals, in *Fractal in Physics* (ed. L. Pietronero & E. Tossatti) Elsevier Science Publishers B. V., 1986, 60-64.

[3] Uoss R. F., Random Fractals, Characterization and Measurement, in Scaling Phenomena in Disordered Systems (ed. R. Pynn & A. Skjeltorp) Plenum Press, N. Y., 1-11.

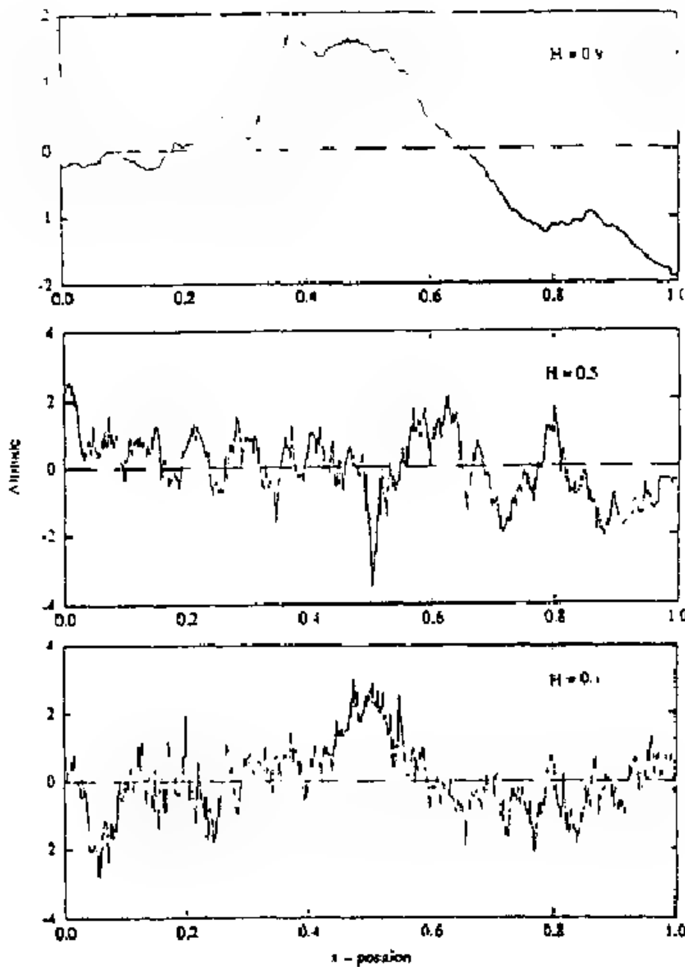


图 1 三种分形表面

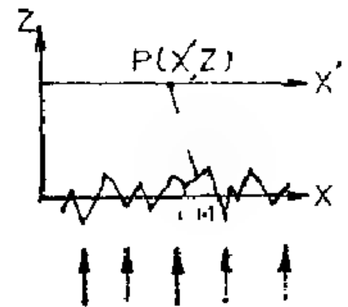


图 2 计算模型

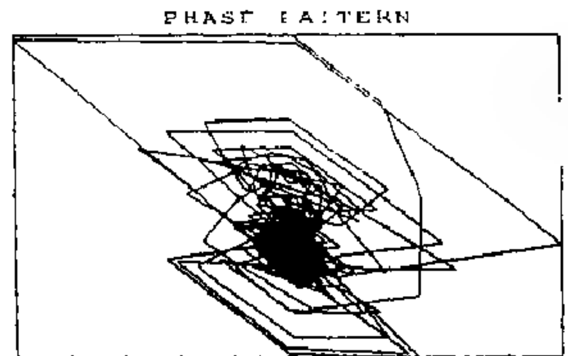


图 3 表面高度 h 的相图

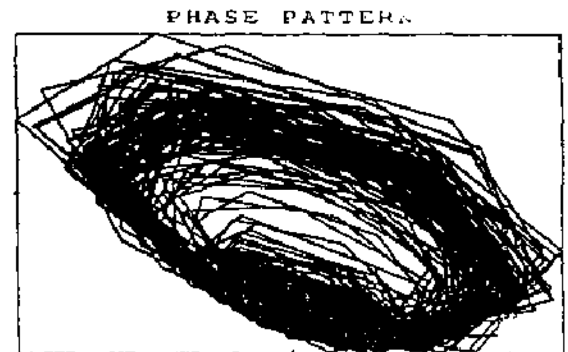


图 4 光场光强 I 的相图

溅射法制备银超微粒的粒径分布分析

邓昭镜　　李　建　　孙　强

西南师范大学物理系，重庆，630715

[摘　要]

本文从唯象角度对银超微粒的射过程进行了理论分析，试探性地建立了银超微粒粒径分布函数所满足的随机场方程，并将其一般解应用于具体的溅射情况中，所得结果能较好地拟合实测数据.

PACC: 0540; 7920

一　银超微粒的实测分布

图 1 是我们所用溅射装置的示意图，图中 1 是阳极，2 是样品阴极；3 是收集屏，在收集屏上布列铜网，调整正、负极间相对位置，使其入射角 $\theta_0 = 30°$，抽空溅射室使其真空度达到 10^5 毛，再注入 Ar 气，使 Ar 气压处于 0.8～1 毛之间，然后在(600～1000)V 区间内调整电极电压(极间电压明显地依赖于极间距)，经 3 分钟溅射后取出铜网，置于电镜中观察拍照. 图 2 中(a)～(f)分别对应于收集角 $\theta = 7°, 20°, 30°, 40°, 46°$ 和 $50°$ 时拍摄的放大 15 万倍的电镜照片，图 3 给出了图 2 中前五张图片中粒径分布的实测方框图.

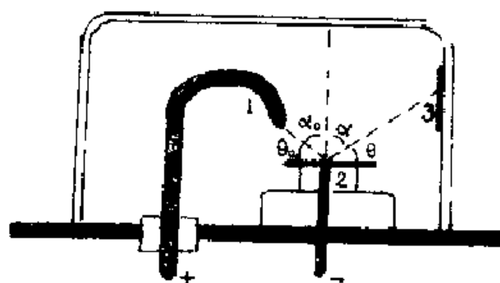


图 1　溅射装置示意图

二　粒径分布的随机场方程

以粒径 X 和溅射角 θ 作随机变量，由 (X,θ) 建立随机变量空间，在此空间中可以引入四个随机场函数，现分述如下：

i)　令 $f(x,\theta,\theta)$ 是粒子处于态 (X,θ) 的几率密度

参量 L 表示接收屏上铜网位置，L 代表靶与铜网之间的距离

ii)　设 $p(X,\theta,0)$ 表示靶上粒子处于态 (X,θ) 的几率密度，$L = 0$ 表示靶的位置

iii)　用 $\beta(X,\theta,L)$ 表示单粒子被俘获的几率[1]，即一个 X 粒径的粒子，沿 θ 方向从靶到屏的进程中被周围介质(即空间其它粒子)俘获的几率

iv)　以 $w(X,\theta,L)$ 代表形成粒子的组态密度，它表示沿 θ 方向的粒子束，在接收屏单位面积上形成 X 粒径粒子的组态数

现在考虑微小的线性过程，同时又注意到 $f(X,\theta,L)$, $p(X,\theta,0)$ 和 $W(X,\theta,L)$ 都是密度量，而 $\beta(X,\theta,L)$ 则是单粒子俘获参量，因此，在应用几率密度守恒原理时，必须将它们都归一到单粒子量(或密度量)上，这样，我们可以建立以下场方程：

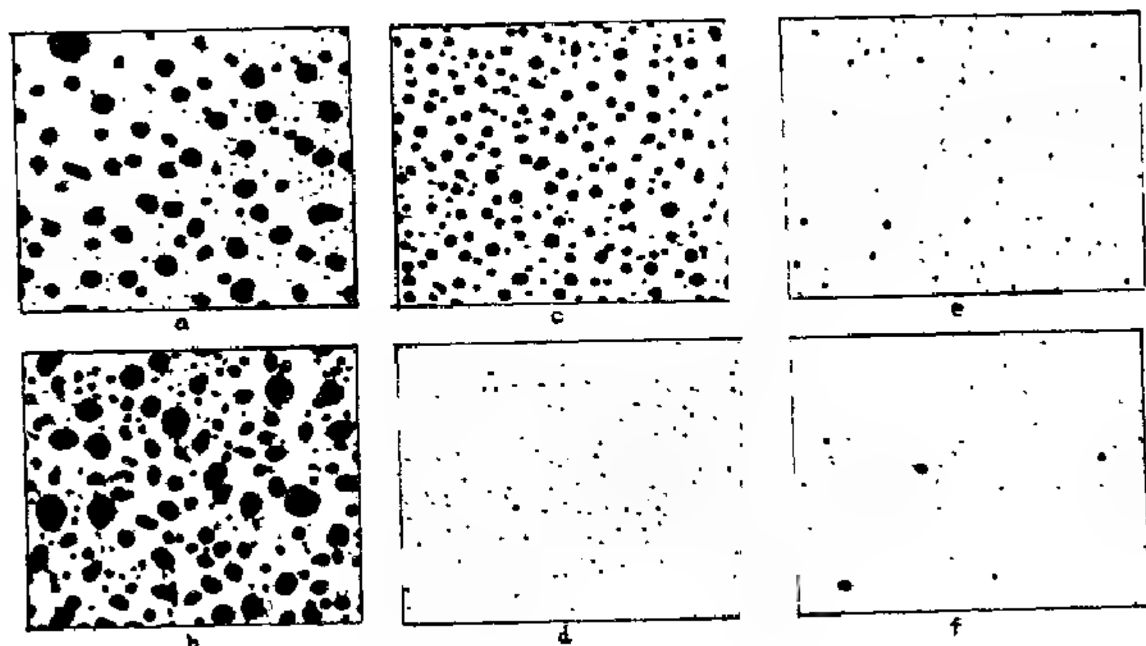


图 2　银超微粒电镜照片

(a), $\theta = 7°$; (b), $\theta = 20°$; (C), $\theta = 30°$, (d), $\theta = 40°$; (f), $\theta = 46$; (f), "$\theta = 50°$

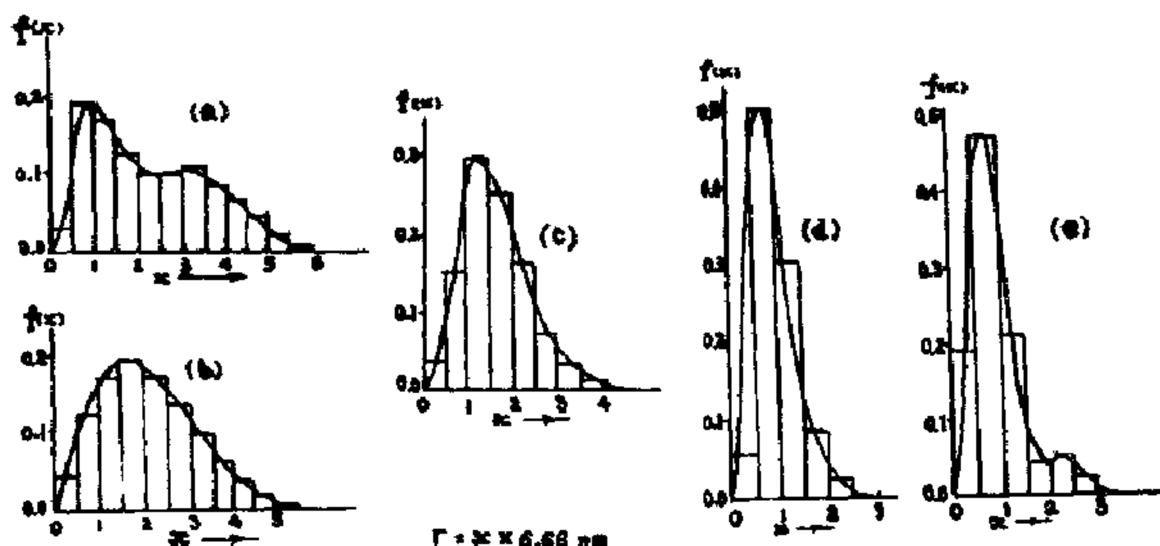


图 3　实测粒径方框图和模拟曲线

$$\frac{1}{f(X,\theta,L)}\frac{\mathrm{d}f(X,\theta,L)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{p(X,\theta,0)}\frac{\mathrm{d}p(x,\theta,0)}{\mathrm{d}X}+\frac{1}{W(X,\theta,L)}\frac{\mathrm{d}W(x,\theta L)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\beta(X,\theta,L)}{\mathrm{d}x} \quad (1)$$

方程(1)正是我们所要求的随机场方程，它有一个一般的形式解：

$$f(X,\theta,L)=p(X,\theta,0)W(X,\theta,L)\exp[-\beta(X,\theta,L)] \quad (2)$$

三　溅射情况下场方程的具体解

本节将根据溅射理论和实验条件来决定解(2)右端各函数的具体形式，现分述如下：

1　溅射几率密度 $p(X,\theta,0)$

由低能线性溅射理论可知：$p(X,\theta,0)$ 可以由两个独立因子决定：[2]

$$p(X,\theta,0) = A(\theta)R(X) \tag{3}$$

式中 $A(\theta)$ 为角分布因子，$R(X)$ 为粒径分布因子，对于金属靶的溅射，

$$A(\theta) = A^{\circ}_{\theta}\left[\frac{1-\lambda\cos[P(\theta)]}{1-\lambda}\right] \tag{4}$$

式中角参量参看图1；系数 λ 是依赖于金属性质和 λ 射离子束平均能量的常数；A°_{θ} 是 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时的角分布幅度；$P(\theta)$ 是 θ 的幂函数，它依赖于过程的非线性程度，对本文涉及情况，$P(\theta)$ 只需展开为 θ 的二次幂就足够了：

$$P(\theta) = a + b\theta + c\theta^2 \tag{5}$$

其中系数 a,b,c 由实验确定.

粒径分布因子 $R(X)$，应比例于溅射强度 $I(n)$，其中 n 是溅射粒子所包的原子数，由低能级联溅射过程的计算机模拟表明，经粒子束与固体相互作用所产生的集团，在很多情况下是分形体[3]，若认定被溅射的粒子是分形体，则有 $n \sim X^{D_f}$，D_f 是粒子的分形维，于是有：

$$R(X) \sim I(n) = (X^{D_f}) \tag{6}$$

另外，又根据纯金属原子簇溅射理论[4]，在半对数坐值标中 $I(n)$ 是 n 的负幂函数：

$$I(n) \sim n^{-a} \sim X^{-aD_f} \tag{7}$$

结合(6)式，则有：

$$R(X) \sim X^{-aD_f} \tag{8}$$

综合(4)、(8)、(3)诸式，则 $p(X,\theta,0)$ 可表示为：

$$p(X,\theta,0) = p_{\cdot}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\left[\frac{1-\lambda\cos[\varphi(\theta)]}{1-\lambda}\right]X^{-2aD_f} \tag{9}$$

2　组度密度函数 $W(X,\theta,L)$

Jullien 等通过计算机模拟研究了反映受限集团凝聚问题[5]发现在随机配对碰撞接触中形成 n 原子集团的组态数 $W(n)$ 应是 n 的幂函，即：

$$W(n) = Kn^{\sigma} \sim X^{\sigma D_f} \tag{10}$$

σ 是集团凝聚的分形指数，当 $d=3$ 时，σ 将处于 $1\sim2$ 之间.

3　单粒子俘获几率 $\beta(X,\theta,L)$

由于 $\beta(X,\theta,L)$ 是一个 X 粒径的粒子沿 θ 方向运动时被俘获的几率，则 $e^{-\beta(X,\theta,L)}$ 应比例于单粒子在此方向上由靶到屏进程中的幸存几率，按 Web-man 等人对“幸存”过程建立的理论[6]，粒子由靶到屏“幸存”几率应取以下标度形式：

$$P(X,\theta,L) = P_0(X,\theta,L)\exp[-\beta(X,\theta,L)] = P_0(X,\theta,L)\exp[\quad Bt^{d_s/2+d_s}] \tag{11}$$

式中 t 是粒子由靶到屏所需的时间，B 是依赖于粒子空间平均浓度的系数.[1]既然已认定银超微粒是分形体，因此过程经历的时间 t 与长度 X 之间将存在如下标度关系：

$$t \sim X^{d_w} \tag{12}$$

d_w 为异常扩散指数，由此(11)式变为：

$$P(X,\theta,L) = P_0(X,\theta,L)\exp\left[-BX^{\frac{d_s d_w(\theta)}{(d_s+2)}}\right] \tag{11'}$$

再考虑粒子有趋向屏的规则运动，必须引入长度收缩因子 $\varepsilon = \frac{K_BT}{E_K + K_BT}$，其中 T 为绝对温度.

K_B 为 Boltgmann 常数，E_K 为粒子平均动能，于是(11′)变为：

$$p(X,\theta,L) = P_0(X,\theta,L)\exp\left[-\bar{B}_E^{d_s d_w(\theta)/(d_s+2)} X^{d_s d_w(\theta)/(d_s+2)}\right] \tag{13}$$

比较(11)与(13)两式，则有：

$$\beta(X,\theta,L) = \bar{B}_E^{\frac{d_s d_w(\theta)}{(d_s+2)}} X^{\frac{d_s d_w(\theta)}{(d_s+2)}} \tag{14}$$

将(9)、(10)、(14)诸式代入(2)式，则有：

$$f(X,\theta,L) = F_c(\theta) X^{g(\theta)} \exp\left[-a(\theta) X^{\delta(\theta)}\right] \tag{15}$$

$$F_c(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)_c}\left(\frac{1-\lambda Cos\varphi(\theta)}{1-\lambda}\right) \tag{16}$$

$$g(\theta) = (\sigma - a) D_f(\theta) \tag{17}$$

$$a(\theta) = \bar{B}_E^{d_s d_w(\theta)/(2+d_s)} \tag{18}$$

$$\delta(\theta) = \frac{d_s}{2+d_s} d_w(\theta) \tag{19}$$

四　模　拟

现将方程(15)应用于图 3 中实测银超微粒的分布上，对其中(a)～(e)诸分布的模拟结果已列入表 1 中，图 3 中光滑曲线对应于表 1 中诸分布函数，可以看出这些分布可分为两类：i) 由表 1 中(a)、(e)分布显示的双峰分布；ii) 由表 1 中(b)、(c)、(d)描写的单峰分布，值得注意的是三个单峰分布有明显的规律性，这种规律性表现为：各分布的主要参量对 θ 之间的关系可以用如下一组简单函数近似描写：

表 1

θ	$f(X)$	编号
7°	$f(X) = f_1(X) + f_2(X)$ $f_1(X) = 0.23X^{0.4}\exp[-0.133X^3]$ $f_2(X) = 0.1(X-1)^{0.123}\exp[-0$ [illegible] $X-3.5)^2]$	a
20°	$f(X) = 0.25X^{2.58}\exp[-0.55X^{1.33}]$	b
30°	$f(X) = 0.5X^{2.42}\exp[-0.6X^{1.72}]$	c
40°	$f(X) = 1.54X^{1.6}\exp[-1.2X^{2.1}]$	d
46°	$f(X) = f_1(X) + f_2(X)$ $f(X) = 1X^{1.5}\exp[-0.8X^{3.0}]$ $f_2(X) = 0.03(X-1.25)^{0.1}\exp[-2(X-2.2)^2]$	e

平均粒径　　$\langle r \rangle \simeq 23.9 - 0.43\theta$

峰　　位　　$X_m \simeq 2.8 - 0.05\theta$

幅　　度　　$F_c(\theta) \simeq 3.6\sin\theta[1 + 1.23\cos(98 + 3\theta - 0.07\theta^2)]$

$$a(\theta) \simeq 2.1 - 0.1325\theta + 0.00275\theta^2$$

$$\delta(\theta) \simeq 0.45 + 0.043\theta$$

$$g(\theta) = a(\theta) = a(\theta)\delta(\theta)S_m^{d(\theta)}$$

试比较(16)式和(22)式，并注意 $\theta_c = 30°$，由此可求得 $C_c = 4, \lambda = -1.23, a = 98, b = 3, C = -0.07$，若要进一步确定其它结构指数，必需首称先确定分形维 $D_f(\theta)$ 为此，利用 Family 关于分形组态的理论[7]，即认为分形体有三类基本组态：i) 扩展态；ii) 补赏态 iii) 塌缩态. 扩展态是大集团支链组态；补赏态是指由多个基元粒子组成的集团的组态；塌缩态测是由单个基元粒

子显示的致密组态，三种组态的分形维由沉浸空间维度 d 表示如下：

扩展态：
$$D_f(\theta) = \omega(\theta)\frac{2}{5}(d+2) \tag{26}$$

补赏态：
$$D_f(\theta) = \omega'(\theta)\frac{4}{7}(d+1) \tag{27}$$

塌缩态：
$$D_f(\theta) = \omega''(\theta)d \tag{28}$$

三式中的组态微调函数 $\omega(\theta)$、$\omega'(\theta)$ 和 $\omega''(\theta)$ 取值于 1 附近，对照图 2 可知，这里涉及的银超微粒不存在链状扩展态，只有补赏态和塌缩态，仔细数出图 2(b)、(c)、(d) 三张图中处于补赏态(多个基元粒子组成)的粒子数，用 $\eta(\theta)$ 表示补赏态在各子图中所占的比例，于是由下式可以确定各图中超微粒的有效分形维.

$$D_f(\theta) = [1-\eta(\theta)]\omega''(\theta)d + \eta(\theta)\omega'(\theta)\frac{4(d+1)}{7},(d=3) \tag{29}$$

由于 $\omega'(\theta)$，$\omega''(\theta)$ 取值接近于 1，为简化计，可令这些微调函数取值 1(由此造成的 D_f 值的误差不会很大)由(29)式计算的 $D_f(\theta)$ 值代入(17)式中可以给出差$(\sigma-\alpha)$：

$$\sigma - \alpha = g(\theta)/D_f(\theta) \tag{30}$$

又根据 P. MeaKin 关于组态分形指数 σ 的结果[8]：当 $d=3$ 时，$\sigma=1.16$，于是可以进而决定强度衰减指数 α

为了决定异常扩散指数 $d_W^0(\theta)$，这里需要补赏态中 θ一点条件：$d_w(\theta)=d_W^0(\theta)$，其中 $d_W^0(\theta)$ 是无外场作用时的异常扩散指数，事实上，当有中心势存在时，异常扩散指数 $d_W(\theta)$ 应表示为：[1]

$$d_W(\theta) = d_W^0(\theta) + \frac{k}{1-k}D_f(\theta) \tag{31}$$

式中 k 为吸附参量，由下式给出：

$$k = 1 - \ln N/\ln\Phi_a = 1 - \ln\Phi_m/\ln\Phi_a \tag{32}$$

这里 Φ_a 与 Φ_m 分别是吸附中心引力势和斥力势，对于 θ一点有 $\Phi_m=\Phi_a$，故有 $k=0$，即：$D_W(\theta)=d_W^0(\theta)$

另一方面，由于图 2 中(b)所收集的银超微粒基本上都属于补赏态，其 $\eta(\theta)=\eta(20°)\simeq 93\%$，因此可以合理地假定图 2(b)中的粒子系近似地满足条件 $d_W^0(20°)=d_W(20°)$，由此可以求出谱维度 d_s：

$$d_s = 2D_f(20°)/\delta(20°) - 2 \simeq 1.52 \tag{32}$$

于是 $D_W^0(\theta)$ 和 $d_W(\theta)$ 可由下式求出[1]：

$$d_W^0(\theta) = 2D_f/d_s \tag{34}$$

$$d_w(\theta) = \frac{2+d_s}{d_s}\delta(\theta) \tag{35}$$

再由(31)式进而出吸附参量 X：

$$k = [d_w(\theta) - d_W^0(\theta)]/[D_f(\theta) + d_s(\theta) \quad d_W^0(\theta)] \tag{36}$$

表 2 列出了以上已讨论过的主要结构指数的计算结果，表中还列出了实测的 $\eta(\theta)$ 值.

五　结　论

i) 随着收集 θ 增大，$\eta(\theta)$ 下降，表明基元粒子数的比例随 θ 角增大而增大.

ii) $D_f(\theta)$、$d_w(\theta)$ 和 $d_W^0(\theta)$ 都是 θ 的增函数. 表明基元粒子不仅比补赏态复合粒子的结构紧密，而且粒子中(原子量级)路径结构的复杂程度比复合粒子中(基元粒子量级)路径结构复杂得多.

iii) 强度 $I(x)$ 的衰减指数 α 随 θ 增加，表明基元粒子聚合成复合粒子的过程比复合粒子间进行再聚合的过程快得多.

iV) 吸附参量 k 随 θ 角增大，表明基元粒子的吸附势比复合粒子的吸附势强得多.

表 2

参量 \ θ	20°	30°	40°
$\eta(\theta)$	0.93	0.33	0.106
$D_f(\theta)$	2.34	2.76	2.92
α	0.49	0.57	0.61
$d_r(\theta)$	3.08	3.98	4.86
$d_s(\theta)$	3.08	3.63	3.84
k	0	0.11	0.26

参 考 文 献

[1] S. Havlin and P. Ben-avraham, Adv Phys, 1987, 36 (6) P. 765~766, 748, 708

[2] 王广厚，"粒子同固体相互作用物理学"(上册)，科学出版社，第1版，P. 295~296；

[3] 罗成东，江艺. "1992凝聚态物理学术讨论会文集"，北京，P. 22

[4] 同 [2]，P356~358

[5] R. Jullenand, M. Kklb, J. Phys, A, 17, 1984, P. L637

[6] I. Webman, Phys. Rev. Lett, 1984, 52, P, 220; J. Statist Phys. 26, P. 603

[7] F. Family, J. Stat. Phys. 1984, 36 (5/6), P. 881

[8] Paul Meakin, Adv, Colloid Interface Sci. 1988, 28, P, 298

金属及其氧化物超微粒自相变特性

刘存业　　邓昭镜　　任洪湘　　李　建

西南师范大学　物理系　重庆 630715

〔摘　要〕

应用宏观物质的原子结构理论以及表面能和化学势的概念研究介态物质的结构稳定性. 通过实验观测和理论分析发现作为介态物质的金属及其氧化物超微粒具有自发相转变特性，其中包括晶化生长和非晶化离解两种自相变效应. 超微粒的自相变特性的趋势受控于粒子尺寸效应，自相变的时间特服从幂函数规律.

PACS：64.70，HJ，68.42，a

1　引　　言

物质的相变过程是在特定的条件下（相变温度、压强、物质浓度等）进行的. 对于一定质量的物质，它的相变过程可以用体积的温度函数来描述[1]. 而超微粒是处于从微观向宏观转变的过渡状态的物质形态，它具有许多不同于宏观物质的超常特性，其中自相变特性就一例. 超微粒的自相变似乎与自身结构、形态和线度有关，而不要求严格的压强和温度条件. 以线度尺寸为量度的超微粒使其表面原子和体原子数具有大致相同的数量级，表面原子的自扩散能力增强，粒子表面具有显著的不稳定性[2-5]. 下面实验观测到的银和氧化银的自发物相演化现象是超微粒固有的自相变特性的例证. 我们从实验和理论分析两方面对超微粒的这一特性作了初步研究.

2　实验观测与分析

利用真空溅射沉积技术在非晶二氧化硅的基板上制备银和氧化银超微粒样品. 溅射前工作室抽至真空状态，压强为 0.1Pa. 然后向工作室注入纯度为 99.99%的氩气作为溅射气体，在溅射过程中，工作室压强保持为用透射电镜（H6000 型）测试所得的超微粒样品，结果表明银和氧化银两种超微粒皆为球形，银超微粒的平均粒径为 17.2nm 氧化银超微粒的平均粒径为 25.4nm.

利用日本理学 X 射线衍射仪（D/MAX-C 系列）对银和氧化银样品进行了跟踪观测（见图1）. 采用铜靶 X 射线管并配有弯晶石墨单色器。测试高压为 40Kv，工作电流为 30mA　先后测定了溅射后第 0.14，0.4，1.2，6，19，23 天的衍射图谱.

利用 X — 射线衍射理论和计算机配置的结构分析软件研究了银和氧化银超微粒结晶核的结构，二者分别为 FCC 点阵和 SC 点阵结构. 利用 *Sherrces* 公式并根据超微粒晶面衍射峰的半幅宽值计算了超粒平均晶核粒径. 利用 $K\alpha_1$、$K\alpha_2$ 双峰分离软件对衍射数据分析处理，计算了各晶面衍射积分强度值. 发现银和氧化银在生成晶核过程中均有择优取向，超微粒晶核的晶面平行行基板平面生长速度高于其它晶面. 对银和氧化超微粒的(111)、(200) 和(220) 面的三强衍射线积分强度和宽度分析表明，超微粒的结晶度和晶核尺寸随时间明显变化. 这一点从图 1 也可以察觉. 以(111) 面第一强衍射线为例，在 6 个不同时间的 X 射线积分强度的变化表示在图 2

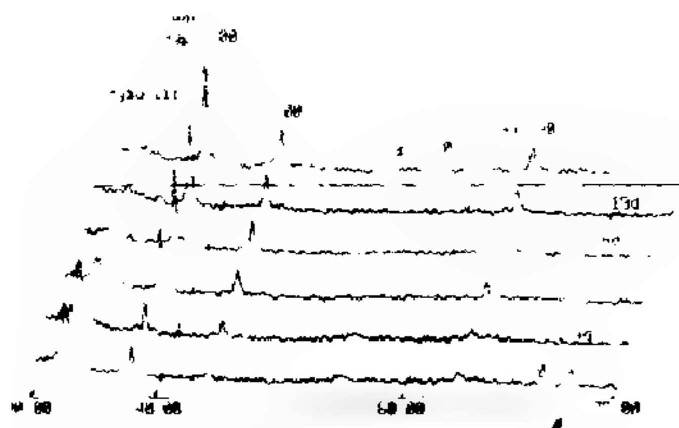


图 1　银和氧化银超微粒衍射谱

中. 可以明显看出银超微粒晶化生长，而氧化银超粒则非晶化离解. 用最小二乘法处理所测数据，结果如图 2 中两条拟合直线所示. 由此得出超微粒(111)面积分强度与时间 t 的幂函数关系

$$I = I_0 t^{\alpha} \tag{1}$$

式中 I_0 是由制备条件决定的常数，α 是由超微粒的结构和线度决定的常数. 对于银来说 $\alpha \simeq 0.38$，氧化银的 $\alpha \simeq -0.35$.

根据 6 个不同时间所测试的银和氧化银的(111)晶面衍射线积分宽度所估算的超微粒[Ⅲ]方向结晶核平均粒径值表示于图 3 中(图 3 和图 2 均以双对数标作图)，用最小二乘法直线拟合结果如图 3 中直线所示. 超微粒结晶核粒径随时间的变化也同样服从幂函数规律：

$$R = R_0 t^{\beta} \tag{2}$$

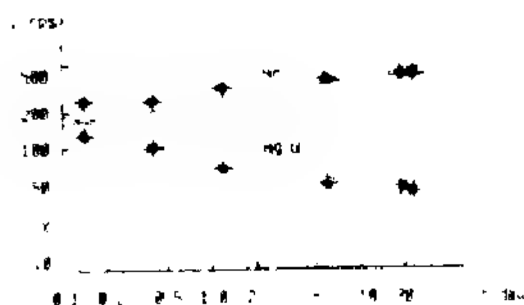


图 2　两种超微粒(111)衍射积分强度与时间关系

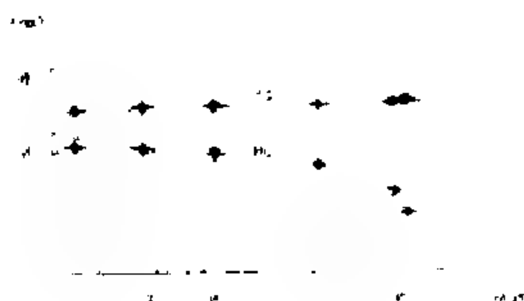


图 3　两种超微粒粒径(111)与时间关系

式中 R_0 表示超微粒的初始结晶核粒径，由下面讨论可知，R_0 的大小对超微粒的自相变趋向有决定性作用. β 是由超微粒自身的结构、线度及化学成份决定的. 银和氧化银超微粒的 β 值计算结果分别为 0.04 和 0.08(实验值). 衍射图谱的数据分析结果还表明，银超微粒沿[200]和[220]方向的平均尺寸也在不断增加，在这两个方向上也同样发生晶化生长，但比[Ⅲ]方向的生长速度慢. 氧化银超微粒在[200]和[220]方向的平均尺寸随时间减小，最后变成原子族. 用

电子显微镜对银超微粒时间演化作了跟踪观测，统计分析表明银超微粒线度随时间增大，结果与 X 射线衍射分析相吻合. 对不同时刻的 *TEM* 图的测量计算确定了银超粒微粒的尺寸分布，随着时间增加尺寸分布曲线由多峰离散型式向着单峰均一型式转变.

3. 结果与讨论

实验观测和理论分析的结果初步证实超微粒是一种具有壳层式结构的介态物质[4]. 它有一个结晶状态的核和一个非晶态的外壳，这是一个极不稳定的原子凝聚状态，必然向着结晶化生长方向或者非晶化离解方向转化，如图 4 所示.



图 4 超微粒、模型、(a) 晶化(b) 解离

超微粒的结晶化生长过程服从集团 — 集团生长规律[5]. 超微粒的自相变过程(包括结晶化生长和非晶化离解两种转化)中形态变化具有自相似特征.

图 4 中(a) 和(b) 表示超微粒两种自相变模型，分别模拟银和氧化银的自相变趋势. 把超微粒看作由晶相(S) 和非晶相(M) 组成的两相体系，M 相可以比喻为围绕于 S 相的原子(分子或原子族)汽. 在 $S-M$ 之间有一层原子粗糙的介面，超微粒的不稳定和自相变趋向可以由 S/M 介面的位置的移动及方向来确定.

在超微粒 S—M 体系中，由于尺寸效应使介面自由能与 S 相体势能有相同数量级. 两相体系的热动力学势 Φ 是由系统化学势 μ 和介面自由能 ε 两部分决定的[6]. 对于所研究的球形超微粒来说，在自相变过程中体系热动力学势的增量可以表示为

$$\delta\Phi = \frac{4\pi R^3 \Delta\mu}{3\Omega} + 4\pi R^2 \alpha \tag{3}$$

式中 R 是结晶核粒径，$\Delta\mu$ 代表两相化学势之差，Ω 表示原子在晶格中占有体积，α 表示单位介面自由能. $\delta\Phi$ 作为 R 的函数关系可以用图 5 中的曲线表示. $\delta\Phi-R$ 曲线当 $R=R_C$ 时出现一个峰值. 显然 $R<R_C$ 时介面自由能对超微粒的自相变趋势起主导作用，当 $R<R_C$ 时，超微粒体系的两相化学势占优势，使 S—M 体系的热动力学势有降低的趋势，促使超微粒晶化生长.

根据实验得出的经验公式[7]，$\alpha\Omega^{2/3}\simeq(0.3-0.5)\Delta H$，$\Delta H/KT\sim 20$，$(T_c-T_0)/T_0\simeq 0.2-0.5$；$\Delta H$ 代表物质升华热，K 是玻尔兹曼常数，T 表示绝对温度，T_0 是熔点，T_C 代表亚稳态临介温度. 对于 Ag 和 Ag_2O 超微粒分别导出 S—M 体系热动力增量 $\delta\Phi_1$ 和 $\delta\Phi_2$ 如下

$$\delta\Phi_1 = -17.418R^3 \times 10^9 + 38.616R^2 \quad (4)$$

$$\delta\Phi_2 = -3.415R^3 \times 10^9 + 10.775R^2 \quad (5)$$

两式中各物理量均用 SI 单位表示. 根据 $\partial\delta\Phi/\partial R = 0$ 求 $\delta\Phi$ 极值的方法确定超微粒的临介半径, $R_{C1} = 14.8nm$, $R_{C2} = 21.0nm$. 由实验分析结果得知,银超微粒晶核起始粒径 $R_0 > R_{C1}$,所以它的自相变趋势是晶化生长;氧化银超微粒的晶核起始粒径 $R_0 < R_{C2}$,它的自相变趋势必然是非晶化离解. 理论分析结果与实验观测超微粒自相变趋势是符合的.

图 5　球形超微粒热力学势曲线

参 考 文 献

[1] Richard Zallen, The Dhysics of Amorphous Solid, New York, VSA, 1983, 1－5

[2] Wang Guanghou and Han Min, Progress in Physics, 3 (1990) 248

[3] M. A. Listvan, Surface Science, 173 (1986) 294

[4] Liu Cunye and Deng Zhaojing, Ch inese Phys. Lett. Vol. 9, No. 12 (1992) 653

[5] Deng Zhaojing and Liu Cunye, Comman. Theor. Phys. 15 (1991) 359

[6] A. A. Chernor, Modern Crystallography Ⅱ, Springer-verlag New York VSA, (1984) 39

[7] D. Yurnball; J. Appl. Phys. 21, 1022 (1950)

电化学沉积金属铜过程中的枝晶及分形形态

骆桂蓬　韦钰
（东南大学分子与生物分子电子学实验室）
（南京　210018）

摘要　本文报导了用电化学沉积（ECD）方法研究铜凝聚体生长形态随生长条件变化规律的实验结果，并发现在一定条件下，铜凝聚体于溶液面进行二维生长，其宏观形态是分形结构。

在用电化学沉积方法研究凝聚体生长形态的实验中，金属锌是常用的材料[1-4]。早期的实验[1]是在锌盐（$ZnSO_4$）溶液上加入另一种与之不相溶的材料（如n-醋酸丁基）制成界面，把阴极端面固定在界面附近，在一定电压下锌可沿界面进行二维空间生长，其结构是分形"树枝"状。

近年来，随着凝聚体电化学生长实验研究的发展，上述结构被专门设计的一种极薄的"三明治"结构（生长空间夹在间隔约0.1mm的两层玻璃之间）取代。利用这种结构人们进行了在不同条件下，金属锌生长规律和形态的定量研究[2,3]。有关金属铜的电化学沉积分形生长实验至有报导，但却是在特定生长空间中进行的[5]。

考虑溶液中电场分布和强度对生长形态的影响，我们进行了无液面诱导层的铜电化学沉积实验。在较薄的一层（约2.3mm）硫酸铜溶液（圆形玻璃皿，周围是一圈铜片作为阳极）中心置入铂丝（阴极），观察在不同条件下金属铜的凝聚形态。

在较低浓度和电压下，铜的生长与DLA模型给出的结果（计算机模拟）类似（见图1）。对所得图象进行计算机处理，利用密度相关函数测得其分数维约为1.84±0.02，它比DLA模型给出的维数（1.67）略大。因为铜离子在电场作用下不是完全的随机扩散，所以使得生长几率高于模型中的完全随机扩散的几率。如果在溶液中加入H_2SO_4用以屏蔽电场[5]，会使得其生长形态与DLA模型更为接近。在较高浓度和电压下，其生长形态是"长树枝"状，同样可测得其分维数约为1.55（见图2）。改变电解液浓度和电压，获得几种不同的生长形态（见图3，4）。

在上述实验中，观察到一个有趣现象，当液面较高（3-4mm），阴极沿竖直方向刚刚接触液面（无任何诱导材料）时，在一定浓度和电压范围内，铜粒子可沿液面下侧进行快速二维生长。图5-9是几种典型生长形态。从生长过程来看，液面附近的电场力较大，金属叶子在向外生长到一定大小时，会在电场力作用下离开阴极向外漂移，新的生长又会在阴极附近发生。显微镜下也可看到溶液中的离子对流，这种对流具有一定的振荡频率。去掉电场后，叶子端部开始下沉。有关这一生长过程的机制正在进一步研究之中。

参考文献

[1] M Matsushita *et al*., Phys Rev Lett., 1984, 53(3), 286
[2] Yashji Sawada *et al*., Phys Rev Lett., 1986, 56(12), 1260
[3] D Grier *et al*., Phys Rev Lett., 1986, 56(12), 1264
[4] G L M K S Kahanda *et al*., J. Electrochem Soc., 1989, 136(5), 1497
[5] D B Hibbert, J R Melrose Phys Rev. A., 1988, 38(2), 1036



图1 铜凝聚体的似DLA模型生长结构
C=0.01M, V=1.70v, 放大 十倍, 维数D=1.64



图2. 铜凝聚体枝晶生长结构
C=1.0M, V=7.4v, 放大十倍 维数D=1.55

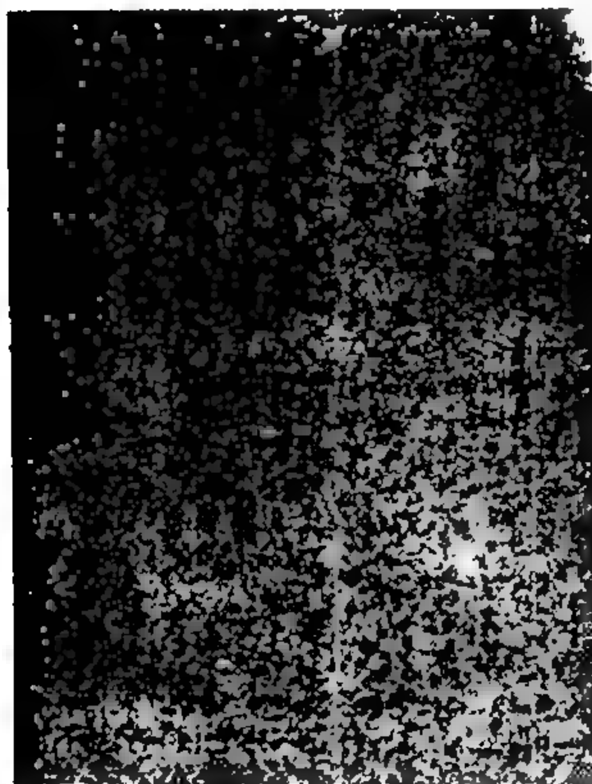


图3. 恒电流控制铜凝[illegible]
I=0.2-0.4-0.5mA, C=0.01M

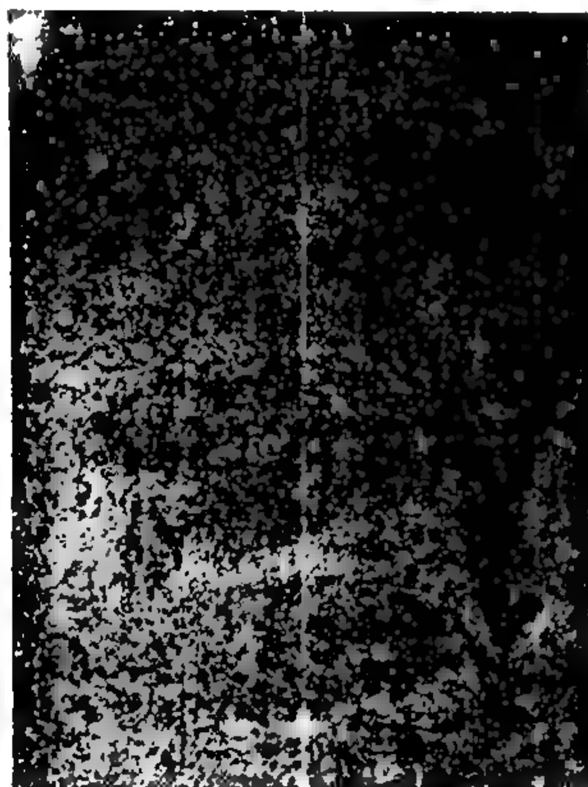


图4 铜凝聚体'树状'生长结构具有明显的自相似性
C=0.1M V=2.5v

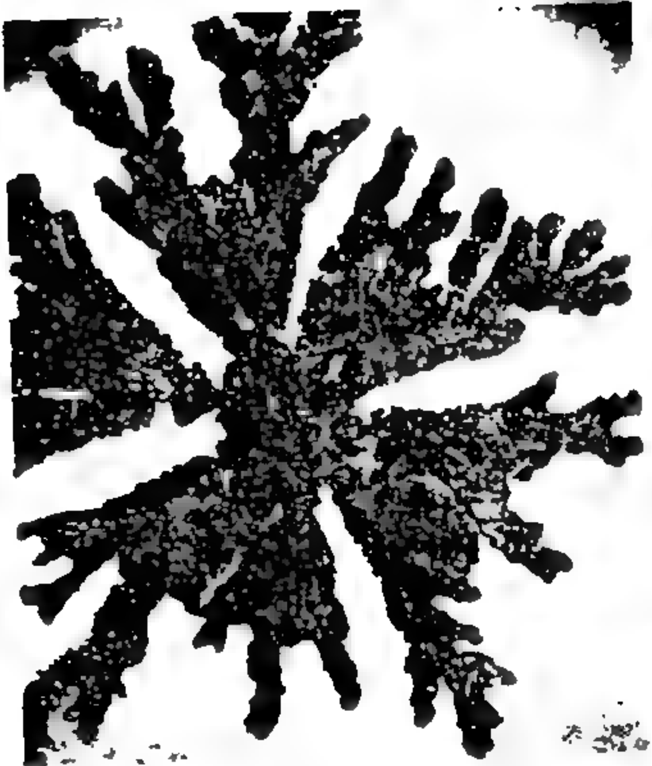


图5 铜凝聚体在液面下二维实验生长结构
C=0.1M, V=3.6v



图6 生长情况与上图一样，生长条件
C=0.1M, V=5.0v 具有分形结构, D=1.53



图7 C=0.1M, V=3.2v



图8. 图7中停止二维生长后，
在"叶子"周围的三维空间生长



图9 三维致密生长结构
C=0.1M, V=1.70v

基于电化学方法在单分子层界面下生长金属膜过程中的分形现象

骆桂蓬， 艾竹铭， 韦钰
（东南大学分子与生物分子电子学实验室）
（南京：210018）

摘要：用电化学方法（ECD）在有机单分子层界面下生长出二维超微粒金属银膜和铜膜。实验中发现，在恒电流控制条件下所生成的银膜具有一个开放的树枝状分形边界，其维数D=1.52±0.02。铜膜在生长过程中也呈现出明显的分形凝聚。

自Witten和Sander于1981年首次提出受限扩散凝聚（DLA）模型后[1]，凝聚体生长的物理实验便进入了分形研究阶段，并在过去的十年中取得很大进展[2-9]。

1990年X.K.Zhao等人[10]将电解液表面铺上单分子膜，用电化学还原方法，在恒电位情况下生长出二维超微粒银膜，并测试和分析了该银膜的固态特性，但并未报道有关分形的现象。

早在Matsushita等人的实验中[3]也用了正丁基醋酸作为溶液的界面，但这与用单分子层界面有本质区别。随后的实验多用极薄的三明治结构来近似二维空间。

实验中我们使用恒电流控制生长金属银膜，发现该膜具有两种宏观形态：封闭生长的二维致密内部和开放生长的扩散分形边界。

实验装置如图1所示，直径9cm高1cm的圆形玻璃容器内装电解液（$AgNO_3$或$CuSO_4$）3-4mm，浓度为0.001M。阴极是直径约为0.1mm的铂丝，阳极是由金属（银片或铜片）制成的圆环。用体视显微镜进行动态观察并接摄像系统。电解液均用去离子水配制。在铺单分子膜前，用吸水泵将液面灰尘吸去，然后用微量进样器缓慢将一定量的单分子材料（花生酸或液晶，均溶于氯仿中，浓度为0.001M）沿液面滴入容器中。阴极触膜须用微调下降装置，该装置是手摇式机械传动垂直升降的装置，阴极铂丝沿垂直方向固定在装置的运动头上。用HDV-7C晶体管恒电位仪作为电源。下面给出一些典型实验结果。

为进行比较，先进行恒电位条件下二维银膜的生长，$AgNO_3$浓度为0.001M，液面单分子层材料是花生酸（10ul左右），恒电位为0.82V。从图2给出的生长形态看，与文献[10]的结果一致，它并不具有明显的宏观分形结构。为观察到更丰富的生长形态，改用恒电流控制方法，液面单分子层材料用聚合物液晶（10ul左右），图3-a是I=0.131mA时五分钟内生长的二维银膜形态。随后生长速度渐慢，溶液中电场电位缓慢下降，将I提高到0.151mA，通过体视显微镜可观察到新的凝聚从边界处向外成扇形迅速生长，此时电位在相应增加之后缓慢下降。再次提高电流I=0.171mA，生长情况基本类似。30分钟后，可清楚地看到边界的树枝状晶体（图3-b）。取出边界部分区域放大（图3-c），用计算机进行图象处理，根据密度相关函数测得其平均分数维是D=1.52±0.02（图3-d）。

应用上述方法，我们又进行了金属铜膜的生长实验，发现铜膜的生长规律和形态与银膜不同。银膜生长后很稳定，而且较易生长；铜膜的生长不仅困难，而且生长后的铜膜在短时间内（几分钟）会发生结构变化。在恒电位控制条件下（$CuSO_4$浓度为0.1M），铜膜生长开始时是沿阴极周界向外快速进行的，膜层较薄且呈淡绿色，并有明显的树枝状纹路。随后生长速度减慢，边界处铜膜变厚，逐渐呈现深红色。提高电压后，沿着界又开始有淡绿色较薄的铜膜生成，不久（约二十分钟）这种生长速度开始减慢，边界处又出现深红色较厚膜层。同时膜内的铜凝聚体开始沿生长纹路逐渐增大并且具有明显的分形形态（图4-a）。这些不断形成的白相似铜颗粒会不断长大，在停止生长后约数小时沉入溶液中（图4-b）。有关这一现象的物理机制和动力学过程正在研究之中。

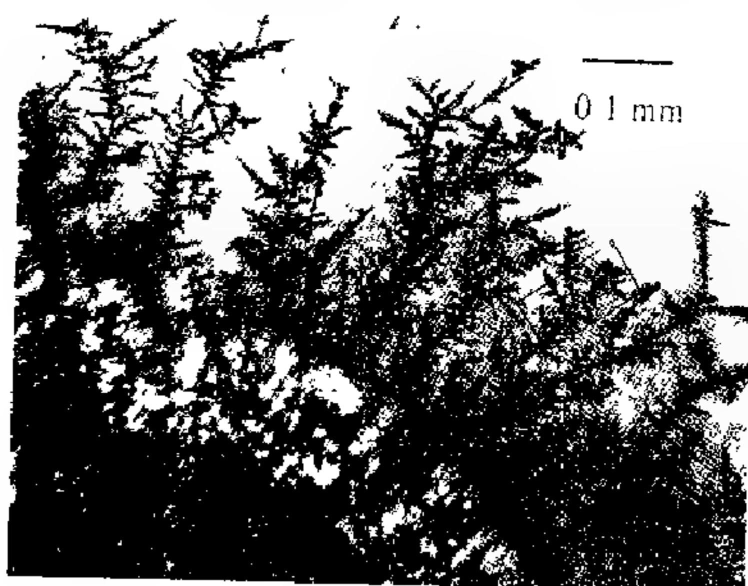


图3-c. 银膜边界相变的分形结构

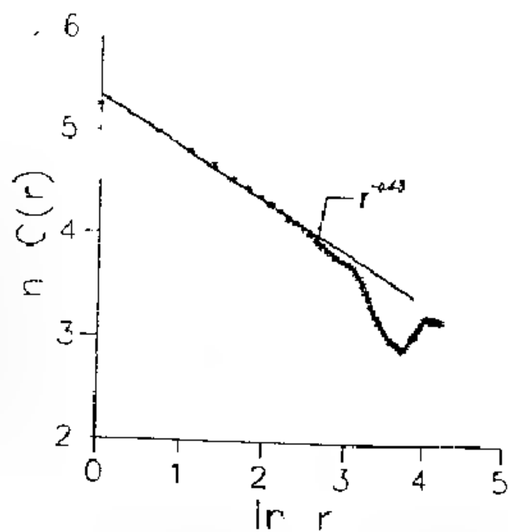


图3-d 图3-c中局部密度相关函数C(r)和标尺r的双对数曲线D=1 52±0. 02

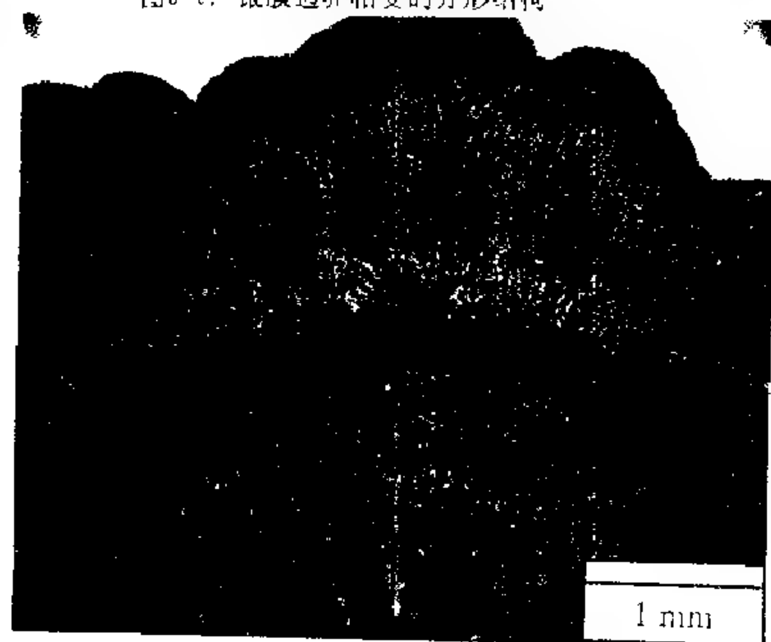


图4-a 恒电位(V=0 5v-2. 5v下生长的铜膜形态(2小时后拍摄

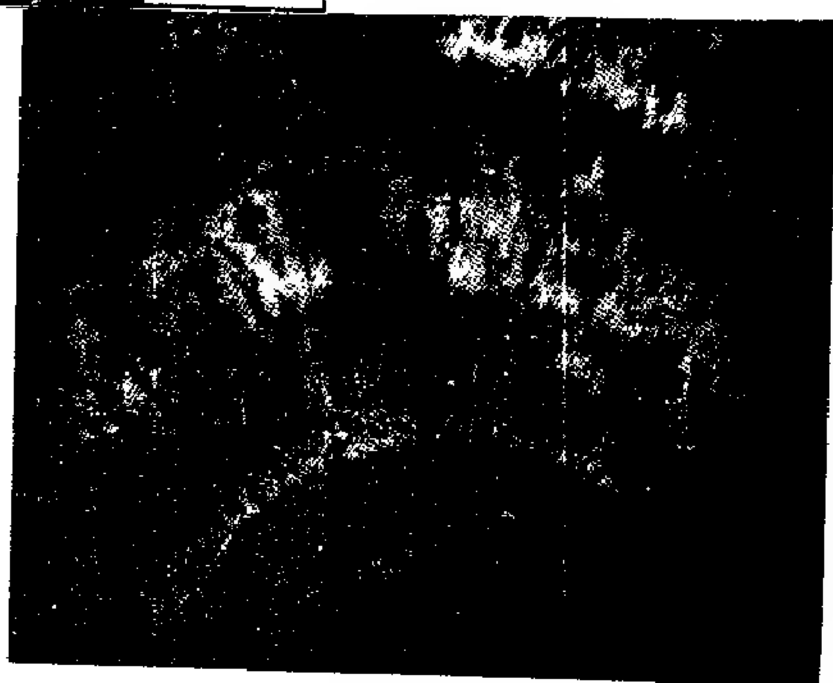


图4-b 图4 a中停止生长数小时后铜膜发生的结构变化

参考文献.

[1] T A.Witten. L M Sander Phys Rev Lett 1981 47(9)·1400
[2] M Matsushita et al Phys Rev Lett .1984, 53(3)·286
[3] Yasuji Sawada et al Phys Rev.Lett 1986, 56(12)·1260
[4] D Grier et al Phys Rev Lett ..986, 56(12) 1264
[5] D B Hibbert J R Melrose. Phys Rev A 1988, 38(2) 1036
[6] J R Melrose. D B Hibbert. Phys Rev Lett 1990, 65(24), 3009
[7] V Fleury, M Rosso Phys Rev A, 1991, 43(12) 6908
[8] Takashi Nagatani et al, Phys Rev A, 1991, 44 10):6723
[9] V. Fleury, M. Rosso, Phys. Rev Lett., 1992, 68(6):2492
[10] X.K. Zhao, J.H Fendler, The J Phys. Chem, 1990, 94(9) 3386

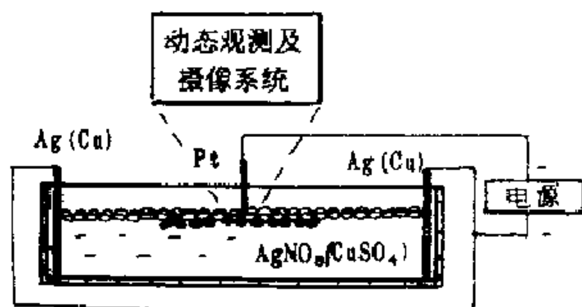


图1: 电化学沉积金属凝聚体实验装置简图

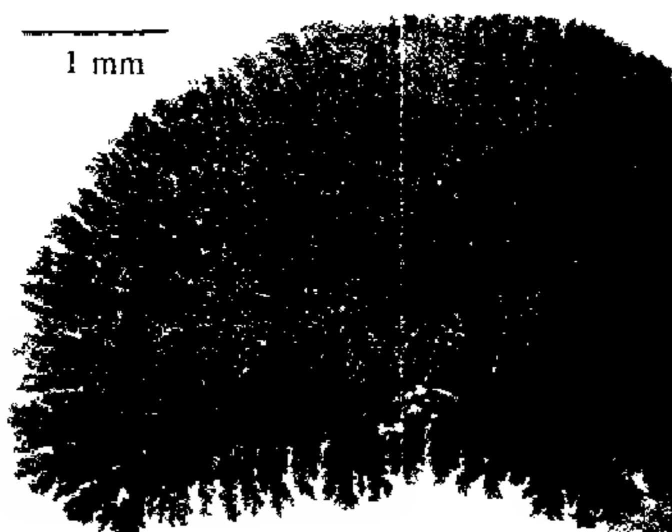


图2: 恒电位下生长的二维银膜形态

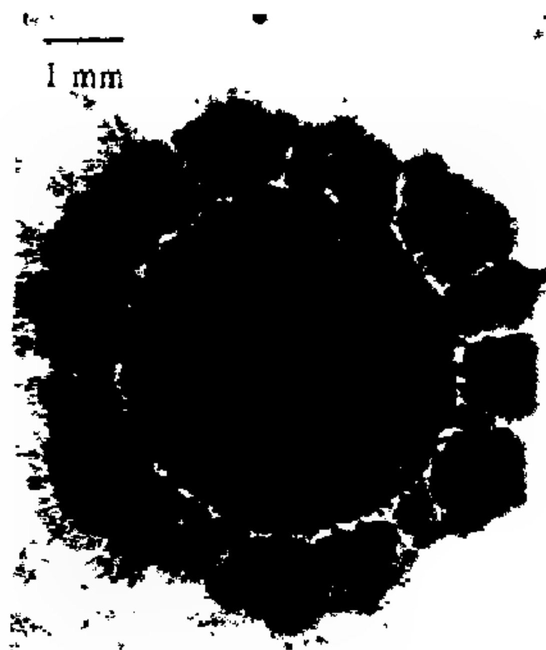


图3-b: 生长形态随电流变化的结果



图3-a: 恒电流下生长的二维银膜形态

氯化铵不规则结晶的形态与分形研究

毛吉根 （杭州大学化学系）

摘　　要

自然蒸发氯化铵饱和溶液，得到十种不同形态的结晶：叶脉形、链结形、山脉形、乳石形、[illegible]形、蝴蝶形、蕨叶形、无定形、沉积形、[illegible]形，与 Honjo 所看到一种形态。放大照片用测定其维数，D_f [illegible]3.73，D [illegible]43，属于表面张力起主要作用的分形结构。

1. 引言

一价铵盐[1]，氯化钾[2] 具有生成不规则结晶的特性，是一个研究不规则结晶的好材料。Honjo[1] 在毛细管中观察了饱和氯化铵溶液的结晶形态，得到一根细如叶脉的结晶，如[illegible]所示。四年后，H. Honjo[3] 等观察到氯化铵的不规则结晶形态是在两块平行玻璃板之间进行的。其形态属 Witten Sander 扩散控限聚集(DLA)模型[4]，求出分形的维数 $D_f=1.67\pm0.02$，属二维 DLA 随机无规结晶模型。

本文改变结晶条件，在缓慢条件下自然蒸发结晶获得了十种不同形态的结晶。将照片形放大，测定其维数，得到与 Honjo 不同的结果。

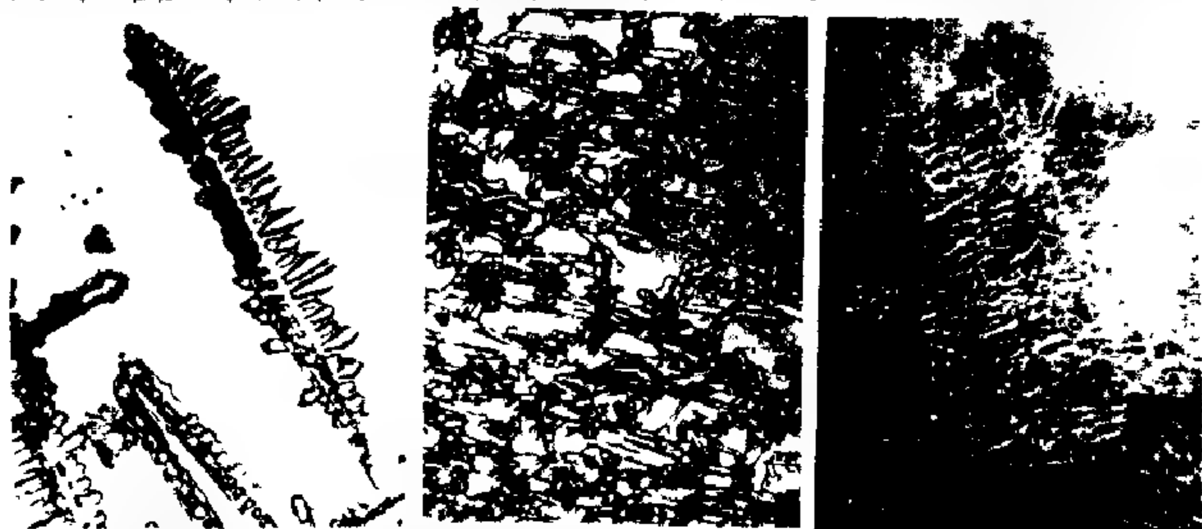
2. 实验方法

分析纯氯化铵配成饱和溶液，在溶液与晶体共存下缓慢蒸发(干燥器未加盖)，放置一周，留在玻璃表面上的溶液蒸发后，用体视显微镜观察。型号为 SZ Tr 及 BH 2，日本 OLYMPUS 公司制造，放大 2.5 10 倍，以获得最佳视场。

3. 实验结果与讨论

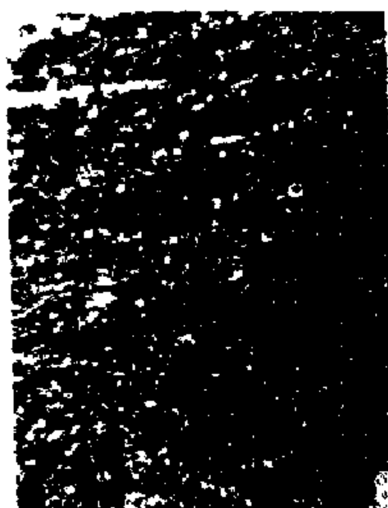
将五块不同条件下结晶的氯化铵晶体切成多块小片，用生物显微镜、镀金、保存，得到十种不同形态的氯化铵无规结晶。形态描述如下：

图(1)为叶脉形结晶。占结晶的大部分，图中深色处的形态是由扩散控限聚集模型(DLA)控制，与 T. Vicsek[5] 电子计算机模拟的形态接近。图(2)为链结形结晶。很象毛线棒针的编织物，它是由形同细棒的一定角度有规律排列起来的堆积物，由表面收缩控制。图(3)为山脉形结晶，可以看出一条条的条纹"山脉"有二个结晶微结构相互连结的，属 DLA 模型结晶。



图(1)叶脉形无规结晶×10×2　　图(2)链结形棚栅结晶×10×2　　图(3)山脉形无规结晶×10×2

图(4)为乳石形结晶，它[illegible]上而下[illegible]和柱间钟乳石[illegible]石原是与图(2)相似的小棒[illegible]，[illegible]排列形态多[illegible]。图(5)[illegible]结晶，好象从某一原点生长出来的拉棒枝叶，[illegible]在玻璃表面[illegible]附[illegible]，由[illegible]收缩表被[illegible]控制。图(6)为蝴蝶形结晶，其[illegible]散[illegible]，它是[illegible]颗粒[illegible]中堆积形成的。



图(4)乳石形无规结晶×10×2

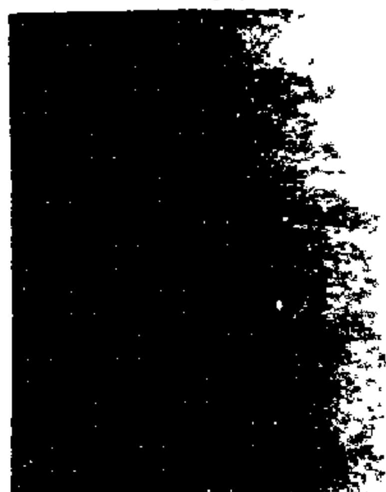


图(5)松柏形无规结晶×10×2



图(6) 蝴蝶形无规结晶×10×2

图(7)为蕨叶形结晶。它是分布在玻璃表面的一层薄晶体隐隐约约看出好似蕨叶，也是由扩散聚集极限模型控制的分形结构。图(8)为无定形结晶。结晶间有许多细微小沟，它是毛细管作用下结晶自我扩展留下的空隙[2]。在氯化钾结晶中看到过[2]。图(9)为冰珠形结晶。其形态与氯化钾不规则结晶的分形相似，亦可称分形分布形。图(10)为尖刺形结晶，其分布与图(1)相似，不同的是每一叶子状脉，变成尖刺形有许多分岔，从叶脉中生长出来。



图(7)蕨叶形无规结晶×10×2



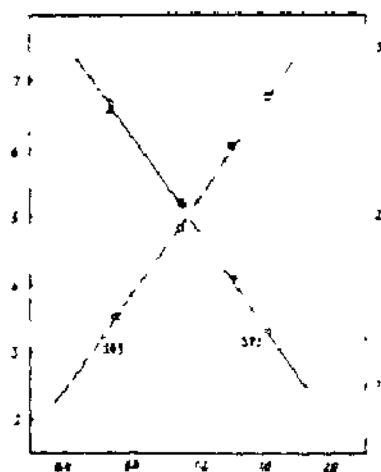
图(8)无定形无规结晶×10×2



图(9)冰珠形无规结晶×10×2



图(10)尖刺形无规结晶×10×4



图(11)氯化铵无规结晶分维维数的测定

[illegible]种形态的无机氯化钾结晶，都是分形结构的产物。在大致相同的条件下，由于溶液[illegible]不同，[illegible]形成了扩散极限控制与表面张力收缩所致。上述诸多形态的发现丰富[illegible]一[illegible]扩散与表面张力是造成不同形态的分形分布的原因。有的是明显的DLA[illegible]，有的[illegible]表面张力收缩的结果。

[illegible]照片[illegible]放大，取[illegible]均匀分布的一块，测定其维数。用数格子法测定的结果列于图11。[illegible]格子边长δ为5，4，3，2 mm，计数函数 N(δ)，Q 为总格子数，以 ln(Q-N(δ))/Q 与 lnδ 作图得到一条直线，以 ln(Q-N(δ)) 与其 lnδ 作图亦得到一条直线。Q-N(δ) 为空格，即没有结晶的[illegible]，[illegible]有双对数直线关系，与氯化钾的无规分形相似[2]，测得维数 D_f 和 D_r。

$$D_f = \frac{\ln[Q-N(\delta)]}{\ln\delta} \qquad D_r = \frac{\ln[Q-N(\delta)]/Q}{\ln\delta}$$

由式(11)得到维数值 $D_f=3.73$，$D_r=1.43$。这个结果明显地看出分形分布的原因是表面张力[illegible]起了[illegible]收缩起主要作用。

参考文献：

[1] H. Honjo; S. Ohta and M. Matsushita; J. Physical Soc. Japan 55(8) 1986 2487
[2] [illegible]：薄层氯化钾无机结晶的分形研究 本刊
[3] H. Honjo and Y. Sawada J. of Grystal. Growth 58(1982) 297
[4] T. A. Witten, Jr and L. M. Sander Physical Review Letters 47(19) 1400 1981
[5] T. Vicsek; Physical Review A32 3084 1985

簿层氯化钾无规结晶与分形研究

（杭州大学化学系 310028）

摘 要

本取盘晶技术，得到多种氯化钾不规则结晶：长方形、笋芽形、钟乳石形、分形分布形。计数法测得分形函数 N(δ)，Q－N(δ) 为空格数，Q 为总格子数，总格子数函数 ln[Q－N(δ)]，及 ln[Q－N(δ)] 与 lnδ 有线性关系，测定其维数为 3±0.3 及 1±0.3。该维数不是氯化钾在二维平面上生长或分布的维数，而是表面张力、表面收缩力有关的维数。

从溶液蒸发饱和氯化钾溶液，只能得到小颗粒的结晶。在良好条件下生长的结晶，属立方体的大块晶体。这些都是有规晶体。H. Honjo [1] 等研究氯化铵结晶的不规则形态及生长，得到一种分形不规则结晶，他们是在两块平行的玻璃板之间，让饱和氯化铵溶液结晶。

氯化钾是一种很特殊的结晶。若将一杯饱和氯化钾溶液敞开放着，氯化钾会沿着容器的壁逐渐在结晶，慢慢爬出杯子，甚至爬得到处都是，爬尽为止。但是用这种快速蒸晶方法得到的晶体也是不定形的小颗粒。笔者采取了慢慢蒸晶的方法，得到了 3～5 mm 直径的小晶体，发现了多种不规则氯化钾结晶体。

实验使用 A.R 级氯化钾，用适量蒸馏水制成饱和溶液，放在 250ml 的大口玻璃瓶内，瓶内放入两块洁净的玻璃载片，瓶上盖一张纸，让其缓慢挥发。经过一个星期，发现载片的液面上有 3～5 mm 的大颗粒氯化钾晶体。取出载片，玻璃载片裁小，在真空镀膜机中镀金膜，厚度为 0.1 μm，在扫描电子显微镜下拍片。电子扫描电镜为日本 JEOL 公司出品 S－570 型。

簿层氯化钾不规则结晶有四种形态。第一种是长方形，图(1)中所示的是一块丁字形氯化钾大晶，其边缘有不少“毛刺”。放大这些毛刺，是一些堆积的无定形小粒结晶。这些小晶体中有许多细管缝隙，如图(2)所示的毛细管缝隙。饱和溶液在这些管缝中由毛细管的渗透作用而被抽出，在边缘向外，向某一方向扩散。在拍摄的众多照片中有图(4)、图(5)这样中间有空洞的结晶，中间存放溶液的“内陆湖”，成为毛细管缝隙系统输送溶液的“贮液区”。大大小小的湖四周开始结晶，图(4)就是溶液挥发时的情形。

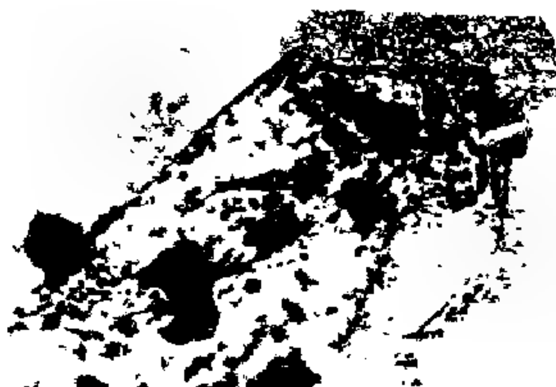


图(1) 长方形簿层氯化钾结晶，边缘有小晶体“长毛”



图(2) 小颗粒结晶放大图，可以看到毛细管缝隙

本文着重研究的是另一种不规则结晶，称之为簿层氯化钾分形无规结晶。这种不规则结晶是以往文献中未曾报道过的，详见图(8)(10)(12)。本用计数法测定图(8)(10)、(12)的维数，结果示于图(9)(11)(13)。



(3)"笋芽形"薄层氯化钾无规结晶，在笋的周围长出许多"芽"来。"芽"乃是无定形小颗粒结晶堆积而成，



图(4)氯化钾溶液结晶的"大湖"、四周结晶，中间没有结晶 ×25



图(5)氯化钾薄层结晶中的微型"内湖"直径约1mm ×25。



图(6)钟乳石形薄层氯化钾无规结晶A ×25



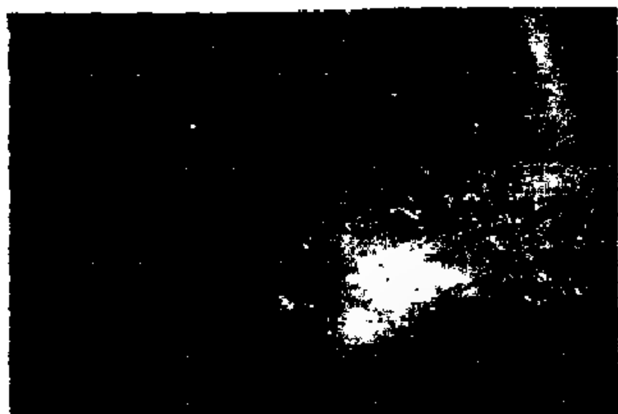
图(7)钟乳石形薄层氯化钾无规结晶B ×25

$$D_f = -\frac{\ln[Q-N(\delta)]}{\ln\delta} \qquad D_r = \frac{\ln[Q-N(\delta)/Q]}{\ln\delta} \tag{1}$$

格子的大小δ，取5，1，3，2 mm，计算正数为N(δ)，Q为总格子数，以ln[Q-N(δ)]与lnδ作图，得到一条小点的直线，以ln[Q-N(δ)]/Q与lnδ作图，得到一条小圆点直线，其斜率就是维数D_f和D_r。

在三张结晶程度不同的照片上，由图得到维数D_f为2.75、3.00和3.25，D_r为0.825、0.976和1.29。这表明控制薄层氯化钾结晶的主要因素不是结晶过程。因为控制线性生长的扩散过程与相对过饱和度有直线关系、平方关系[4]。这可能与表面成核步骤有关。若以Vg表示生长速度，S表示相对饱和溶解度，那么，Vg则是，

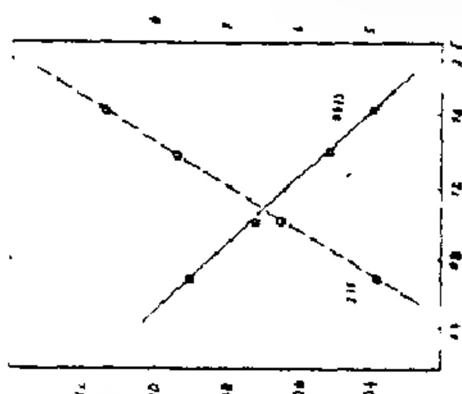
$$Vg = kS^{?}(S-1)^{6}(\ln S)^{-6}\exp(-K_c/\ln S) \qquad (2)$$



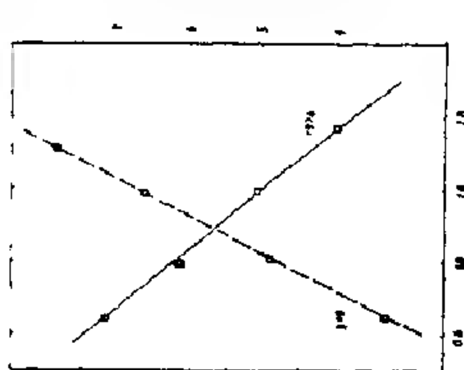
图(8)氯化钾簿层分形无规结晶-A
测得维数为 D,0.823，D,2.75



图(10) 氯化钾簿层分形无规结晶 B
测得维数为 D,0.976，D,2.00



图(9)计数法测定氯化钾簿层分形无规结晶
B 的维数 D,0.823，D,2.75



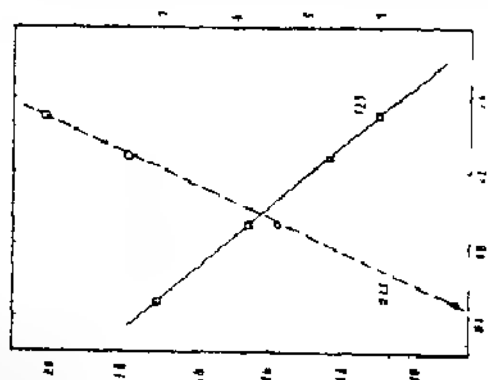
图(11)计数法测定氯化钾簿层分形无规结晶
B 的维数 D,0.976，D,3.00

溶解度可能与表面张力有关[5]。式(1)中 Q－N(δ)是具有晶体的格子数，它与 δ 有双对数关系。这表明表面张力在细结晶体形成中起着重要的作用，虽然这些细晶体有 10～40μm 的大[6]。

结语：采用盛晶技术，得到了不规则簿层氯化钾晶体，长方形，笋芽形，钟乳石形和分形分布形。求出后者维数为 D_f＝3±0.3，D_c＝1±0.3 表明簿层氯化钾结晶与表面张力有关。



图(12)氯化钾簿层分形无规结晶 C
测得维数为 D,1.29，D,3.25



图(13)计数法测定氯化钾簿层分形无规结晶
C 的维数为 D,1.29，D,3.25

参考文献.

[1] H. Honjo and Y. Sawada J. of Crystal Growth 58 (1982) 297
[2] H. Honjo, S. OHTA and M. MATSUSHTA J. of Physical Society of Japan 55(8) 1986 2487
[3] T. Vicsek Physical Review 32(5) 1985 3084
[4] S. R. Firrest and T. A. Witten. Jr; J. Phys A 12 L109 1979
[5] T. A. Witten. Jr; Physical Review Lettwes 47(19) 1981 1400
[6] B. O. Shanghnerry and I. Procaccia; Physiacl Review A 32(11) 3073 1985

BZ化学振荡反应中的分维*

[illegible]

中国科学技术大学研究生院 北京

已经证明，化学振荡是一种属于时间上的耗散结构类型[1]。其行为过程具有非线性，而非线性、随机性与耗散性是产生分形结构的物理机制[2]。因此，研究其相空间的分形结构，分析系统的耗散性对掌握其内在机理具有重要的意义。时间序列信号包含着极为丰富的信息，蕴藏着参与动态过程的全部其它变量的痕迹。因此，针对下面的化学振荡反应行为，我们根据动力系统相空间几何的观点，由时间序列重建系统相空间，并从相空间轨迹获得 Poincare 截面和一维映射图，从而分析证实了它们是一种由系统本身动力学行为决定的不规则行为即混沌[3]。混沌同时具有局部不稳定性和总体稳定性的特点决定了它的运动轨道具有奇特的几何特性——分数维。本文中，对BZ化学振荡反应中的分维进行了计算和讨论。

一、实验

以邻氨基苯甲酸-$KBrO_3$-H_2SO_4的振荡反应作为研究体系，反应在连续搅拌流动反应器(CSTR)中进行。由恒温槽通过反应器的玻璃夹套恒温，79HW-1型电磁搅拌器进行搅拌；反应物分别由三个不同的入口进入反应器，HL-2型恒流泵控制流速。用自制的 Pt 电极和216型 Ag 电极作为工作电极，217型甘汞电极作为参比电极，分别测量反应器内溶液总的氧化还原电位变化和Br^-电位变化。反应溶液用分析纯药品在蒸馏水中配制，其中邻氨基苯甲酸溶液配制后必须在三天内使用，以免被氧化而影响反应结果。

二、数据采集

由于电位变化信号较小，难以满足采集板的分辨要求，所以设计一可调增益放大器对电极信号进行滤波、放大，经HY-6070型数据采集板，由sample程序控制IEAS-286微机采集放大后的电极信号，并动态显示于屏幕，同时用3060X-Y记录仪记录同一信号，以确保采集数据的可靠性。

三、数据处理

设计SPECTRUM软件，采用FFT原理，完成包括选点、趋势平滑、频域平滑和功率谱计算等多项工作；分维(相关维数)的计算[4]以及码尺范围的选择[5]均由程序FRACTAL完成，程序REFRACT确定无标度区[6]并精确计算分维数。

四、实验和计算结果

下面给出几个较为典型的实验结果，见图。

---

* 中国科技大学资助课题

图1 典型的实验曲线，实验条件为：CSTR体积为 36±0.5 ml，进入反应器前各反应物浓度为：$KBrO_3$=0.15M，H_2SO_4=5.6M，底物(邻氨基苯甲酸)=0.015M；恒定温度为30.0℃；流速，V($KBrO_3$)=0.826 ml/min，V(H_2SO_4)=0.753 ml/min，电极信号放大10倍后采集。
A 底物流速为1.96ml/min，平均停留时间 τ=10.2s；
B 在5.6M的H_2SO_4中加入Mn^{2+}使其浓度为0.001M，随同H_2SO_4进入反应器。

1 底物流速变化的影响

当底物流速在0.650-0.0.860ml/min范围内时，随着流速的增加，分维值也增大；当流速大于1.960ml/min时，信号完全无规，功率谱峰值杂乱，构造了13 维相空间仍然无法找到趋于定值的分维数，具体数据见表1

表1

流速(ml/min)	0.650	0.778	0.860	1.960
分维值D	1.38	1.54	1.67	
维数n (*)	8	8	8	

(*)，该维数指分维值达到稳定时的相空间维数，以下同

2 添加剂的影响

从时间序列信号来看，加入Ce^{3+}或对氨基苯甲酸，振荡行为并无较大变化，而加入Mn^{2+}，当Mn^{2+}浓度在0.0005-0.0014M之间时，振荡行为有明显改变，具体数值见表2.

表2.

添加物	无	Mn^{2+} (0.001M)	Ce^{3+} (0.001M)	对氨基苯甲酸 (0.003M)
分维值D	1.54	0.76	1.54	1.43
维数n	8	9	10	6

3 Mn^{2+}流速的影响

随着Mn^{2+}流速的变化，体系振荡行为由振荡走向阵发混沌，最后进入完全的混沌状态，其分维值随流速的变化情况见表3

表3

流速(ml/min)	0.330	0.732	0.842
分维值D	1.076	1.72	.066
维数n (*)	9	9	9

根据空间几何理论，维数应表征系统的复杂程度[6]，即维数越大，系统的复杂程度越高，前面第1项的结果符合这一点。在一定范围内，流速的变化在影响自身浓度的同时，还会引起其它反应物浓度的变化以及滞留时间的变化。对于敏感初始条件的分形结构足以引起系统拓扑性质的改变，使得分维数改变，在有添加剂的情况下，分维值并不如我们所预计的那样变化，尤其是在加入Mn^{2+}时，从时间序列信号上看，复杂程度明显加大，而计算所得分维值却降至低于一维(这与文献中对类似振荡行为用另一种方法计算得到的分维值0.71±0.1[7]比较吻合)，其中原因还有待探讨；从表3的数据不能明显看出Mn^{2+}流速变化对分维值的影响。

上面的计算结果表明，对于我们所研究的这一振荡体系，在非催化条件下，分维值基本上都是在相空间维数为8时达到稳定，说明由时间序列描述的该系统具有吸引子，用决定论方法描述此系统动态过程的数学模型所需最少变量数目为8[4]，而有金属离子催化时，相空间维数相应地增大(含Mn^{2+}时，基本为9；含Ce^{3+}时，可能为10)，因此，我们可以此为依据对解释化学振荡行为的FKN[7]机理和Bordeaux 模型[8]进行简化和修正，以期找到更为简洁合理的反应机理。

对分形结构研究的着眼点不同而导致不同的分维定义和不同的计算方法，据我们的经验，对于单一信号的时间序列数据，相关维数是一种简单实用的方法。

六、参考文献

[1]. 尼科利斯，普里戈京，《非平衡系统的自组织》，科学出版社，1986
[2] 董连科 《分形理论及其应用》，辽宁科技出版社，1991
[3] 唐宇虹，中国科大研究生院硕士毕业论文 1993
[4] 刘式达，刘式适，《非线性动力学和复杂现象》，气象出版社，1989
[5] Francis C Moon, *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons, New York, 1987
[6] E.R Pike, et al, *Chaos,Noise and Fractals*, Adam Hilger, Bristol, 1987
[7] P Richetti, et al, *J Chem.Phys.*, 1986, 86(6), 3339
[8] R.J Field, M Burger *Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1985
[9] L Gyorgyi, R J Field, *J.Phys.Chem.*,1988, 92, 7079-7088

非线性化学吸引子与维数

高庆宇(安徽医科大学化学教研室　合肥　230032)

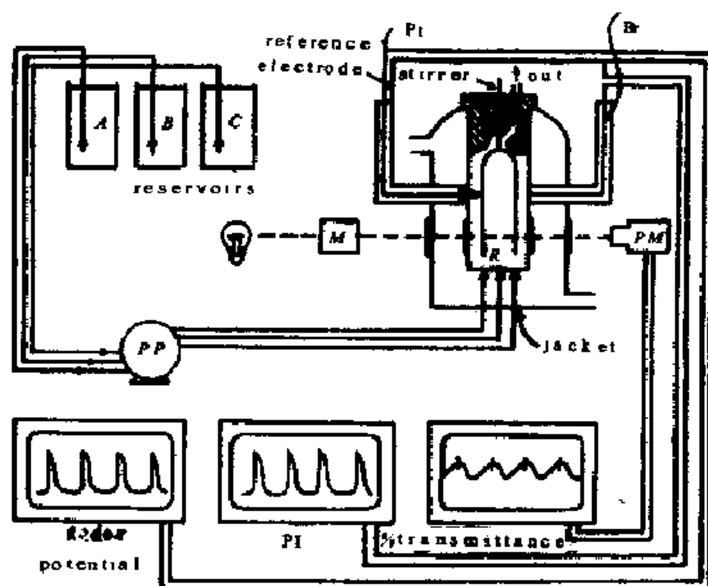
近年来,非线性化学现象如化学振荡、复杂周期振荡、化学混沌等受到化学工作者的重视[1][2][3],非线性化学反应类型的确定是化学动力学研究方向之一,本文主要讨论化学吸引子及其维数在化学动力学中的应用。

一、吸引子与其维数

在一个动力学系统中,相互正交的d维向量构成相空间,那么动力学系统的运动轨道构成吸引子,相空间的不同吸引子其维数不同,可以是整数或分数,化学振荡反应的吸引子为极限环,即封闭的一条曲线,因此为一维吸引子。准周期化学振荡反应的吸引子为环形圆纹曲面,维数是2。化学混沌的吸引子是一个区域,由很多不稳定的周期轨道构成;局部不稳定性是在某些方面发散,而总体又具有稳定性,因此只好在相空间的某个区域内无穷次地折迭起来,使得运动轨线具有无穷层次的自相似结构。化学混沌吸引子通常又称奇怪吸引子,维数为大于2的分数[4]。因此根据吸引子的维数可以判断非线性化学反应的类型,实验化学工作者的任务主要是分析实验信息,过滤实验噪声,重构吸引子,然后计算吸引子的维数。

二、非线性化学反应的实验信号

非线性现象的存在必须远离平衡态。要使体系长时间远离平衡态,化学家采用连续流动搅拌器(CSTR)[5]来满足这个条件,后来为了研究化学波和稳态化学图样,化学家们又设计出连续注入非搅拌器(CFUR)[6]和Couette反应器[7],我们主要介绍常用的CSTR。如图①所示有流出管和数个流入管,流入管供应新鲜反应物,流出管流出部分反应产物,用电位法或光谱法测定并记录中间反应产物浓度的变化。



右图(1). CSTR装置图,R为反应器,M为单色器,PM为光电倍增器,PP为泵。

从记录仪上输出的信号往往带有噪声[8],这是因为存在反应物流动速度噪声(外噪声)和搅伴噪声(内噪声),以及电极响应噪声。流动速度噪声使时间序列的信号变形,通过把蠕动泵变为活塞泵可以大大降低流动速度噪声。搅伴噪声则使反应物在反应器中不完全混合,混合效应分为宏观混合效应和微观混合效应二种类型。宏观混合效应是大尺度范围的质量对流和扩散过程;微观混合效应是不同微体积单元的扩展和折叠过程[9]。通过减小反应体积,加大搅拌速度和改变搅拌器、反应器的形状可消除宏观混合效应,但不能消除微观混合效应,这一点可以通过CARS谱观察到[10]。当混合过程所需时间大于或等于非线性反应时间时,即影响非线性反应的速度。CSTR使化学反应远离平衡态,但又是一个噪声发生器。

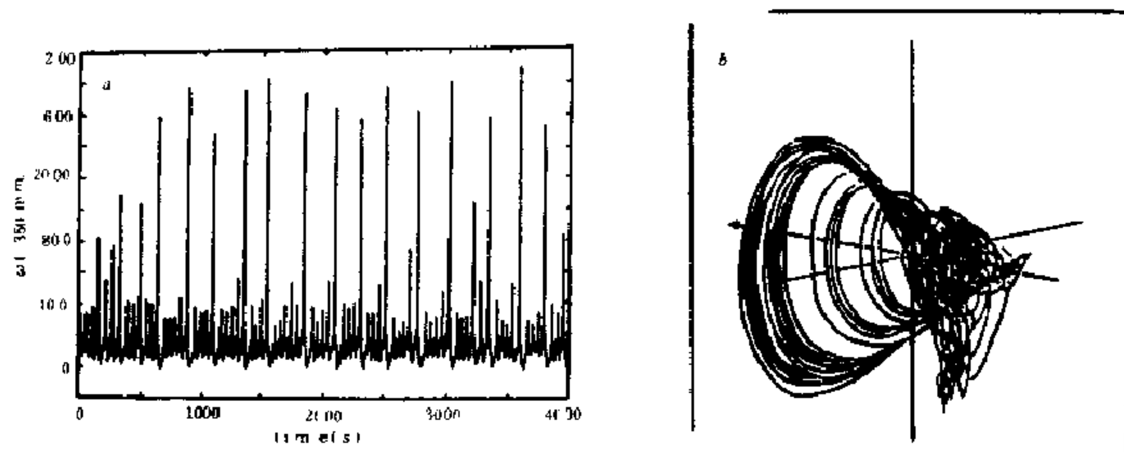
三、吸引子的重构和维数的计算

化学动力学系统的不同变量在一般情况下不能测定到，且事先不一定知道哪些组分是控制变量组分，实际上只能得到某些组分的时间变化序列，而且往往带有噪声。重构吸引子的方法有多种，如延迟法[11]、导数法[12]和奇异值分解法[13]。近来化学上常用的一种吸引子重构法为奇异值分解法(SVD)，首先建立某一时间序列"窗口"向量 $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$，取样时间为 t_s，"窗口"长度为 nt_s，如有 N_T 个记录，则可建造 $N = N_T - (n-1)$ 个 n"窗口"，这些窗口构成"曲线矩阵"$X = N^{\frac{1}{2}}(\hat{w}_1, \quad \hat{w}_2, \quad \cdots, \quad \hat{w}_n)^T$（其中 $N^{\frac{1}{2}}$ 为正常化因子）

由"曲线矩阵"而得到一组奇异值 σ_i 和二组奇异向量 C_i 和 S_i，方程为

$$XC = S\Sigma \qquad X^TS = C\Sigma$$

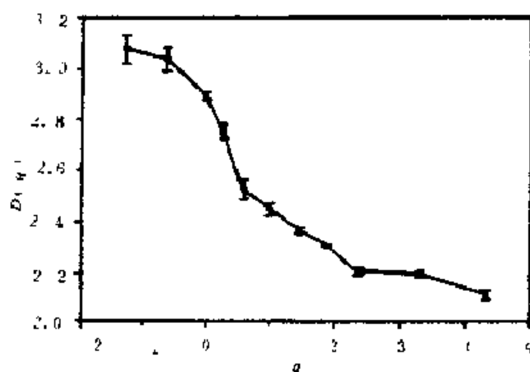
其中 Σ 为奇异值的对角矩阵，$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n)$，$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$，C 和 S 的列为向量，C 为 X^TX 的本征向量，S 为 XX^T 的本征向量。n 个奇异值分为两类，大数值的一类 $\sigma_1, \cdots, \sigma_d, d < n$，与 d 个本征值相联系的本征向量定义为确定性 d 维亚空间；n－d 个小奇异值相应于噪声控制的"补充空间"，n 值的确定方法是根据 Fourier 变换谱图来确定一个频率 v^*，在这个频率以上没有重要的能谱，$nt_sv^* = 1$。我们把 x 的 n"窗口"向量投影于 d 维 C_i 向量上，即得到 d 维空间的吸引子，这种方法可以滤去白噪音和克服相空间的坐标的关联。图(2)为 CSTR 中 BZ 反应在 $K_f = 1.6 \times 10^{-2} min^{-1}$ 时 SVD 法重构的吸引子[14]。



图(2). CSTR 中低流速（$K_f = 1.6 \times 10^{-2} min^{-1}$）的 BZ 反应在 350nm 时的吸光度时间序列(a)和 SVD 法重构的吸引子(b)；[丙二酸] = $0.30 mol \cdot L^{-1}$，$[BrO_3^-] = 0.14 mol \cdot L^{-1}$，$[H_2SO_4] = 0.20 mol \cdot L^{-1}$，$[Ce^{3+}] = 1.0 \times 10^{-3} mol \cdot L^{-1}$。

维数分为 Hausdorff 维 D0、信息维数 D1 和关联维数 D2，求吸引子广义维数常用 NNA 法(Nearst Neighbor Analysis)[15]，从而可得到 Renyi 维数谱。在吸引子轨道上选取 $x(t-0), x(t-\tau), \cdots x-(t-N\tau)$，把相空间分为大小为 l 的单元，一点在 i 单元的可能性是 P_i，$P_i = lim_{N \to \infty} Ni/N$，q 阶的 Renyi 信息：

$$Sq = \frac{1}{1-q} ln \sum_{i=1}^{N} p_i^q$$



图(3). 图(3)中的吸引子按 NNA 法计算的维数谱

广义维数 D_q 为：$D_q = \lim_{l \to 0} \frac{S_q}{\ln l}$，图(3)是按照 NNA 法得到的低流速下 BZ 混沌反应的 D_q 谱图，$q \to 0$，为 Hausdoff 维，$q \to 1$，为信息维数，$q \to 2$，为关联维数，其中 $D_0 \geq D_1 \geq D_2$。

四、吸引子维数与非线性化学动力学

从近来文献上看，仅有德国 Wurzburg 大学的 F·W·Schneider 研究小组[16]从八十年代后期开始把吸引子维数应用于化学动力学研究中，主要用于噪声与化学混沌的区分。在 CSTR 的低流速 BZ 反应中，经过重构吸引子的 D_q 为大于 2 的分数，具有混沌吸引子的性质，因此化学工作者公认为确定性化学混沌[8][17]。然而在 CSTR 高流速的 BZ 反应中[18]，非周期时间序列处于 Farey 台阶之间(即 1^1 和 1^2 之间)，计算吸引子维数在 1—2 之间[14]，关于这种非周期运动是不是确定性化学混沌有两种看法，维数论者认为这种高流速的非周期化学反应是噪声引起两种周期运动(1^1 和 1^2)无规则的交替[14]，另一种看法是按照化学动力学模拟的结果认为是化学动力学确定性混沌[19]。文献[19]的模拟与实验不尽符合，而且模拟的时间序列并不能说明确定性混沌的特征，而功率谱和 1—D 图都不具有确定性混沌的特征，Brusselator 模型计算[20]噪声可使周期时间序列变为不规则序列，因此一般倾向于维数论，当然进一步的确定还需要实验与理论研究。

分形是非线性动力学研究的三个数学工具之一，必定得到愈来愈多的化学工作者的重视。但是分析一个非线性化学动力学系统，其它特征(如功率谱、Lyapunov 指数，1—D 图，分岐图等)也是不可缺少的。

[1]I. R. Epstein, physica, 51D, 152(1991)

[2]Edited by R. J. Field and M. Burger, Oscillations and Travelling Waves in chemical systems, John wiley and sons, New York, 1985.

[3]高庆宇，袁万钟，大连理工大学学报，31 545(1991).

[4]J. Kaplan and J. York, in Lecture Notes in Mathematics, edited by H. O. Peitgen and H. O Walther, Springer, Berlin, 1978, Vol. 730, P. 228.

[5]M. Marek and J. Stuchl, Biophys. Chem, 3, 241(1975).

[6]W. Y. Tam, et al., J. Chem. phys., 88, 3395(1988).

[7]W. Y. Tam, et al., phys. Rev. Lett., 61, 2163(1988).

[8]F. W. Schneider and A. F. Munster, J. phys. Chem., 95, 2130(1991).

[9]J. M. Ottino, C. W. leony, H. Rising and P. D. Swanson, Nature, 33, 419(1988).

[10]H. P. Kraus and F. W. Schneider, J. phys. Chem., 95, 9860(1991).

[11]F. Takens, Leture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1981; Vol. 898.

[12]N. H. Packard, et al., Phys. Rev. lett., 45, 712(1980).

[13]D. S. Broomhead and G. P. King, Physica D, 20, 217(1986).

[14]R. Blittersdorff, A. F. Munsfer and F. W. Schneider, J. Phys. Chem., 96, 5893(1992).

[15]H. G. Schuster, Deterministic Chaos, VCH, Weinleim, 1988, P. 122—131.

[16]A. K. Freund, F. W. Schneider, Ber. Bunsenges. phys. chem., 90, 1079—84.

[17]Z. Noszticzius, W. D. Mccormick and H. D. Swinny, J. phys. chem., 91, 5129(1987) and references.

[19]L. Gyorgyi, et al., J. Phys. Chem., 96, 1228(1992).

[20]Th. M. Kruel, A. Freund and F. W. Schneider, J. Chem. Phys., 93, 416(1990).

表面分形的生成过程及其吸附行为的计算机模拟

郭向云　李永旺　钟炳
中国科学院山西煤炭化学研究所　　太原 030001

分形概念是 Mandelbrot 研究不规则形状和过程时提出的[1]，它是指一类介于有序和无序，微观和宏观之间的中间状态。表征分形的一个重要的特征量就是分维，分维可用来度量一个对象的不规则性和碎裂程度[2]。目前，分形理论已广泛地应用于自然科学的各个领域。

在催化研究中，长期以来人们都认为被催化剂表面吸附的分子处于二维空间，近年来越来越多的研究表明：催化剂颗粒是一个分形体，它的表面是不规则的，具有分数维特征[3]。不仅疏松的衬底和分布在其上的金属小颗粒作为催化物质的表面可以用分维表征，而且作为在催化作用中起主要作用的颗粒的亚微观结构也具有分形特征。反应前后，催化物质几何构型的改变，可以通过测定分维来研究。许多盐类和氧化物在催化剂表面都会呈单层分散状态，分散后颗粒表面的分维数都会发生变化[4]。催化剂表面的分维与它的催化特性有密切的联系，研究表明在分形介质中进行的扩散和反应都与表面分维数有关[5]。实验上要确定一个表面的分维，往往要测定不同大小的吸附质在该表面的吸附量。这本身就需要相当大的工作量，要从实验上研究表面分维与其催化特性之间的关系，所需的工作量就更大。因此，国内外许多学者都用计算机模拟了分形体的形成过程，尤其是对凝聚过程的模拟[6,7]。

本文将提出一种在计算机上快速生成分形表面的 Monte Carlo 方法，并模拟了分形表面上气体分子的吸附过程。分数维可根据文献[8]，利用密度相关函数方法计算得到。

一、模型和方法

我们在前人工作的基础上，模拟了分形表面的生成过程。模拟是在一个 200×200 的二维方格网络上进行的，模拟中使用了大量 (0,1) 区间内的随机数，它们是由我们程序中的随机数发生器产生的。

1. 分形表面的模拟

在我们的模型中，分形表面的生成过程是一个随机生长的过程。模拟的主要步骤如下：

(1) 先产生一个200×200的方格网络平面。

(2) 在网格中随机地放置若干个种粒子作为凝聚的核心. 如果种粒子数为 1，则把种粒子放在网格中央。

(3) 在网格上某个随机位置产生一个布朗粒子，从该位置开始作随机运动，在上下左右四个方向上随机地选择一个方向并移动一个网格单位。

(4) 如果布朗粒子运动到和种粒子相邻的格点上，则停止运动并成为

凝聚体的一部分。

(5) 重复进行步骤(3)和(4)，直到粒子数达到预先设定的数值。

(6) 计算表面的分维数。

2. 吸附过程的模拟

吸附过程的模拟是在前面分形表面的基础上进行的。气体分子依次被引入到网格上空着的格点上开始向四个方向随机扩散。具体步骤为:

(1) 在网格上随机地选择一个格点，判断该点是否有粒子存在，若该点已被占据则重新选择一个格点。

(2) 气体分子从该点开始作随机运动，每次游动一个网格单位。

(3) 如果运动分子碰上组成表面的粒子，则发生吸附。如果碰上的是已被吸附的气体分子，则判断其相邻的其余三个格点，若至少还有一个格点被占据，无论是被气体分子还是被组成表面的粒子占据，则都能被吸附，否则返回步骤 (1)，重新引入下一个气体分子。

(4) 满足所设定的条件时，终止运行。

二、结果与结论

利用 COMPAQ 486 微机，我们模拟了分形表面的形成过程，计算了表面的分维数，最后还模拟了气体分子在分形表面上的吸附过程。

1. 分形表面及其分维数

首先令种粒子数 Ns 为 1，放置在网格的中央，我们模拟了由 3600 个粒子凝聚形成的表面，如图 1. 所示。利用前文所述的方法计算了不同 r 时的密度相关函数$C(r)$，以 $\ln C(r)$ 对 $\ln r$ 作图，发现两者有良好的线性关系。用最小二乘法拟合有

$$C(r) \propto r^{-0.28}$$

由此可得其分数维 D = 1.72。

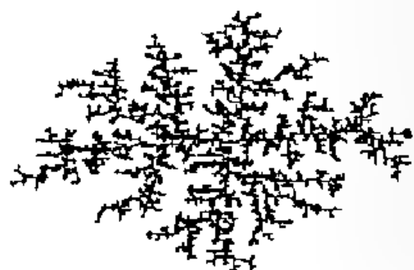


Fig. Random aggregate of 3,600 particles on a square lattice (Ns=1 N=3600)

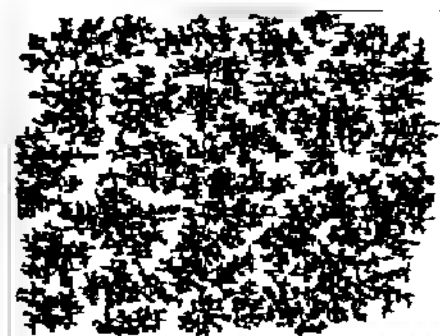


Fig 2 The fractal surface composed of 15,000 particles N=15000 Ns=50

增加种粒子数目，不仅能显著地节省计算时间，而且得到的表面能更好地反映实际的催化表面。图 2. 是种粒子数为 50 时，由 15000 个粒子凝聚而成的表面，其分维数为 1.82。

2. 分形表面上的吸附行为

通过在分形表面上气体分子吸附行为的模拟，结果发现，气体分子优先在表面上形成单分子层，如图 3. 所示。 模拟的吸附过程 ，其吸附曲线类似 Langmuir 曲线，如图 4 所示． 对于模拟出来的吸附层 (图 3)， 我们在利用相关函数法计算分维时发现，ln C(r) 与 ln r 的线性关系不好。这是由于密度相关函数法计算分维的局限性还是因为该结构本身的复杂性造成的，还有待于进一步研究


Fig 3 The structure of adsorption layer on a fractal surface shown in Fig 2

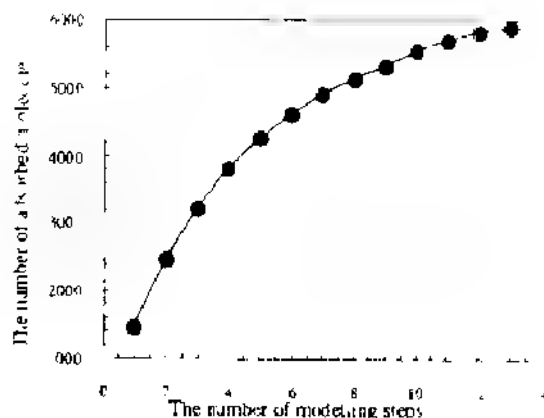


Fig 4 The adsorption curve

在催化科学中，分形是一个崭新的概念。有关催化剂表面分形对其吸附，反应的研究才刚刚起步。我们的模拟工作表明，表面分维是质量在二维空间分布的一种定量描述，也是表征表面结构的一种有效方法，这种分维数进一步可与表面吸附，反应等参数相联系， 可望在催化剂表面设计与化学体系匹配之间建立一种有效的关联。由于实验上制备分形体时无法预知其分维数，可以料想，计算机模拟将会在这方面的研究中扮演一个非常重要的角色。

参考文献：

1. B. B. Mandelbrot, "Fractal: Form, Chance and Dimension", W. H. Freeman Company 1977
2. 赵华明，李后强， 化学研究与应用，4 (1)，3，1992
3. 李后强，化学通报，No. 8，6，1984
4. 郭国霖，黄向东，唐有祺， 北京大学学报 (自然科学版)，28 (5)，566，1992
5. M. Giona and H. E. Roman， Physica A， 186，87，1992
6. T. A. Witten and L. M. Sander， Phys. Rev. Lett.， 47 (9)，1400，1981
7. P. Meakin， Phys. Rev. Lett.， 51 (13)，1119，1983

酶催化动力学的分形行为[1]

李　后　强
（四川大学物理系，成都 610064）

摘　要

分形（fractal）理论是非线性科学中的一种数学工具，其研究对象是在标度变换下具有不变性的体系，旨在揭示宏观（表象）无规现象内部所隐藏着的有规性、层次性和确定性。由于酶分子及其表面均具有分形特性，因此其催化动力学可用分形语言加以描述。首先，我们提出了分形化学动力学，得到了反应级数 Z 与谱维数 d_s 的关系。对双分子反应 A＋A→产物和 A＋B→产物，得 $X=1+2/d_s$。当 $d_s=2$ 时，为经典情形；对 Sierpinski 垫片型结构，$d_s=1.36$，$X=2.47$；在渗流（percolation）网络结构上 $d_s=1.33$，$X=2.50$。人们很早就发现血红蛋白吸氧（O_2）动力学曲线不遵从经典的 Michaelis—Menten 方程而符合 Hill 方程

$$y=K_h[s]^h/(1+K_h[s]^h)$$

后来又发现一些酶催化动力学具有这种行为。式中[s]为底物浓度或 O_2 分压，K_h 为常数，y 是速率，指数 h 称为 Hill 系数，实验值 $1\leqslant h\leqslant 3.2$。本文在 MWC 模型和 KNF 模型的基础上，提出了酶变构效应的分形机制，得到一步构象变化时 $h=1+n/D$，多步构象变化时 $h_a=(1+2/d_s)$ $(Z\ll 1)$，$h_b=(2+2/d_s)(z\gg 1)$。其中 n 为极化作用参数，D 为 Hausdorff 维数。对基元反应，由理论计算可知 n＝2，因 $1<D<3$，故 h＝1.66～3.0。一般情况下，D＝1.33～1.66，故 h＝2.50～2.20。有多重极化作用时，n 最高可达 6，此时 h＝4，这个值可能是 Hill 系数的理论上限值。对丙酮酸激酶，有配体膦苯酚丙酮酸作用下，D＝1.34～2.09，求得 h＝2.49～2.95，与实验值 h＝2.8 接近；甘油醛—3—磷酸脱氢酶，在 NAD^+ 作用下，D＝1.34～1.87，求得 h＝2.49～2.07，与实验值 h＝2.3 吻合。因此，从分形理论角度解释了 h 系数为什么是非整数和如何从理论上计算 Hill 系数等重要问题。根据对复杂酶催化反应的势能曲线的研究，发现标度变化对动力学参数有影响，并给出了 Michaelis—Menten 方程的一种分形修正，即

$$V_0=V_{max}^{eff}[s]^{2-D}/(K_M^{eff}+[s])$$

式中 V_0 为反应初速率，[s]为底物起始浓度，V_{max}^{eff} 和 K_M^{eff} 分别为有效最大速率和反应速率常数。当 D＝1 时，还原为经典的 Michaelis—Menten 方程。同时，还求得酶催化中 d_s 与 D 的关系为 $d_s=2/(2-D)$。可见，引入分形概念后，一切偏离经典动力学方程的因素都反映在分维 D（或 d_s）上，分维成了刻画酶催化动力学的复杂程度的一个定量参数。

① 国家自然科学基金资助项目

参　考　文　献

[1] 李后强、程光钺,《分形与分维》,四川教育出版社,1990,成都。

[2] 李后强、汪富泉,《分形理论及其在分子科学中的应用》,科学出版社,1993,北京。

[3] 汪富泉、李后强,《分形几何与动力系统》,黑龙江教育出版社,1993,哈尔滨。

[4] 李后强,《分形理论在大分子科学与相关领域中的一些应用》,大自然探索,1993,12(1),28—32。

[5] Li. H. Q. Chen. S. H and Zhao. H. M. Fat fractal and multifractals for protein and enzyme surfaces *Int. J. Biol. Macromol*, 1991;13(4). 210—216.

[6] Li. H. Q. Chen. S. H and Zhao. H. M, Fractal structure and conformational entropy of protein Chain, *Int. J. Biol. Macromol*, 1990. 12(6). 374—378.

[7] Li. H. Q. Li. Y and Zhao. H. M, Fractal analysis of protein chain conformation, *Int. J. Biol. Macromol*, 1990, 12(1). 6—8.

[8] Li. H. Q. Chen. S. H and Zhao. H. M, Fractal mechanisms for the allosteric effects of proteins and enzymes, *Biophys. J.* 1990;58(11), 1313—1320.

分子结构的相关熵和相关分维

张宏光　　辛厚文

中国科技大学近代化学系

本文提出一种利用分子结构相关熵和相关分维来度量分子结构复杂性的新方法[1].

分子结构相关熵定义为分子占据空间单位体积内原子相关状态总数:

$$S_2 = \ln\frac{N(N-1)}{2V}$$

$$V = \prod_{i}^{m} \max l_i$$

其中，l_i 表示分子结构空间中，i 方向上相距最远的两个原子间的距离，N 为分子中的原子数。从分子结构相关熵的观点来看，分子结构的复杂程度取决于分子中原子的相关密度而与分子的大小无关．图 1 给出的是 *Gly* 和 *Pro* 两种氨基酸的分子结构．由图中所示结构可直接求出两种分子的结构相关熵分别为 -1.343 和 -1.499，小分子 *Gly* 比大分子 *Pro* 结构更复杂．

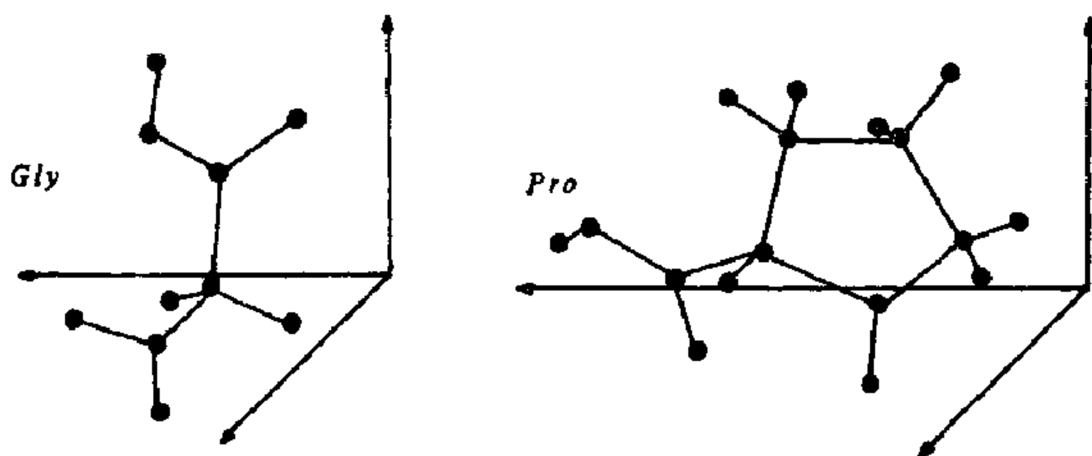


图 1　氨基酸 Gly 和 Pro 的分子结构

当一个分子的边界固定，在其中相同数量的原子怎样排列更复杂呢？这一复杂度可用分子结构的相关分数维来表征，它定义为:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N^2}\sum_{i,j}^{N}\theta(\varepsilon - |\bar{x}_i - \bar{x}_j|)$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \varepsilon \leqslant |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \\ 0 & \varepsilon > |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \end{cases}$$

其中$\bar{x}_i$，$\bar{x}_j$分别表示分子结构空间中的原子矢量，ε 是我们用来度量原子间距离相关

的一个尺度，N 是分子中的原子数．我们的研究表明：绝大多数分子，当处于平衡几何构型时，都具有很好的相关标度行为．图 2 作出了氨基酸分子 Gly 在平衡构型下的相关标度行为．

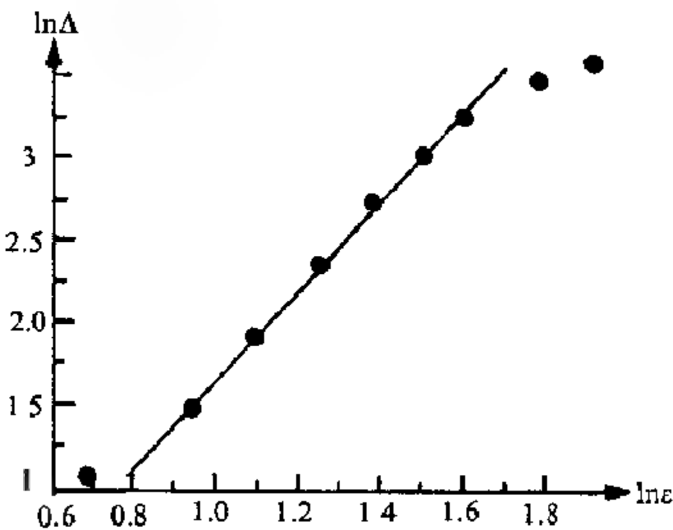


图 2 Gly 在平衡构型下的相关标度行为，$\Delta=\sum_{ij}^{N}\theta(\varepsilon-\bar{r}_{ij})$

一般说来，当分子的边界固定，其内原子的排布总是趋向于使分子具有最大的结构相关分维的平衡几何构型．这是一个很有意思的结论，仍需对大量分子做出验证．

参考文献

[1] Zhang Hongguang, Liao Jielou and Xin Howen "Correlative Entropy and Fractal Dimension of Molecular Structure"

in Proceedings of 4th International Conference on Mathematical and Computational Chemistry, Bled, Yagoslavia, 1991.

缠结高分子链解缠时间的分形摸型

徐英武　　　王存新

中国科技大学基础物理中心，合肥，230026

缠结高分子链体系的解缠时间 τ_d 与链节数 N 的依赖关系为[1]：$\tau_d \propto N^{3.4\pm0.1}$。目前的理论都不能满意地预测这一指数．计算机模拟虽然可以拟合这一指数[2]，但都很不直接．本文在 de Gennes 提出的蛇行模型[3]的基础上，利用分形的概念，并考虑链长修正，简洁地解释了这一实验指数．

按文献[3]式（Ⅲ.7），迁移率可以简写成：

$$\mu \propto \langle P_z^2 \rangle N^{-3} \tag{1}$$

式中 $\langle P_z^2 \rangle$ 为链末端方均距。文献[3]按随机行走模型取 $\langle P_z^2 \rangle \propto N$，因而 $\mu \propto N^{-2}$。实际上，由于高分子链表现出自回避行走行为，根据分形模型理论[4]，存在如下标度关系：$\langle P_z^2 \rangle \propto N^{2/d}$，这里 d 表示链的分维，利用（1）式和爱因斯坦关系式，即得到链沿管轴方向的扩散系数为：

$$D \propto N^{3+\frac{2}{d}} \tag{2}$$

按文献[3]，链的有效长度为 $l = Na(1-\rho b)$，其中 a 表示链节长度，b 为一个"缺陷"的折叠长度，ρ 为平均单位长缺陷数目．记 $\alpha = \rho b$，则 α 表示长度的修正．因为 α 较小，则链长又可写成：

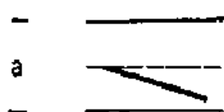
$$l = aN(1-\alpha) = aN^{1-\beta} \tag{3}$$

式中 $\beta = \alpha / \ln N$。结合（2），（3）式得到解缠驰豫时间为：

$$\tau_d = l^2 / D = N^{\gamma} \tag{4}$$

其中 $\gamma = 5-2\beta-2/d$。其值计算如下：

对缠结高分子链而言，由于链运动受到约束，其空间运动低于 3 维．按 de Gennes 的蛇行模型，分子链被约束在一个细管中运动，因而其占据的空间维数为 2，故分维 d=（2+2）/3=4/3，小于三维空间的分维 5/3．



图一．缠结网格中一节链段．
粗线表示链节，虚线表示管的轴线．

为了计算 α 的数值，考虑缠结网格尺度 a'与链段尺度 a 相等的情形，即 a'=a．图一中绘出了一节链段，其中粗线表示链，它与管轴方向夹角为 θ，因而该段链在管轴方向上的长度为 $a_{\parallel} = a\cos\theta$。由于几何的限制，$\theta$ 取值范围应在 0 到 $\pi/4$。一节链取向为 θ 的几率密度是 $\rho(\theta)$。则

$$\rho(\theta)d\theta = 2\pi/3\sin\theta d\theta \Big/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi/3\sin\theta d\theta = \sin\theta d\theta / (1-\sqrt{2}) \tag{5}$$

故 $a_{\parallel}$ 的平均值为：

$$\langle a_{\parallel} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos\theta \rho(\theta) d\theta = 0.85a \tag{6}$$

因而链的有效长度为 $l = N\langle a_{\parallel} \rangle = Na(1-\alpha)$，故 $\alpha = 1-\langle a_{\parallel} \rangle / a = 15\%$．对于典型的高分子链，$N \approx 50$，因而 $2\beta = 0.07$．这样我们得到：$\gamma = 5-0.07-6/4 = 3.43$．这与实验结果 $\gamma = 3.4 \pm 0.1$ 是相符的．本文计算的 γ 值与 N 仅有十分微弱的关系．

参考文献

[1] Ferry, J D , Viscoelatic Properties of Polymers, 3rd ed Wiley,New York,1986

[2]钱敏平，等，中国科学，A 辑，12(1990),1267

[3] de Gennes, P G , J Chem Phys 55(1971),572

[4] Halin, S., Ben–Avraham, D , Phys Rev. A, 26(1982)

东北羊草草原主要环境因子的分形分析

张喜军　马克明　陈继红　祖元刚

(东北林业大学植物学重点开放实验室)

摘　　要

本文用地统计学和分形相结合的方法，研究了东北羊草草原三个主要环境因子土壤含水量、土壤有机质和PH值在不同空间尺度上分维的变化行为，并对结果进行了分析和讨论。

关键词　分形；分维，地统计学；半方差图；羊草草原

前　　言

自七十年代中期法国著名数学家曼德尔布劳特（B. B. Mandelbrot）指出分形(fractal)的概念以来，国际上对分形理论的研究异常活跃，作为非线性科学的一个有力工具，目前，分形几何学已从纯粹的几何学走入经验科学，并已广泛应用于物理学、化学、生物学、地学、经济学、情报学等自然科学和社会科学领域。

经典的欧氏几何学研究的是直线、平面、立方体等非常规则的几何对象，而自然界中存在更多的是不能用欧氏几何学描述的几何对象，如山、云、闪电、海岸线等，这些极不规则、极其复杂的几何图形和结构正是分形几何学的研究对象。分形体的一个严格定义是，如果一个物体具Hausdoff-Besicovitch维超过欧几里得空间维，那么这个物体就是分形体。而一个不太正式但易于接受的概念是，分形体是在所有空间尺度上都有细节的物体（Palmer,1988）。植物及其环境因子由于在连续的尺度上存在变异，一般也被认为是分形体。

分形几何学作为研究空间变异的工具，已广泛应用于生态学领域，并取得了许多成功的范例（Philips,1985；Krummel等，1987；Palmer,1988，Milne,1988）。本文以东北羊草草原植被为对象，对其主要环境因子：土壤含水量、土壤有机值和PH值在不同空间尺度上的分维（fractal dimention）的变化行为进行了分析和讨论。

研究地点

研究地点位于松嫩平原南部、吉林省长岭县腰井子羊草草原自然保护区内，地理位置为东经120°31′-124°10′，北纬44°30′-44°45′。

该地区属于温带半湿润半干旱季风气候。春季与秋季干燥多风，夏末多雨，冬季寒冷少雪，年平均气温4.9°C，>10°C积温2919°C，平均年降雨量470.6mm，且主要集

中于每年的六、七、八月分；年蒸发量平均为1668mm，约为平均降雨量的3.5倍。该地土壤为苏打草甸碱土，表土层厚约8-15Cm，以下为柱状碱土。

该地区的地带性植被为草甸草原，植被以羊草群落占优势，羊草群落和其它群落成植被复合体分布。羊草群落的植物种类组成单纯，种饱和度低，每平方米不足10种，主要伴生种有寸草苔、拂子茅、扫帚鸡儿肠、五脉山黧豆、芦苇等。

研究方法

在保护区内的典型地段连续设置100个1×1m²的样方，在每一样方内取地表0–10cm土样,在实验室内,分别测定其土壤含水量（%）、土壤有机质（%）和P^H值。用地统计学（geostatistics）方法分别计算三个环境因子在不同空间尺度上的半方差(semivariance) r（h），r（h）由下列公式获得

$$r(h)=\frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(i)-Z(i+h)]^2 \quad (1)$$

其中，Z（i+h）是距i点h处的环境变量值，N（h）是距离为h的点对的数量（Clark，1979）。

半方差图（Semivarigram）是r（h）关于h的双对数函数图,其对应的分维D由D=(4−m)/2计算。其中m是半方差图的斜率（Burrough，1983）。

计算结果是由作者自编的BASIC程序在AST386计算机上完成。

结果与分析

图1给出了作为位置函数的三个环境变量图。图1A表示土壤含水量，图1B是土壤有机质，图1C为PH值。

在一个连续的断面上，如果某一环境变量随距离单调增加（或减少），这一变量就具有严格的空间依赖性，其变量图将是线性的，对应的分维D=1。另一方面，如果一个环境变量的值是不可预知的，随着距离增加，其分布点占满整个x–y平面，那么这一环境变量在空间上是完全独立的，其对应的分维D=2。大部分生态学数据图可能介于上述两种情况之间，其分维也介于1和2之间（Palmer,1988）。从图1A、1B、1C中可以看到，三个环境变量既不随距离单调增加或减少，也没有占满x–y平面，因此，其分维也应该介于1和2之间。

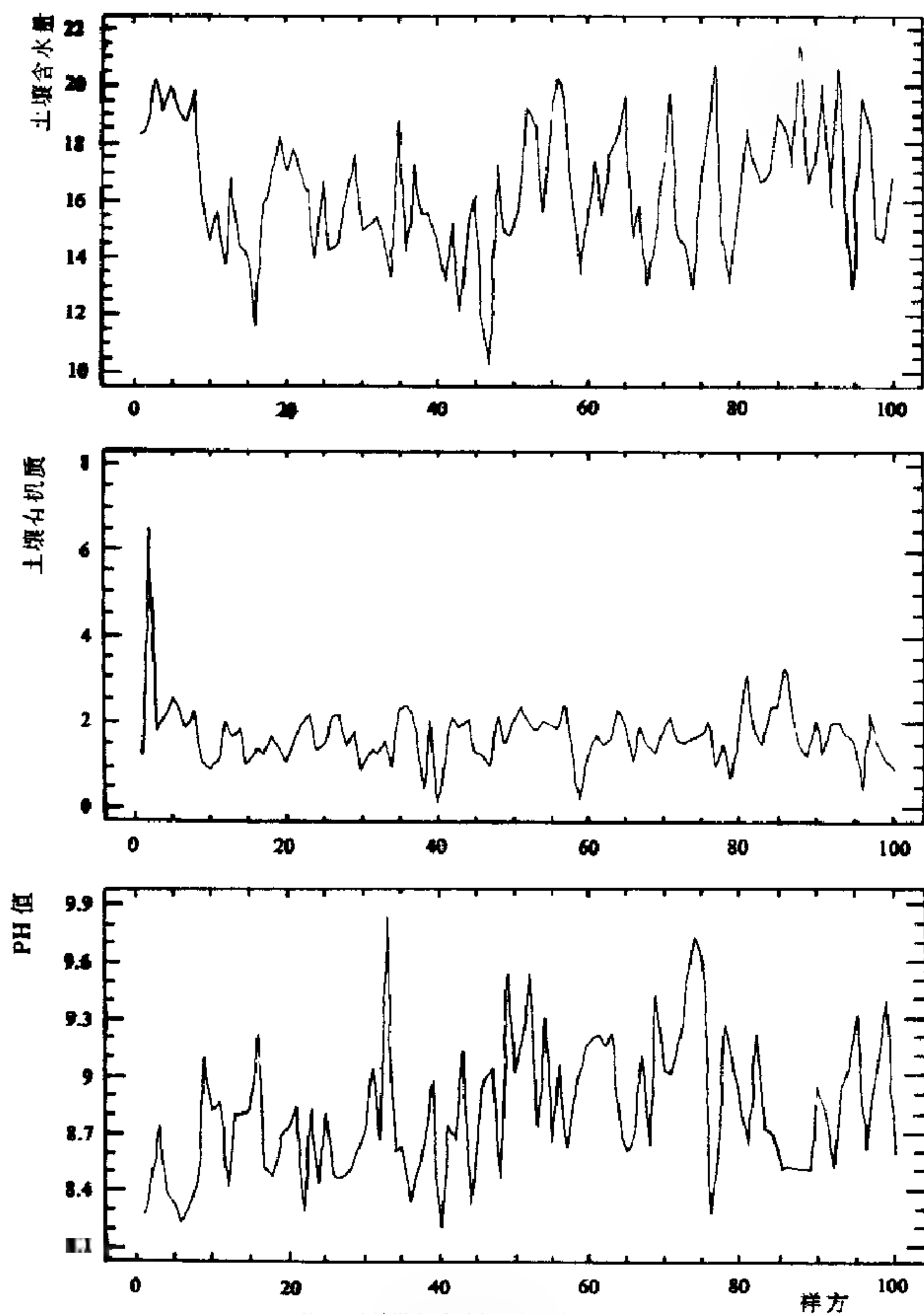


图1 连续样方系列中三个环境变量的值

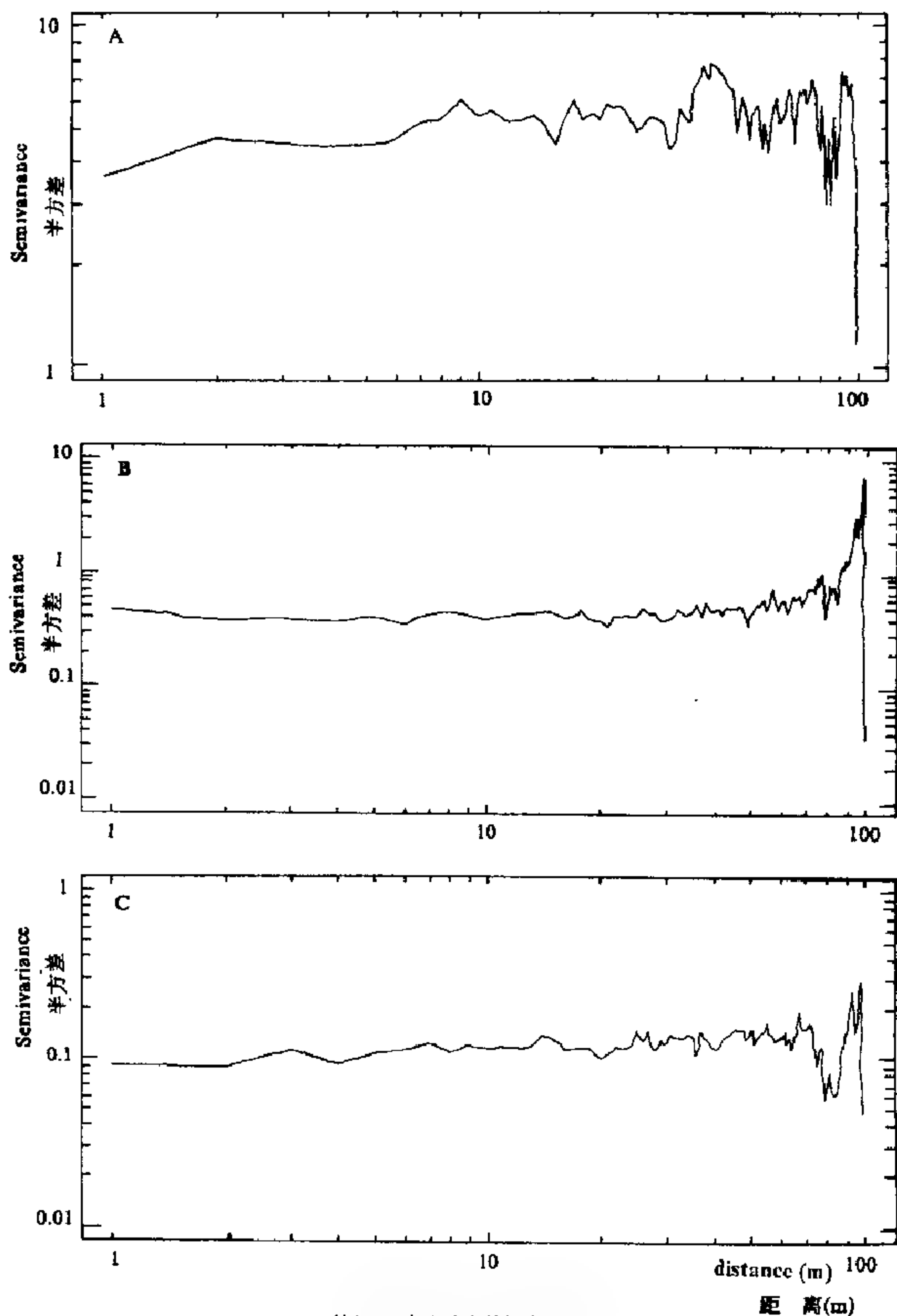


图2 三个环境变量的半方差

A. 土壤含水量　B. 土壤有机质　C. P^H 值

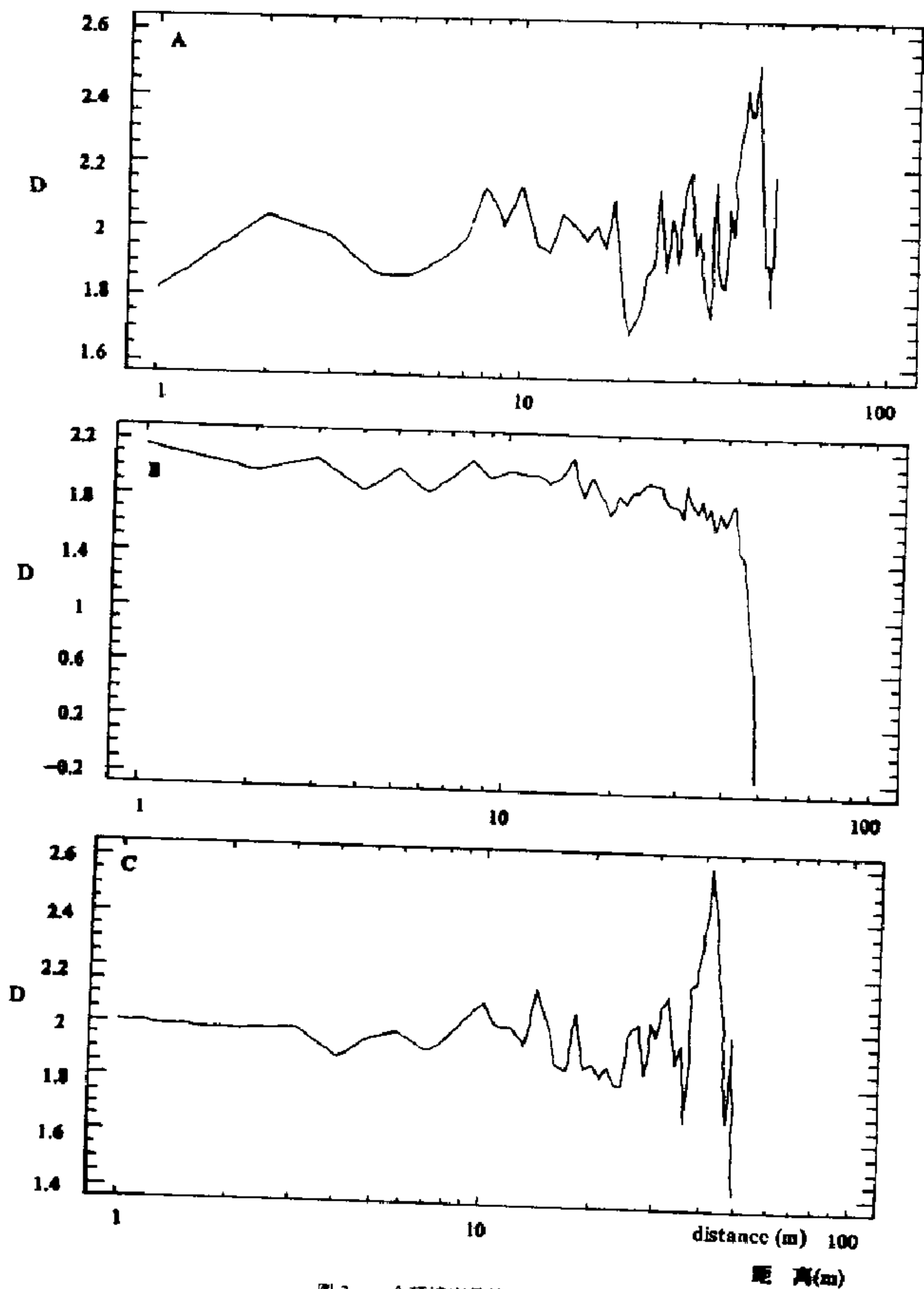


图 3 二个环境变量的分维图

A. 土壤含水量 B.土壤有机质 C. pH

图 2 为三个环境变量的半方差图。半方差图在地统计学中是一个关键，它概括了作为尺度函数的依赖变量的变化。如果两邻近样本与两个远距离样本的 Z 值无差别，那么在不同尺度上的半方差 r (h) 也就没有差别，其半方差图将是水平，斜率为 0，对应的分维是 2，表明该变量在连续的尺度上是空间独立的。如果半方差图是线性的，说明变量具有统计自相似性，即大尺度格局是小尺度格局的放大形式，分维是尺度的常数函数，变量是空间依赖的。从图 2 中可以看出，土壤含水量（图 2A）、土壤有机质（图 2B）和 P^H（图 2C）的半方差图在小尺度上（小于 10m 左右）接近水平，而在大尺度上也具有水平趋势，但稍有波动。这说明三个环境变量在不同尺度上的半方差 r (h) 的差别较小，其在连续尺度上的空间依赖性较弱。

半方差图在大尺度上的波动可能是受取样大小和数据随机特性影响的结果 (Palmer, 1988)。

对应于半方差图的是分维图 (fractogram)。图 3 给出了三个环境因子在不同尺度上 D 的变化情况。从前文的定义来看，三个环境变量的分维都应该介于 1 和 2 之间，但在图 3 中的某些情况下，计算得到的分维超过了 2，从地统计学的角度分析，其结果来源于两个远距离样本的差异小于两个近距离样本的差异，这时，半方差图的斜率 $m<0$，对应的分维 D 便大于 2，这可能是数据存在真或假的周期性的结果。

从图 3 中还可以看出，分维一般不是尺度的常数函数，表明环境因子空间上不存在自相似性，不能用一分维值来描述环境因子在空间上的变化行为。

分维是一个变量空间依赖程度的指标。土壤含水量（图 3A）、土壤有机质（图 3B）和 P^H（图 3C）的分维 D 一般接近 2 而不是 1，这意味着三个环境因子的空间依赖性均较弱，这与 Barrough (1983) 和 Cullimg (1986) 等人的研究结果是一致的。土壤和其它环境变量的分维接近于 2 可能是自然界的普遍现象。

本文只分析了东北羊草草原三个主要环境因子在一线性断面上分维的变化行为，在垂直方向以及平面上各因子的分维变化情况还有待于进一步研究。

此外，本文所使用的方法不仅适用于环境指标，也适用于植被以及植被与环境之间相互关系的分析。作者在测定上述环境因子的同时，还估计了连续 100 个样方中植被的多度和盖度，关于东北羊草草原植被及植被与环境对应的分形分析，拟另文发表。

主 要 参 考 文 献

[1] 文志英，1989，Fratal几何与维数，大自然探索，8 (28) 21-24.

[2] 方兆姓，1992，维数：从纯粹几何学走入经验科学，自然杂志，15 (1) 30-34.

[3] 陈华豪，1992，分数维几何学及其应用，东北大业大学学报，20 (1)，77-82.

[4] 黄登仕、李后强，1990，分形几何学 R/S分析与分式布朗运动，自然杂志，13 (8)：477-482.

[5] Burrough, P. A 1981, Fractal dimention of landscapes and other environment data, Nature 294, 240-242.

[6] Clark, I, 1979. Practical geostatistics, Applied Science Publishers London

[7] Krummel, J. R et al 1987, Landscape patterns in disturbed environment, Oikos 48 321-324.

[8] Milne, B T. 1988. Measuring the fractal geometry of landscape, Applied Mathematics and Computation. 7.

东北羊草草原群落格局的分数维(Fractal)理论研究

I 分数维理论及其在小尺度水平格局研究中的应用

马克明 张喜军 陈继红 祖元刚

(东北林业大学植物重点开放实验室，哈尔滨，150040)

摘 要

本文应用分数维（Fractal）（也有人译为分形）理论对东北羊草草原群落小尺度水平格局进行了尝试研究。应用盒维数（Box Dimension）的发展公式之一Balatoni和Renyi于1956年提出的信息维(Information dimension）公式计算了羊草群落三个主要种的维数值，羊草1.450，寸草苔0.947，糙隐子草1.068，表明羊草对空间的占有程度远大于寸草苔和糙隐子草，为该群落的优势种和建群种，其它两个种为伴生种。同时还在不同尺度上应用信息维公式计算，并绘出"尺度维数"曲线表明羊草分布零散均匀，糙隐子草是簇生的，寸草苔的分布介于以上二者之间分布零散而不均匀。

关键词 羊草草原；群落水平格局，尺度，分数维，"尺度维数"

一 引 言

分数维（Fractal）理论的研究最早可以追溯到1919年Hausdorff对Cantor集维数的计算[①]。1967年B. B. Mandelbrot发表了《英国的海岸线有多长》，并于1975年由描述碎石的拉丁文Fractus创造出Fractal一词[②]，从此分数维理论的研究引起了人们的极大兴趣，被应用到数学、物理学、化学、生物学、地学、经济学、情报学及人口学等自然和社会科学各个领域，它的出现为这些领域的研究带来了新思维。并同耗散结构和混沌理论一道被称为二十世纪七十年代中期科学上的三大发现。

分形集具有以下典型特征[①]

1 具有精细结构，即有任意小比例的细节。

2 不规则，无法用传统的几何语言来描述其整体或局部。

3 具自相似性（近似的或统计的自相似性）。

4 其分数维（以某种适宜的方式定义）一般大于拓扑维。

5 在大多数令人感兴趣的情形下，以非常简单的方式定义，可能由迭代产生。

关于分形的概念，目前存在许多定义，但均有偏颇之处。一般情况下，不要试图给出分形的精确定义，因为那样做总要排除一些实际上是分形的情形。因此我们可以一般地认

为具有以上性质的集便是分形体。自然界中许多事物都基本满足以上条件，如云的轮廓、山脊的形状、树的分枝、晶体的生长等等。

分数维几何的主要工具是它许多形式的维数[①]。一个维数包含相应集几何性质的许多信息，反映出分数维体的比例性质及自相似性等。因此，分数维理论的研究主要是对于各种维数的探索。目前比较常用的有三类：相似维数（Similar dimension）、Hausdorff 维数（Hausdorff Besicovitch dimession）和盒维数（Box dimension），其他名目繁多的维数都是据个人不同的研究需要由这三种之一或其组合演变而来。值得注意的是，由不同维数定义建立的公式对于同一分形体计算得到的维数可能很不同，这是因为他们出发点不同，所欲反映分数维体的性质也不同的缘故，因此在维数的使用中要慎重公式的选择，不合理的使用会产生相当大的混乱[②]。

自然界中没有真正的分形体，对于前面的分形典型性质，实际物体一般不能够全部满足，比如分形体的自相似（Self-Similarity）特征，它们的自相似性一般只是近似的或统计的，或只是具有精细结构（Cantor 集、Kock 曲线等一类人造集除外）。另外实际物体的分形特征具有一定的范围，在这个范围内它们表现出许多类似分形的性质，如一棵树的分枝具其独特的分形特征，当尺度（scale）缩小到叶片尺寸时，其分形特征改变了；反之，当尺度扩大到一片森林时，其分形特征又变为另外一种形式。虽然它们不是严格的分形，也通常被当作分形体来处理，因为这样做往往会得到用常规方法无法取得的合理的和出人预料的结果[③]。

基于以上观点我们认为植被是一种分形体，因为它在许多不同尺度上都具有细节，可以用分数维理论对其进行量化研究[④]。本文提出一种应用分数维理论研究群落格局的方法，计算群落格局中各植物种的维数，通过分析其维数所包含的几何特性信息提示出群落格局的生态特征。

二 试验区概况

本项研究于 1992 年 7 月进行，试验样地设在吉林省长岭县腰井子草原自然保护区。地理位置：东经 120°31′—124°10′，北纬 44°30′—44°45′该地区是由于地质变迁形成的冲积——湖积平原，大地形封闭，地势平坦，呈微波起伏，海拔高度 150—180m 间。草地土壤大部盐渍化，主要类型有盐化草甸土和碱化草甸土。该地区属温带半湿润半干旱季风气候，>10℃积温约 2919.7℃，年降雨量约 470.6mm 并主要集中在六、七、八月份中。年蒸发量 1668mm，约为降雨量的 3.5 倍。该地区的地带性植被是草甸草原，羊草（Aneurolepidium chinense）群落占优势，羊草和其它群落形成植物被复合体分布[⑤]。研究样地在保护区内，为羊草优势群落，种类组成单纯，结构简单，种饱和度小，每平方米不足 10 种，但单草的盖度大，总和优势度（SDR_5）可达 100%。主要伴生种有寸草苔（Carex duriscula），糙隐子草（Cleistogenes squarrosa）、五脉山黧豆（Lathyras quinquenervius）、扫帚鸡儿肠（Kalimeris integrifolia）等。

三 研究方法

本项研究采用 δ—网立方体覆盖法．所谓 δ—网立方体覆盖法对于本研究来说就是用边长为 δ 的一系列方网格对样方进行覆盖[①]。在试验区内选取有代表性的地点设置 1 个 1×1m 的样方，以一角为坐标原点，测量并记录样方内各株植物如羊草、寸草苔、糙隐子草的坐标位置，在计算机上建立数据库．维计算采用的公式是由 Balafoni 和 Renyi 于 1956 年提出的信息维（information dimension）公式：

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I}{-\ln\varepsilon} \tag{1}$$

其中 D_I 为信息维．$I = -\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i \ln P_i$ 为信息量公式（或称多样性指数）、ε 为 δ 网立方体边长，n（ε）为具非零概率的相格数，P_i 为概率[②]，这个公式实际上是盒维数的一个推广，严格的数学推导请见 Falconer（1991）。计算是分种进行的．按不同尺度对样方进行格栅化（相当于变换 δ 的长度）确定所选尺度格栅中是否有某个种存在，累加存在某个种之格栅个数，除以格栅总数，得其占有概率，代入 D_I 公式中，计算其各尺度下的值、实际操作是确定每一株植物在样方内的坐标之后在计算机上建立数据库，利用计算机进行格栅化计算。

应该说明的是，本项研究虽基于信息维公式的思想，但并不是完全严格按其要求求出植物分布的一个极限情形下的 D_I 值，并且实际应用于结果分析的除极限情况的 D_I 值外，还有一系列不同尺度下的 D_I 值——我们暂且称之为"尺度维数"（scale dimension），植被是一种分形因为它在各个尺度上都有细节，利用维数思想对其各尺度细节进行研究是很有意义的，这也正是本项研究的目的和出发点。

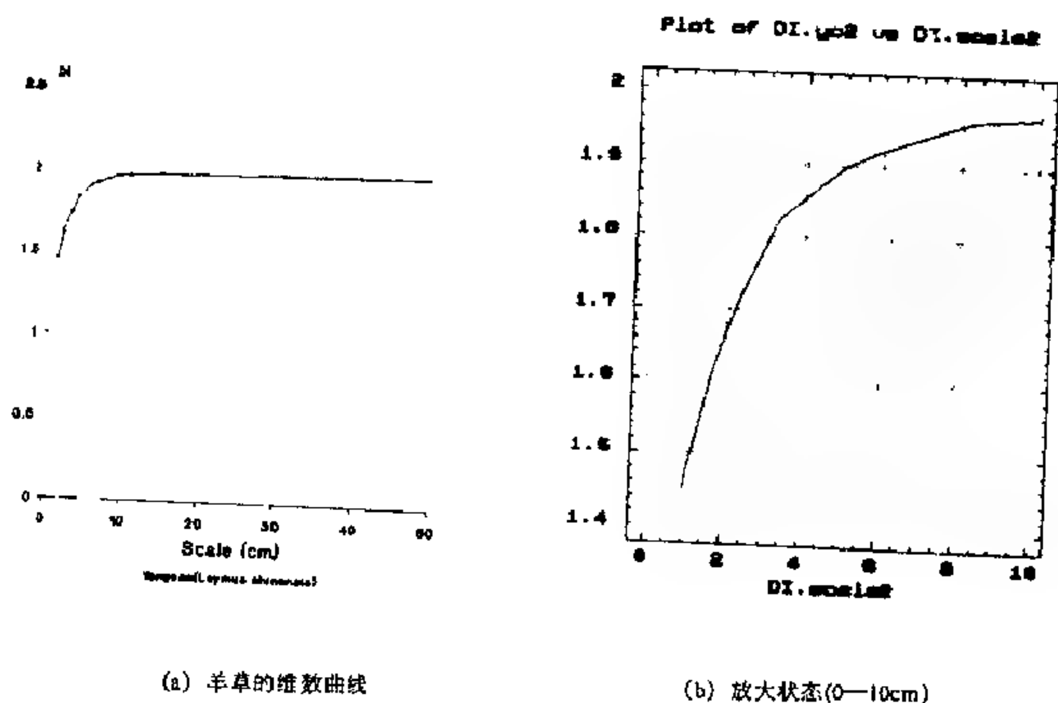
四 结果与分析

应用自编 BASIC 程序经 MTI -486 计算机计算所得各个种的信息维值和"尺度维数"值列于表 1 中。

表 1 羊草群落主要种信息维值及"尺度维数"值

样方划分数	格栅边长 (cm)	羊草尺度维数	寸草苔尺度维数	糙隐子草尺度维数
2	50	1 997	1 971	1.538
7	14 29	1 979	1 690	1 612
10	10	1 970	1 578	1.517
12	8 33	1 964	1 551	1 461
17	5 88	1 918	1 424	1 390
20	5	1 898	1 373	1 367
30	3 33	1 823	1 255	1 279
40	2 5	1 733	1 163	1 184
50	2	1 668	1 101	1 163
60	1.67	1 608	1 065	1 149
70	1.43	1 551	1.026	1.104
80	1 25	1 515	0.995	1.091
90	1 11	1 479	0 969	1.080
100	1	1 450	0 947	1 068
信息维值		1 450	0 947	1 068

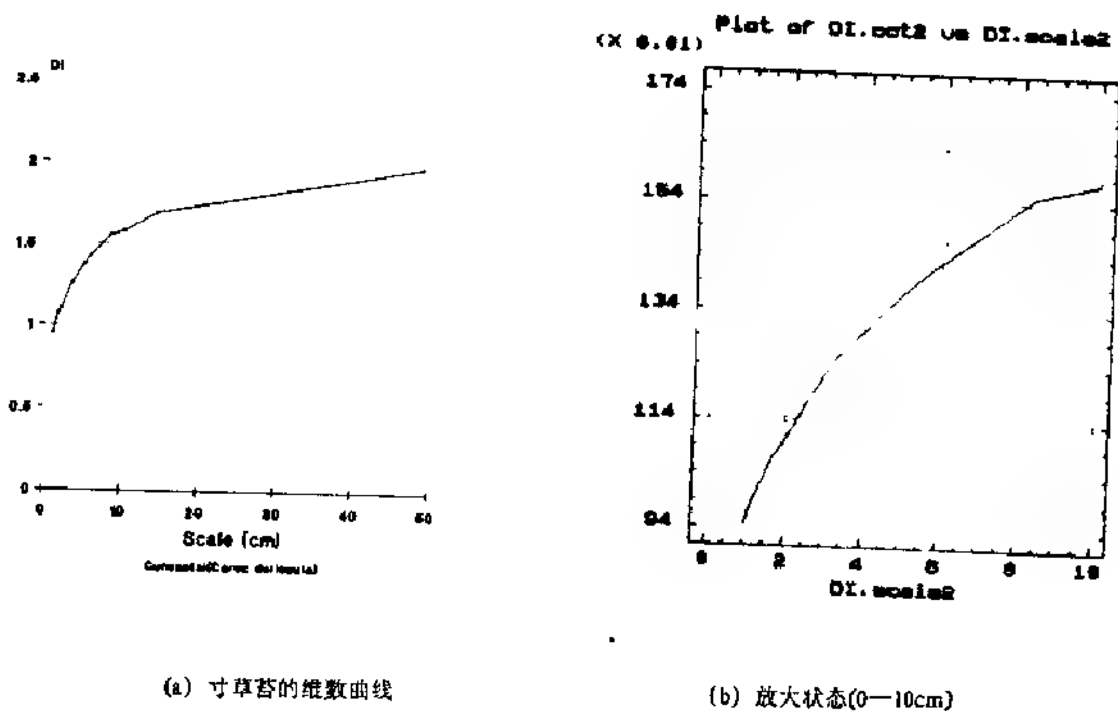
其各尺度 D_I 值曲线如图 1—4 所示。



(a) 羊草的维数曲线

(b) 放大状态(0—10cm)

图 1 羊草的尺度维数曲线



(a) 寸草苔的维数曲线

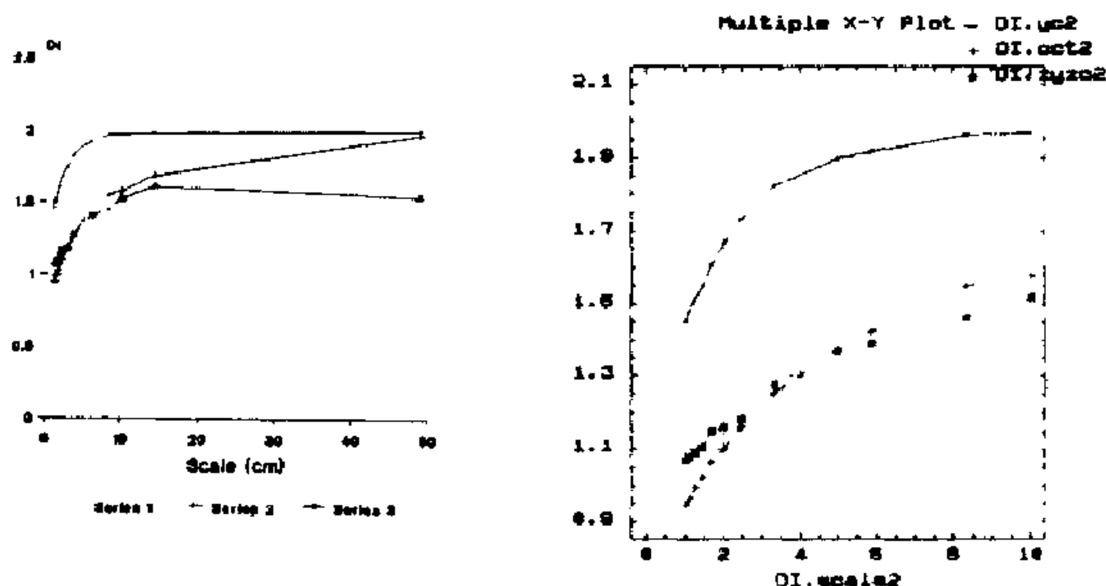
(b) 放大状态(0—10cm)

图 2 寸草苔的维数曲线



(a) 糙隐子草的维数曲线　　(b) 放大状态(0—10cm)

图 3　糙隐子草的维数曲线



(a) 羊草群落三个种维数曲线比较　　(b) 放大状态(0—10cm)

图 4　羊草群落的维数曲线

在信息维公式中 D_I 值的取得是有条件的，它应该是 ε→0 时的极限值，但鉴于研究的实际我们只将 ε 最小取为 1cm，这样做我们是基于这样一种考虑的，因为我们的研究目的是羊草群的水平分布状况，而就群落格局研究来说，取 1cm 已足够精细，更精细的研究已不必要或无意义．而且如果超出某一尺度范围，一分形体原来存在的某种分形特征（或称复杂性或不规则性）便不显著或不存在了[3,10]，这样在维数计算时我们便认为 ε→1cm 的 D_I 值为信息维值，经计算羊草的信息维为 1.450，寸草苔为 0.947，糙隐子草为 1.068，可见 $D_{I羊草} > D_{I糙隐子草} > D_{I寸草苔}$．从维数的意义来看对该群落水平空间的占据羊草 > 糙隐子草 > 寸草苔，从维数值的差别来看，羊草远大于其它两种，$D_{I羊草} - D_{I糙隐子草}$

$=0.382$，$D_{1羊草}-D_{1寸草苔}=0.503$，而糙隐子草同寸草苔的差别较小，仅为0.121。可见羊草在群落中是占绝对优势的，为优势种，该地区的半湿润半干旱的气候及盐碱性土壤最适合其生长，糙隐子草和寸草苔为其伴生种。这种量化过程得到的结果与经典定性的描述相一致，说明维数可以作为一个定量指标来描述群落格局。

下面利用该群落在各个尺度上的维数值进行讨论。严格从数学角度来看，分形体的维数只能有一个，那就是 $\varepsilon\to0$ 时的 D_1 值，在其它尺度上维数是不存在。但我们发现 D_1 在不同尺度上的值对于研究群落格局也很有意义，因此故且不论它们是否为维数，而将其作为群落格局研究的指标看待，并称之为'尺度维数"。

由表1和图1可以看出，羊草的 D_1 值在 $\varepsilon=8.33$cm 以上时均在1.964以上，接近于2，维数曲线接近于水平，说明在大于8.33尺度上对空间的占据很大，而且基本上是均匀分布的，当 $\varepsilon=8.33$—5cm 时，D_1 值在1.964—1.898之间，空间占据程度也很大，但维数曲线稍有下降，接近均匀分布，但均匀性稍差，当 ε 小于5cm时，维数值由1.898降至1.450，曲线呈明显下降趋势，说明它对空间的占据下降，均匀性也急剧下降，非均匀性增强，此结果与羊草在群落中的分布状况相符。羊草是一种根茎禾草，观察尺度较大时均匀性较强，当尺度较小时均匀性较差，这在实地可以很容易观察到。关于空间占据程度随尺度缩小而下降可以理解为进行尺度变化过程中，在大格子中发现羊草的频率一定比在一个小格子中大，这样在数学处理中由于不同尺度上精确程度的差异导致这样一个与实际不符的结果。

由表1和图2可以看出，寸草苔的维数曲线，由大尺度→小尺度明显呈下降趋势，在 $\varepsilon=50$cm 至15cm间曲线下降幅度较小，由1.971降至1.551，说明其分布在大于15cm尺时均匀性较高但较羊草差得多。在小于15cm尺度时，曲线变化幅度较大尺度更为强烈，维数由1.551降至0.947，表明其分布的均匀性更差，呈随机分布。

由表1和图3可以看出，糙隐子草的曲线在大于15cm尺度较为水平，表明其大尺度分布均匀程度较高。小于15cm时波动下降直至2.5cm，这段曲线总的趋势为大幅度下降，维数由1.612降至1.184，表明其分布均匀性很差，但曲线在小于2.5cm时出现一个小坪，维数由1.184降至1.068，变化很小，表示在该尺度时其分布的均质性提高。较大尺度分布的均质性很差而小尺度时较好，说明糙隐子草可能是聚集分布的。实际的情况是糙隐子草为簇生。由此亦可证明应用分数维理论研究群落的格局是合理的，实际情况的某些变化会很敏感地在维数中反映出来。维数中包含着分数维体特性的许多信息。

通过图4，我们比较一下羊草、糙隐子草和寸草苔的水平分布可以发现，羊草的维数曲线一直高于其它两个种，且差距很大，说明不论我们从哪一个尺度来观察，羊草均是优势的，主宰着整个群落。另外，通过前面关于三个种维数曲线的分析我们还可以发现，羊草在较大尺度（8.33cm）上是均质的，小尺度时分布不均匀，说明它大体是均匀分布的。糙隐子草在大于15cm尺度是较均质的，而在15cm至2.5cm的尺度内是异质的，更小尺度时又较均质，表明其为聚集分布。寸草苔在各尺度上分布均异质，显示出其分布零散不均匀，是一种随机分布。

由信息维公式计算的结果，羊草和糙隐子草的维数值比较合理，但寸草苔的维数在极限情况下小于1不够合理，这可能是由于进行 δ—网立方体覆盖时，人为格栅化的假周期性造成的，或者是 ε 1cm时已超出其具分形特征的范围。

五 结 论

1 羊草群落三种主要植物的极限情形下的分维值分别为羊草 1.450；寸草苔 0.947；糙隐子草 1.068．说明羊草为优势种，其它为伴生种。

2 羊草群落三种主要植物的"尺度维数"曲线表明无论在什么尺度上羊草均为优势，其它两种伴生，并且羊草的分布是零散而均匀的，但在小尺度（8.33cm 以下）时均质性较差．糙隐子草在大于 15cm 均质性较好，在 2.5－15cm 时均匀性较差，而小于 2.5cm 时较均质，表明它的分布呈团块状（簇生）．寸草苔在任何尺度上均质性均较差，分布零散而不均匀，呈随机分布．

"窥一斑可见全豹"，我们进行的这项研究虽只局限于 $1\times 1m^2$ 的样方内，但所得结果与经典定性研究基本一致，说明将分数维理论应用于群落格局的研究是可行的，具有光明的应用前景。本文仅对群小尺度水平格局进行了初步探讨，中大尺度及三维的研究结果将另文报道．

参考文献

1. K. Falconer（曾文曲等译），1991，《分形几何——数学基础及其应用》，东北工学院出版社．
2. B. B. Mandelbrot（王继振译），1991，分形——自然界的几何学，世界科学，PP 1—4。
3. 庄国策，分形与分形物理，自然杂志，Vol 15，No. 11，PP 831—837。
4. 祝廷成，1958，概论我国东北的主要草原，东北师范大学科学集刊（1）PP 90—116。
5. 郑慧莹等，1990，松嫩平原植被分类系统的探讨，植物生态学与地植物学报（4），PP 297—304。
6. 祝廷成等，1965，东北草原上的植被复合体，吉林师范大学学报（7），PP 87—102。
7. 方兆炼，1991，维数：由纯粹几何学走入经验科学，自然杂志，Vol.15，No. 1，PP 30—35。
8. 李后强，1988，分形（Fractal）理论与生物学研究，大自然探索，Vol. 7，No. 24，PP 25—32。
9. M. W. Palmer，1988，Fractal geometry: a tool for describing spatial patterns of plant communities，Vegetatio 75：PP 91—102。
10. D. R. Morse et al，1985，Fractal dimension of vegetation and the distribution of arthropod body lengths，Nature Vol. 314，PP 731—733。

金属非晶态半导体双层膜的分形晶化

吴自勤　　　　　　　　张人佶
（中国科技大学基础物理中心）　　（清华大学机械工程系）

孤立的非晶态Ge、Si膜的晶化温度分别为约400℃和约700℃。当它们和金属膜接触后晶化温度可以大大降低。Herd等[1]根据十种金属(Au、Ag、Al、Cu、Bi、Zn、Cd、Sn、Pb、Sb)和非晶Ge、Si膜接触后的晶化温度得出，金属/a-Si（非晶Si）膜的晶化温度为0.72共晶温度(K)，金属/a-Ge（非晶Ge）膜的晶化温度为(0.63-0.68)共晶温度(K)。例如Au/a-Ge膜的晶化温度为100℃，比孤立Ge膜晶化温度低了300℃。这就是所谓的金属诱导晶化现象。

张人佶等[2,3]研究了Au/a-Ge膜的晶化，在100℃退火时膜中出现花状的Ge晶化区，而基体区仍为非晶Ge，基体区在150℃退火时晶化。他们还发现单晶Au膜和多晶Au膜对非晶Ge膜的促进作用十分不同，单晶Au/a-Ge膜中的晶化温度在350℃以上，远高于多晶Au/a-Ge膜的晶化温度。根据这一实验结果，他们提出，Ge晶核在金属/Ge界面上多晶Au膜三叉晶界处优先成核(图1)，经过简单计算得出：润湿性好(润湿角θ小)、三叉晶界深(φ小)，所需临界成核能就小。

八十年代以来，分形和分维的概念逐渐进入薄膜研究中[4]。我们首先在Pd/a-Si双层膜(将Pd和Si一起加热蒸发由分馏形成双层膜)中对a-Si晶化形成的枝叉状图形进行了分形研究[5,6]，利用密度—密度相关函数法和面积—回转半径法测定了三种不同组分双层膜中图形的分维为1.58(Si-38%Pd)、1.65(Si-47%Pd)和1.78(Si-56%Pd)。二种方法测得的分维的差别约为0.02-0.03。这项工作还得出Pd_2Si的形成先于Si的晶化，但此时并无分形图形的出现，非晶Si的晶化才引起分形的出现

接着我们对不形成化合物的共晶体系(Au-Ge、Al-Ge等)的分形晶化进行了系统的研究，得到的主要结果如下：

1　a-Ge/Au膜退火温度的影响[2,7]

a-Ge/Au膜退火后形成了白色花状区和基体区，其衬度分别为白色和灰色，在花状区枝叉之间和外缘还有黑色衬度区(图2)　花状区的分维随退火温度升高（100-300℃）而增大（从1.76增至2.0)，随时间增加而增加。用密度—密度相关函数法和Sandbox法测得的分维相符。微区X射线能谱分析和选区电子衍射得出：白色花状区富Ge、黑色区富Au。这表明分形区和黑色边缘区之间有元素的互扩散。

2．Au晶粒度的影响[8]

改变Au膜蒸发条件制备了五种晶粒度由40nm到410nm的Au膜，再一起蒸上a-Ge膜。退火后出现的花状区的分维随晶粒度的增大而减小(从1.70减至1.55)，在晶粒度最大的样品中晶化区不出现枝叉，分维一下增大为约2.0。

3．离子注入的影响[9]

室温下将40keV的Si离子注入a-Ge/Au膜，Si离子的射程估计为非晶Ge的厚度，因此可以有效地使界面附近的Ge、Au原子混合。60℃退火后样品中出现尺寸约200nm的花状区，晶化温度比未离子注入样品的晶化温度(100℃)低40℃。100-300℃退火后离子注入样品也更易晶化，分形区的尺寸也更大。这说明离子注入引起界面的不稳定性，使非晶Ge的晶化势垒降低有利于晶化。

4 Au/a-Ge/Au和a-Ge/Au/a-Ge膜[10]

我们还研究了Au/a-Ge/Au a-Ge/Au/a-Ge、(共蒸Ge-Au)/Au膜中的晶化，在a-Ge晶化的同时均有分形图形形成。特别值得提出的是，在Au/a-Ge Au膜100℃退火3小时后，裂缝附近的分形尺寸约为3μm 而远离裂缝处的分形尺寸仅为0 5μm(图3)。这说明应变能松弛后分形晶化中心的密度减少 使裂缝附近分形尺寸显著增大。

5 Al/a-Ge和a-Ge/Al膜[11]

在NaCl(100)面上先沉积a-Ge膜后沉积多晶Al膜，a-Ge/Al膜厚为：

Al(nm)/Ge(nm) 70/20 50/35 40/40 30/45 25/50

a-Ge/Al膜先沉积多晶Al膜后沉积a Ge膜，膜厚为：

Ge(nm)/Al(nm) 20/70 35/50 40/40

a-Ge/Al膜花状区平均尺寸L为相应的Al/a Ge膜的1/3至1 5，而面密度则为6倍以上。分维值也比Al/a-Ge膜大许多，a Ge/Al膜最低晶化温度为150℃，而Al/a-Ge膜却为200℃ 这可能是由于先蒸Al时多晶膜比较粗糙，Ge/Al界面也相应比较粗糙，易成核三叉晶界的密度也大，所以晶化温度低、分维大 两种膜的厚度比对分维都有很大影响。

6 随机逐次成核模型引起的分形晶化[1,2]

上述一系列实验事实说明，除了常规的普遍的晶化(基体区的晶化)和文献上报导的爆炸晶化(外界触发晶化后释放的能量使周围非晶态液化后结晶，由此引起的结晶范围为达mm量级，其传播速度很快，因此被称为爆炸晶化)外，还存在一种分形晶化。它的特点是：

a 在相当低的温度下在金属/非晶半导体界面处少数有利位置(如金属的三叉晶界)非晶态半导体优先成核，因此晶粒度和界面粗糙度的影响很大。

b 上一代晶核释放的能量引起局域温升使周围有利位置随机地逐次成核，引起分形的形成，因此较低温度下分形由微小半导体晶粒组成 金属、半导体厚度比的不同引起局域温升的不同分布，非晶半导体薄、金属厚时温升低而宽，反之则温升高而窄。可以认为温升较大的范围可以随机逐次成核，因此厚度比对分维值有很大影响。

c. 伴随着逐次成核发生的金属和半导体原子的横向扩散，使分形区的电镜衬度显著地和基体区不同。但这种扩散的范围限于枝叉之间的距离，和DLA模型的长程扩散是不同的。

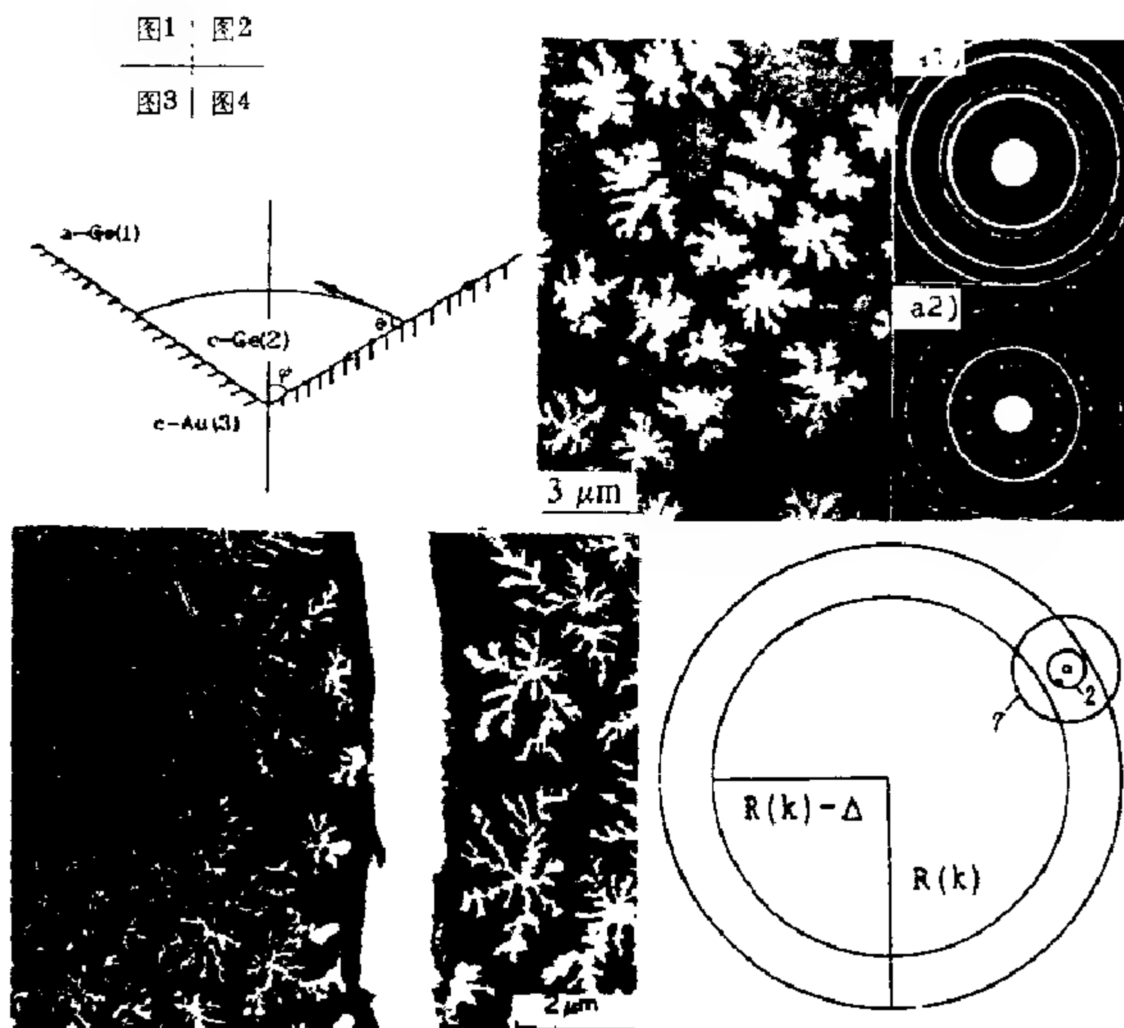
具体的随机逐次成核的模型如下(图4)

K代生长后团簇的最大半径已长大到R(K)，在R(K)-Δ到R(K)的环内可以随机地选取K代核作为触发源(图上的实心圆点)，被触发的核(图上的圆圈)位于以触发源为中心r为半径的圆内(例如限于最近邻和次近邻) 新核的形成还受以下二个条件的限制：(a)在半径为r_1(如$r_1=2$)的圆内，已有晶核应小于n，过于拥挤(n大)意味着应变能已释放完，光靠晶化能不能成核；(b)在较大的r_2(如$r_2=7$)为半径的圆内，已有晶核应小于等于N，过大的N表示相邻枝叉上成核引起的互扩散显著，从而无从成核 调整各参数后可以得到不同分维的分形。

参 考 文 献

[1] S.R.Herd, P.Chandhari, M.H.Brodsky, J. Non-Cryst. Sol., 7(1972), 309.
[2] 张人佶，褚圣麟，吴自勤，物理学报，35(1986)，365.
[3] R.J.Zhang, S.L.Chu, Z.Q.Wu, Chinese Phys. Lett., 2(1985), 221.
[4] 吴自勤，物理，21(1992)，550.
[5] J.Z.Duan, Z.Q.Wu, Solid State Comm., 64(1987), 1.

[6] J.Z.Duan, Y.Li, Z.Q.Wu, Solid State Comm., 65(1988), 7.
[7] R.J.Zhang, L.Li, Z.Q.Wu, Thin Solid Films, 208(1992), 295.
[8] J.G.Hou, Z.Q.Wu, Phys. Rev., B42(1990), 3271.
[9] J.G.Hou, Z.Q.Wu, L.S.Bi, Thin Solid Films, 173(1989),77.
[10] X.Zheng, Z.Q.Wu, Solid State Comm., 70(1989), 587; 991.
[11] B.Q.Li et al., Phys. Rev., B47(1993), in press.
[12] D.M.Wang et al., J. Appl. Phys., 71(1992), 871.



非晶态硅薄膜中分形结构的密度相关函数方法处理

林鸿溢　杨能平　武旭辉(北京理工大学电子工程系100081)
李映雪(北京大学微电子研究所100871)

摘要

利用透射电子显微镜(TEM)观测非晶态硅薄膜中形成分形结构的动态过程。在不同退火温度下，采用不同于常规的原位实时跟踪技术，获得非晶态硅薄膜的微结构形貌像。应用密度相关函数法获得了分形结构的分维值。分析结果表明，分形结构与非晶态硅薄膜的结构转变密切相关。对非晶态硅薄膜中的分形结构与晶化之间的关系进行了讨论。

一、引言

固体薄膜中形成分形结构已被许多实验所证实[1.2.3]。对微结构进行分形分析已有多种方法[4.5.6]，常常采用的方法有回转半径法，砂型(Sandbox)法和密度相关函数法等。本文采用密度相关函数法获得了非晶态硅($a\text{-}Si:H$)薄膜微结构的分维值Df，并与Sandbox方法作了比较。

非晶态半导体薄膜中，在某种条件下形成分形结构这一结论于1989 年首次提出[2]，并一再被实验所证实。本文支持了这一结论。

二、样品制备与电镜观测

利用等离子体增强化学汽相淀积(PECVD)系统制备$a\text{-}Si:H$ 薄膜样品。产生等离子体的射频发生源的频率为11MHZ，射频功率低于20W，为了对薄膜样品进行透射电子显微镜(TEM)观测实验，样品淀积在NaCl晶体新鲜的解理面上，样品厚度控制在约20nm。对样品厚度控制，要根据TEM的性能，提出具体要求。

TEM实验，在对薄膜样品作变温(从室温到900℃)处理的情况下进行。$a\text{-}Si:H$薄膜样品随着处理温度的升高发生凝聚，导致结构转变。利用录像系统对样品结构转变过程的动态作原位实时跟踪录像，得到原位动态过程的连续变化的显微图像。

二、结果分析与讨论

图1是$a\text{-}Si:H$薄膜的TEM图像，是薄膜的结构形态。图2和图3 为密度相关函数法和sandbox法的结果。

3.1 密度相关函数法

用密度相关函数方法[7]来计算非晶硅凝聚集团的分维。密度相关函数 C(r)定义为

$$C(r)=1/N\sum\rho(r_i)\rho(r_i+r) \quad (1)$$

密度函数用δ函数表示为

$$P(x)=\sum\delta(X-X_i) \quad (2)$$

其中x对应于分形结构的地置。若该分形结构的分维是D_f，其嵌入空间欧氏维数为d，则在线度为L的区域Ω(L)内，属于该分形的总的格点数目为

$$N(L)=\int_{\Omega(L)}\rho(x)d^dx=\int_{\Omega(L)}\sum\delta(X-X_i)d^dx \quad (3)$$

其中d^dx是d维几何结构的微分元。考虑分形定义有

$$N(L)\propto L^{Df} \quad (4)$$

密度平均值为

$$\langle\rho\rangle \propto N(L)/L^d \propto L^{Df-d} \quad (5)$$

考虑密度一密度相关函数的平均形式，并利用上式，有

$$C(r)=\langle\rho(x)\rho(x+r)\rangle-L^{-d}\cdot L^{Df}\cdot\rho(x+r) \quad (6)$$

式中平均符号〈　指对所有不同方向求平均，C(r)的意义是离一个粒子距离为r处发现另一个粒子的几率。把式(3)代入式(6)有

$$C(r)-L^{-d}\int d^dx\sum\delta(X-X_i)\rho(x+r)-L^{-d}\sum\rho(r+x) \quad (7)$$

对于一个均匀分形(homogeneous　fractal)，我们只要在分形上取定某点为原点，ρ(r)将只依赖于r的值。可通过下式定义ρ(r)

$$\int_{b(r)} \rho(r) d^d r = \int_0^r \rho(r) S(d) dr \propto r^{D_f} \quad (8)$$

式中b(r)和$S(d) \propto r^{d-1}$，分别是半径为r的d维空间球域及其表面积，式(8)实质上是将三重积分化为一重积分。对式(8)两边求导有

$$\rho(r) S(d) \propto r^{D_f-1}$$

即

$$\rho(r) \propto r^{D_f-1}/S(d) \propto r^{D_f-d} \quad (9)$$

因为分形总格点数为N(L)，所以对均匀分形的ρ(r)求和有

$$\sum \rho(r+x_i) \propto N(L) r^{D_f-d} \quad (10)$$

把式(10)代入式(7)得密度—密度相关函数

$$C(r) = \langle \rho(x) \rho(x+r) \rangle \propto L^{-d} N(L) r^{D_f-d} \quad (11)$$

式(3)代入式(11)有

$$C(r) \propto L^{-d} L^{D_f} r^{D_f-d} = L^{D_f-d} r^{D_f-d} \quad (12)$$

对于一确定的分行结构，L^{D_f-d}为一常数，设为K，则

$$C(r) = K r^{D_f-d} \quad (13)$$

由式(13)可知，只要统计出不同r时的c(r)，作ln c(r)~lnr的关系曲线(图2)，即可获得分形结构的分维值D_f。

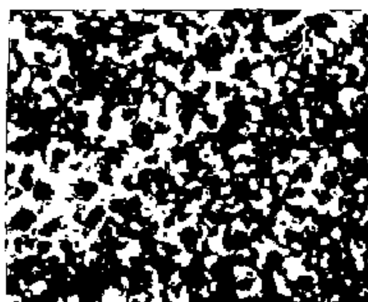


图1 a-Si:H 薄膜TEM图像

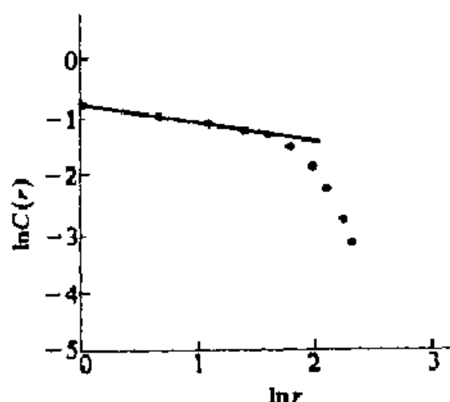


图2 密度相关函数法

密度相关函方法统计结果，结出非晶态硅分形凝聚域的分维D_f=1.69，与扩散限制凝聚(DLA)[8,9]模型的结果相近，因而非晶态硅薄膜的形成可以认为是由扩散限制凝聚过程决定的。

3.2 Sandbox方法

采用Sandbox方法[4]对a-Si:H薄膜的TEM图像进行统计分析。对显微图像(图1)的不同衬度(黑、灰和白)区域，在不同方形点阵尺度(L)下，统计出不为零的格点数(N)，然后分别取对数，则相应灰度区域的分维值由下式决定

$$D_f = \ln N / \ln L \quad (14)$$

从图3 Sandbox关系曲线得到不同灰度区域的分维分别为：

黑色衬度区域 D_f=1.20±0.01，
灰色衬度区域 D_f=1.61±0.01；
白色衬度区域: D_f=1.87±0.02·

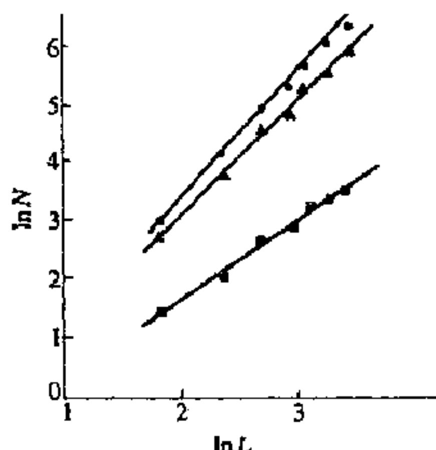


图3 Sandbox关系曲线
●—白色衬度域；▲—灰色衬度域；■—黑色衬度域

可以看到黑色区域所占比例很小，由于薄膜所处的温度为450℃，a-Si:H薄膜开始局域晶化，可以看出是一种典形的分形凝聚现象，晶化域的分散特点决定了其有较小的分维值。在此温度下非晶态区域(灰域)和富含氢区域(白域)仍然占绝大部分，所以薄膜处于非晶态。应特别指出，这是很典型的两相结构，即非晶态相和富

含氢相。这与knightst[10]的结果相一致。由于H原子的质量小于Si原子，所以H原子在薄膜中的迁移能力远大于Si原子，这就易于理解显微图像中白区域占据相当大的具有奇异形态的区域，主要出现在黑区域周围。因此，富含氢区域的分维大于非晶态区域达到D_f=1.87，而非晶态区域D_f=1.61，这与密度相关函数法得到的结果相近。表明两种不同方法对非晶态的形成有相近的结论，即非晶态薄膜的形成取决于扩散限制凝聚机制。

四、结论

TEM观测实验结果和分形分析表明，在动态实验中，当升温至450℃时，薄膜中出现瞬时局域晶化，形成分形凝聚区域，为孤立岛状结构，其周围仍为非晶态硅。其中富氢域具有分叉状分形结构；非晶态硅域也具有分叉状分形结构，枝叉粗大，相互联接，形成一个具有自相似性的分形系统。非晶态硅域与富氢非晶态硅域共同组成连续无规网络，是一个封闭系统。正是富氢区域的存在才使得a-Si:H薄膜的导电率受到大的限制，这是由于Si:-H键组态在电子输运过程中起阻挡作用所致。

我们注意到，实验结果与DLA模型存在一定差异，其原因是DLA模型是粒子在扩散场中无规行走并粘附而形成生长集团，粒子的粘附几率p=1，不存在外界干扰，是一种理想的情况。而非晶态硅薄膜的实际退火过程，存在热处理温度、电磁场、电子和众多Si和H以及它们的集团等复杂的情况。其中H离子具有比Si离子大得多的迁移能力，在晶化过程中容易深入到凝聚集团的深部，因而形成有别于DLA模型的分形集团。

参考文献

[1] 汪子丹，龚昌德，物理学进展，10(1)，1(1990)

[2] 林鸿溢，半导体学报，11(6) 430(1990)

[3] Lin H.Y et al，Thin Film Phys and Appl，Vol1519，210(1991)

[4] 林鸿溢，李映学等，电子学报，19(6)，91(1991)

[5] Lin H.，Thin Films Beam Solid Interactions，Elsevier Science，North-Holland，p 1997 (1991)

[6] Lin H.Y，Li Y.X et al，proc of Photovoltaic Sci and Enginconf，kyoto，Japan，p.801(1990)

[7] 侯建国，吴自勤，物理学报，37(10)，1735(1988)

[8] Witten T.A et al，Phys，Rev B，27，5686(1983)

[9] Meakin P，phys Rev A，27，1495(1983)

[10] knights c，J Non-cryst. solid，35/36，159(1980)

a-Si/Al 复合膜的晶化分形

蔡 伟 万德锐

四川大学材料科学系，成都 610064

摘 要 a-Si/Al 复合膜加热退火处理时，非晶态硅在金属铝诱导下，在较低温度发生晶化转变。研究了硅晶化时出现的典型的分形聚集形态及成因。衍射表明晶态硅具有一种亚稳的六方新结构。

关于 a-Ge/金属双层膜加热退火时，在薄膜中生长出枝叉状晶态聚集岛的研究报导已有不少[1-3]，这种现象利用分形的概念可获得较满意的解释。我们在研究非晶硅与金属铝接触，在较低温度下被诱导晶化的现象时，也发现有类似的枝叉状晶态聚集物生成[4]。本文研究了 a-Si/Al 加热晶化过程中分形组织的产生、形态，以及晶体结构。

1. **实验方法**

在 1×10^{-5}Torr 真空下，在 NaCl 新鲜解理面上蒸积 a-Si/Al 双层膜。采用双蒸发源的真空镀膜机，在不中断真空状态的情况下，蒸镀铝后接续蒸镀硅，膜厚控制在 400 Å /400 Å 左右。

加热退火是在纯氩气流保护下进行，退火温度为 350℃、400℃、500℃。当管式炉恒温区已平衡在预选退火温度时，将试样推入恒温退火区；退火毕，移出恒温区。使用 JEM-100CX 型透射电子显微镜对退火前后试样进行了组织形态观察及结构衍射分析。

作为对比，作了混蒸试样的加热退火及形貌观察。混蒸是指把铝及硅混在同一蒸发坩埚同时蒸镀，其余条件同前。

2. **分形组织**

退火前试样是由均匀细小晶粒的铝膜和无定形的硅膜组成。这可由电子显微镜的明场照片及衍射花样证实。衍射花样为典型的面心立方结构多晶铝同心衍射环族，及二条模糊的非晶硅晕环。

于 350℃、400℃、500℃下退火的试样，电子显微镜明场像观察发现，满视场普遍发现发育良好的枝状聚集团（暗区）。这种聚集物一般有数微米大小。对单个聚集物进行高倍放大观察（见图一），它们都带有分形的特征。计算了其分维数，分别为 1.73，1.78，1.83。这些聚集分形与著名的受限扩散凝聚模型（Diffusion-Limited Aggregation）给出的图型很相似，但分维值稍高一点。

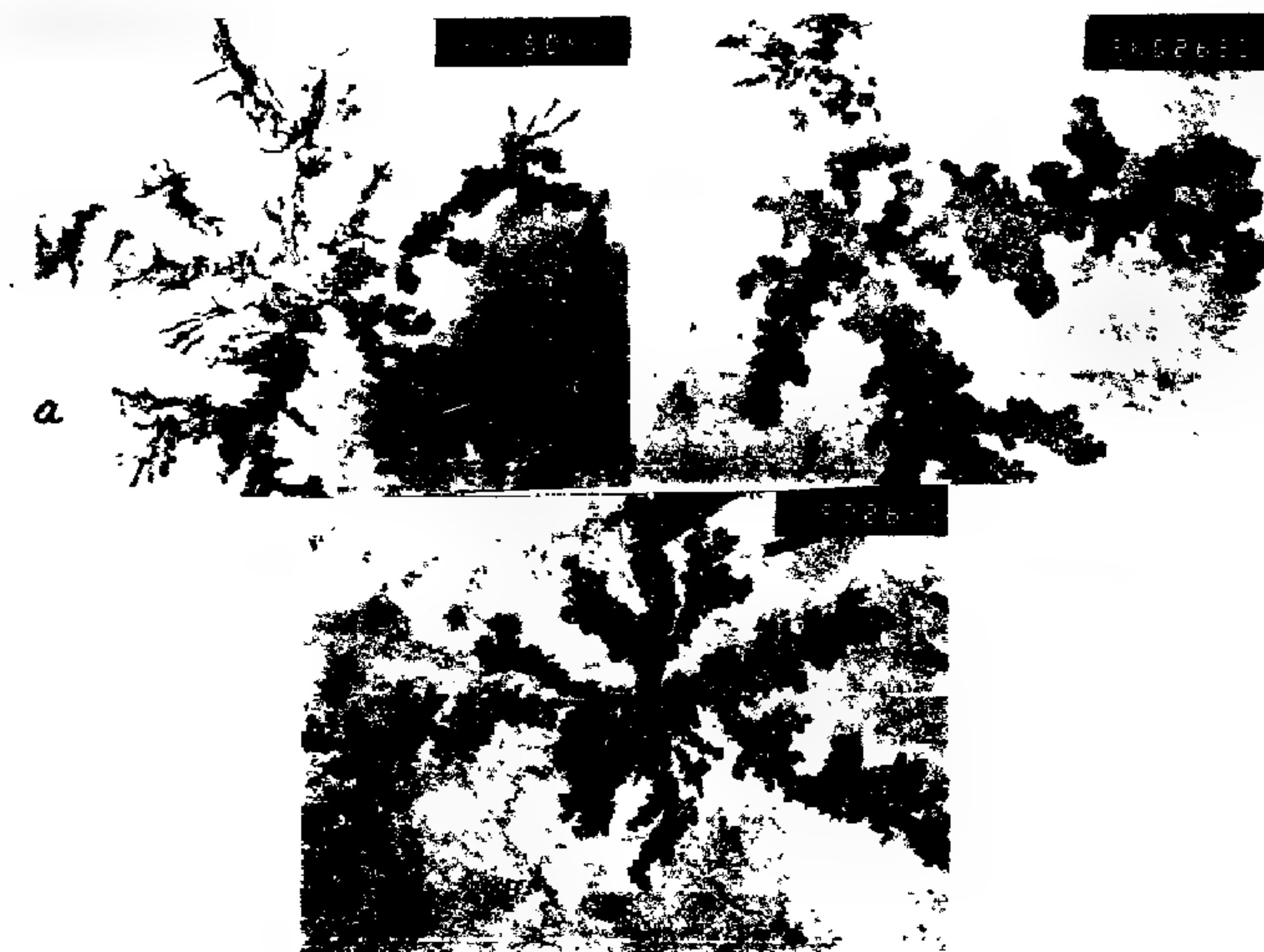


图 -、a)，b)，c)，高于350℃加热退火后，非晶硅膜的分形聚集块（暗区），分维为1.73，1.78，1.83。

我们设想，加热退火时，双层膜中硅原子和铝原子的扩散和互扩散均加强。在高于350℃时，在铝膜层中的硅原子受金属铝的诱导而产生晶化核。这晶核的长大要靠非晶硅膜层的硅原子扩散进多晶铝膜来供给，因而硅晶体形成类似于DLA模型的形态。与此同时，在非晶硅膜层中，由于远低于正常晶化温度（700℃），并无晶核产生，不出现就地晶化调整的现象。

对于混蒸试样，加热退火也发生晶化聚集，形成大小不等的马铃薯状团块，但没有出现分形。这是因为膜层中硅原子与铝微晶大量混杂，晶化核的周围已有大量硅原子可近距扩散调整供长大之需，受限扩散的分形凝聚特征消失。

3. 衍射分析

对图 -的亮区（非分形区）的衍射表明，为断续的铝多晶衍射环，既没有退火前的晕环非晶物质衍射标志，也没有发现硅晶体的衍射。这表明硅原子已经扩散离开亮区。此外，断续环表明，铝晶粒退火时晶粒长大。

对分形区的选区衍射表明，分形区除残留有少量多晶铝之外，新的位置上出现了很强的衍射斑点花样。说明每个分形团实际上是由一些大晶粒组成。硅与铝之间并无化合物生成，这些晶粒当属硅晶体。图二是一个大硅晶体的选区衍射图，衍射斑点呈现标准的六角对称分布。对此晶粒作了旋转，大角度倾斜等操作，所观察到的衍射花样都是类似的六角对称型分布。其它地区的硅晶体的衍射也是如此。这说明这种硅晶体具有二维的六角对称的平面结构，且具有平行于膜面的择优取向。由于这些晶体具有很薄的片状，拉长的倒易杆衍射轮廓，使得试样大角度倾侧下也能产生六角对称的衍射花样。经过测算，六方晶格常数 a＝3.31Å，比正常单晶硅的强衍射晶面（111）的面间距 3.138Å 略大。初步判断是硅的一种六方结构的亚稳相。



参考文献

（1） 侯建国，吴自勤，物理学报 V37（1988）1735。

（2） Hou Jian-guo and Wu Zi-qin, Physical Review, B 40 (1989) 1008。

（3） Duan Jian-zhong, Li Yan and Wu Zi-qin, Solid Stat., Commu., 65 (1988) 6.

（4） Wei Cai and Derui Wan, Thin Solid Films, V219 (1992) 1.

（5） T. A. Witten and L. M. Sander, Phys. Rev. Let., 47 (1981) 1409

薄膜淀积初期的分形研究*

王兵　　吴自勤
中国科技大学基础物理中心，合肥，230026

一、引言

薄膜的形过程对于薄膜和多层膜结构（如界面粗糙度）有显著影响[1]。采用电子显微镜观察成膜过程，辅之以计算机模拟，将有利于对薄膜形成过程的理解。很多实验的和计算机模拟的结果[2-4]均显示薄膜的形成过程具有分形的性质。

本文中我们模拟了在二维面上的成膜过程，探讨原子在二维面上两种不同的堆积方式下的逾渗过程和分形性质。尽管薄膜方面的分形研究已有所开展[4,5]，但他们的工作是在维或纯二维面上进行的，和实际的成模过程还有较大差距。我们的模型引入了沙堆模型，是准三维的模型，原子可以重迭于原子之上，并且可以扩散。结果显示，当粒子数达到一定覆盖度时具有分形性质，当成膜过程中粒子存在扩散时更容易形成较大的团簇。

二、模型及结果

在200×200的正方形格子中，随机地一个一个地填入单个粒子（原子），当第二个粒子出现在已被占据的格子上时，该粒子有两种可能的堆积方式：1 如果该粒子与近邻格子中的粒子间的高度差大于1，则该粒子将总是等几率落入这些近邻的格子中，若其在新位置上与其新的近邻格子中粒子间的高度差仍大于1，则继续滑落直至高度差等于1为止，否则它将重迭于先占据的粒子之上。2 该粒子无论其与近邻格子中粒子高度差多大，它总是重迭于先占据的粒子之上而不滑落。粒子达到衬底后还可以扩散若干步，我们分别计算了粒子不扩散和最多扩散10步（若粒子扩散到已存在粒子的最近邻处扩散即停止）两种情况下分别按上述两种堆积方式的成膜过程。

图1 中我们给出了总粒子数较少时上述堆积方式下在基底面上的粒子分布。无扩散（图1a和1b）时两种堆积方式的粒子分布是相似的，能滑落时（图1a）平均团簇略大于不滑落时平均团簇，有扩散（图1c和1d分别为能滑落和不滑落）时的粒子分布和平均团簇大小几乎完全相似。可以看出粒子有扩散时的平均团簇比无扩散时的平均团簇大，团簇的数目则相应减少。总粒子数较少时lnN-lnL的线性关系很差，表明沉积粒子数较少时在基底面上的分布不具有分形特征（这里N是盒计数法中有粒子占据的边长为L的正方形的个数）。随总粒子数的增多，lnN-lnL 的线性关系逐渐变好，平均地，当总粒子数增大到10000个粒子（覆盖度为的0.25）时，线性相关系数已达0.99，可以认为此时粒子在基底上的分布已具有分形的性质，此时维数D_f约为1.71±0.02。图2a、2b中分别给出了两种堆积方式下基底表面上的粒子数和维数随总粒子增多的变化关系。当粒子无扩散且不滑落时基底上的粒子数和维数变化最慢（图2a和2b中的曲线1），粒子既扩散又滑落时基底上的粒子数和维数变化最快（图2a和2b中的曲线3），粒子能扩散不能滑落时的曲线比曲线3低得很少，未表现在图中，图2a和2b中的曲线2为粒子只有滑落而不扩散时的情况，其变化界于曲线1和3之间。上述各种情况中，当粒子在基底上的覆盖度达到0.60时得到无穷大集团，这与文献[6]中正方形格子的座逾渗阈值0.59基本一致的，误差来源于模拟中总粒子数每增加1000个粒子才统计一次。当达到逾渗时的维数约为

---

*由国家教委博士点专项基金资助

1.10±0.02，与没有扩散时相比，扩散的影响比粒子滑落的影响大，这是显然的。因为第二层或更高层上的粒子在扩散10步的过程中更容易找到底层上的空位置。

以上模拟的结果显示，总粒子数为10000时薄膜中具有分形性质，此时薄膜成孤立的岛状，这与实验结果一致[9]。随着总粒子数的增多，岛状结构逐渐连接起来，最后形成连续的膜。在成膜过程中，粒子的扩散（或滑落）对岛状结构的大小有较大影响。对于易于晶化的材料成膜时，原子在基底表面更容易有序排列，结合力比较强，滑落与扩散较难；非晶材料的原子间排列比较松散，滑落和扩散较易。因此，可以认为非晶材料比易晶化的材料更容易形成连续的膜。

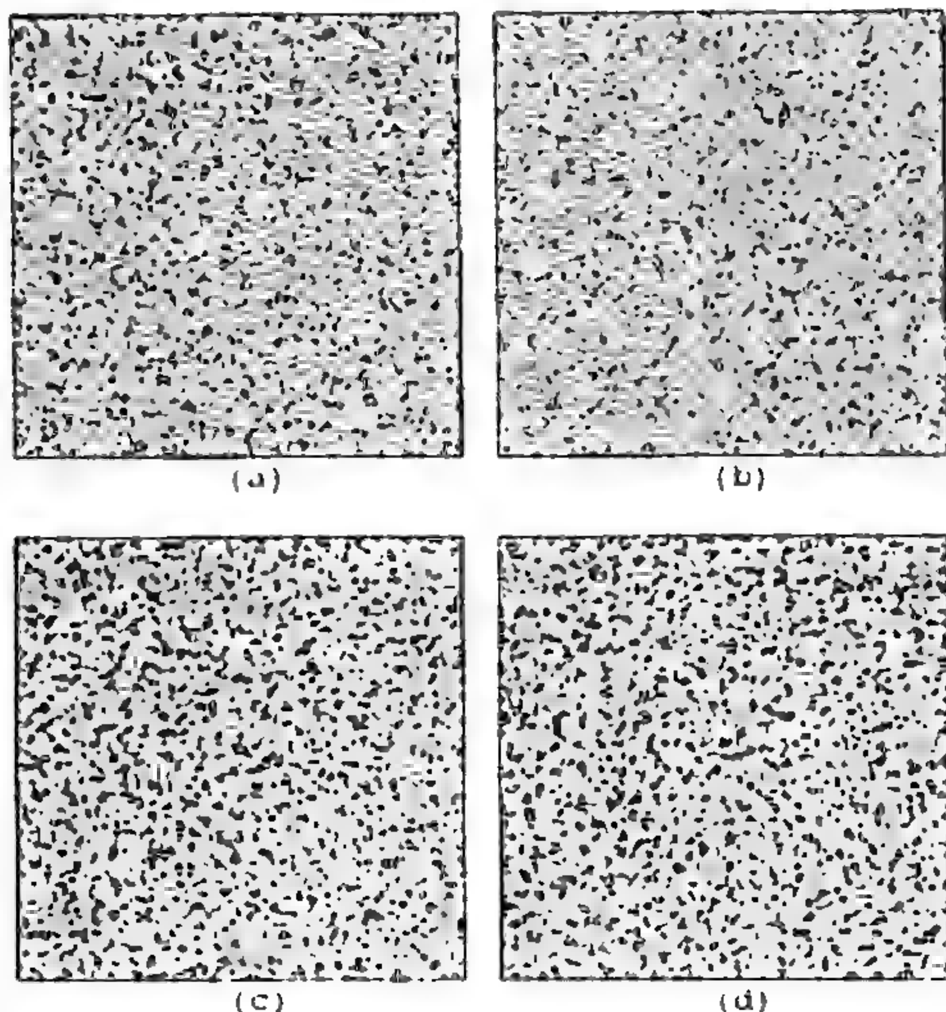


图1 总粒子数为10000时两种堆积方式在基底上的粒子分布

(a) 粒子无扩散能滑落（基底面上粒子数为9993）

(b) 粒子无扩散不滑落（基底面上粒子数为6056）

(c) 粒子最多扩散10步并能滑落（基底面上粒子数为9999）

(d) 粒子最多扩散10步不滑落（基底面上粒子数为9900）

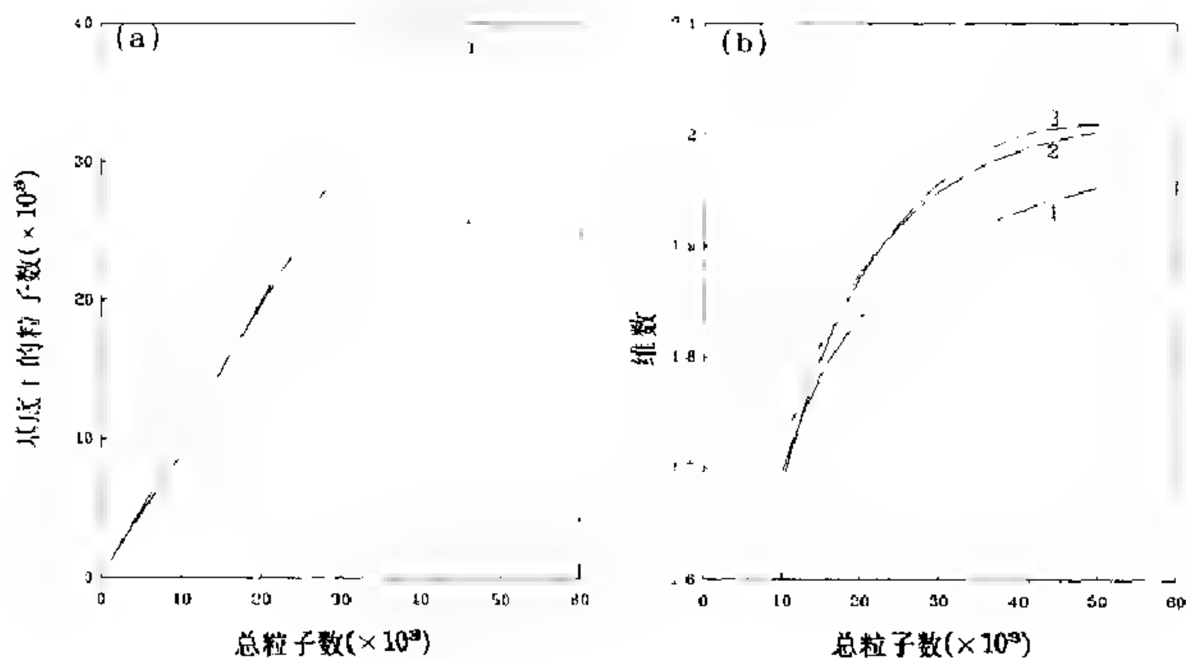


图2 总粒子数增多时基底上的粒子数(a)和维数(b)

参考文献

1. L.S. Xiu et al., Solid State Commun. 83, 1(1992).
2. A.Kapiruluik and G.Dentscher, Phys. Rev. Lett. 49,144(1982).
3. R.F.Voss et al., Phys. Rev. Lett.49, 1441(1982).
4. M.Nakamuza, Phys. Rev. A34, 3356(1986).
5. M.Nakamuza, Phys. Rev. B40, 3358(1989).
6. T.Lookman and K.D.Bell, Phys. Rev. B42, 5721(1992).
7. B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature(Freeman, San Francisco,1983).
8. Richard Zallen,"The Physics of Amorphous Solids",John Wiley & Sons,1983,p168.
9. 《薄膜》，金原粲等著，电子工业出版社，1988年，p45.

逾渗阈值附近Pd薄膜电阻率特性研究

王晓平　王兵*　赵特秀　吴自勤*
中国科学技术大学物理系
*中国科学技术大学基础物理中心
合肥　230026

一、引言

金属薄膜的电学特性研究是人们感兴趣的课题之一，大多数的研究集中在薄膜厚度对电阻率的影响方面。最著名的理论有考虑薄膜尺寸效应对电阻率影响的FS理论和考虑晶界散射的Mayadas理论。但它们主要适用于较厚的和连续的薄膜。对处于逾渗阈值附近的薄膜则无法适用。因为此时的薄膜输运特性表现出不同于经典理论描述的反常输运特征。对于这样的薄膜必须用逾渗理论进行研究。

Pd金属是广泛用于VLSI中作为互连线和肖特基结的材料，对它的研究主要是硅化物和薄膜电阻率方面。超高真空技术的发展和原位测量技术的引入，使我们对处于逾渗阈值附近的金属薄膜的电阻率研究成为可能。本文中我们采用这种方法对Pd薄膜的电阻率和它在衬底上的覆盖度进行了研究，结果表明薄膜电阻率可分为三个区域，分别对应于小于、等于或大于阈值和基本完全覆盖等过程。同时也说明随着薄膜变厚，薄膜维数也逐渐由二维变成三维。

二、实验

Pd膜在超高真空溅射装置中采用直流溅射淀积。本底真空优于4×10^{-6}Pa，溅射速率为1.2 nm/min。电阻率采用四引线法进行原位测量。

在NaCl上淀积一系列不同厚度的薄膜，然后利用透射电镜(TEM)观察薄膜的覆盖度。

三、结果及讨论

用于TEM观察的Pd薄膜的厚度分别为0.9、1.4、2.8、5.6和11.2nm。从电子衍射的结果来看：随薄膜厚度的增大，衍射环逐渐增强变锐。从电镜的形貌来看：当薄膜厚度小于1.4 nm时，Pd是分立的小岛，并随膜的变厚岛之间的间隙逐渐变小并在2.8nm时相互联接起来。

原位测量的Pd薄膜的电阻率结果见图1。从中可见：电阻率的变化有三个区域，在小于1.0 nm时电阻率无穷大，表明薄膜尚未导通；当薄膜厚度处于1.0—2.0nm之间时，电阻率急剧下降，表明此时薄膜处于逾渗阈值附近；当薄膜厚度大于2.0nm时，电阻率下降变缓，特别是厚于5.0nm时变的更加缓慢。由TEM的结果可见在第二区中Pd膜尚未连续，很象逾渗集团。同时TEM也给出了薄膜在衬底上的覆盖度，如膜厚为1.4nm时覆盖度约为0.6(图1)。由此可将电阻率和覆盖度联系起来利用逾渗模型进行讨论。

逾渗模型中得到无穷大团簇的概率阈值P_c是0.59(正方点阵)。本工作中的覆盖度实际上和占位概率是一致的，因此根据逾渗集团的导电理论可得到：

$$\rho \propto (P-P_c)^{-\mu} \qquad (1)$$

其中ρ是薄膜的电阻率，μ是临界电导指数，对于二维系统它等于1.2，P是薄膜在衬底上的覆盖度，P_c是覆盖度的逾渗阈值。

从(1)式中我们可以求出电导指数，由图2可见电导指数也可分为几个区域：当P小于0.65时μ为1.2。由此可见在覆盖度刚超过逾渗阈值时薄膜是具有二维特征的；当覆盖度很大即衬底被基本覆盖满时薄膜将表现出三维特征，表现为电阻率基本上垂直下降(图2)。

利用爱因斯坦的电导率σ和扩散系数D之间的关系式：

$$\sigma = e^2 nD/kT \propto nD \quad (2)$$

其中n是载流子浓度。我们来讨论逾渗集团的电学输运和粒子无规行走之间的关系，可以用均方位移参量R(t)来描述无规行走，其表达式为，

$$R(t)^2 = D(P) \cdot t \quad (3)$$

其中t是粒子的无规行走时间，D(P)是粒子扩散系数，它不是常数而是依赖于P值。根据逾渗理论：当P为1，即衬底被完全覆盖时，扩散过程是正常的；而当P值减小后，逾渗集团中的空洞及分支岔道将导致扩散逐渐变的反常；当P值小于逾渗阈值时，载流子运动完全局域化反映为电阻率无穷大。

随薄膜厚度的增加，薄膜的维数逐渐从二维变到三维。从TEM中可见随薄膜厚度的增加晶粒尺寸也跟着增大，在覆盖度小于0.90时平均膜厚不到3.0nm，此时晶粒尺寸大于薄膜厚度。我们认为当晶粒尺寸大于薄膜厚度时薄膜只能单层排列在衬底上，此时无规行走基本上处于二维状态，即薄膜具有二维电导特征；覆盖度大于0.90以后，薄膜厚度大于晶粒尺寸，晶粒可以在垂直于衬底的方向上不断堆积从而形成二维到三维的过渡；薄膜进一步增厚将变为三维体系，此时无规行走不再局限平行于表面而是也可以在垂直表面方向行走，此时逾渗模型不再适用，但是利用逾渗模型可以圆满地解释逾渗阈值附近薄膜的电学输运特性，即导通后电阻率急速下降。

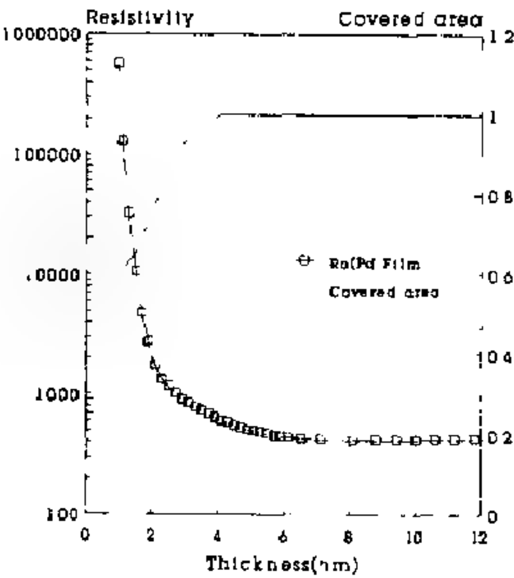


图1 逾渗阈值附近Pd薄膜电阻率及薄膜覆盖度和膜厚的关系

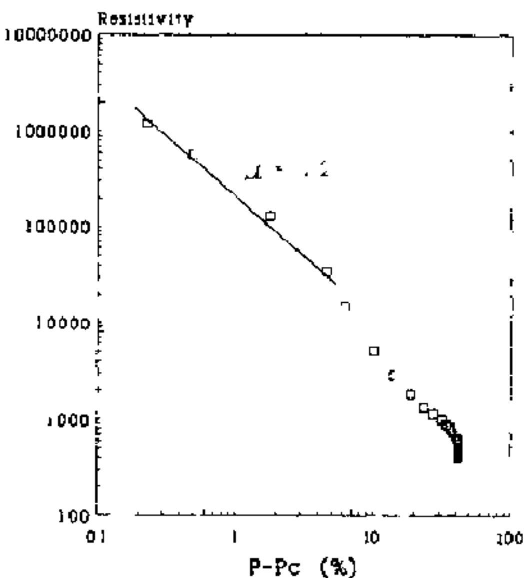


图2 逾渗阈值附近Pd薄膜临界电导指数

Pd/a-Ge双层膜中金属诱导晶化引起的分形

陈志文 李凡庆 张庶元 陆斌 谭舜 *吴自勤

（中国科技大学结构分析开放研究实验室 合肥 230026）
（*中国科技大学基础物理中心 合肥 230026）

一、引　言

目前，分形的研究已成为国内外普遍关注的问题[1-3]。对于金属/半导体二元薄膜体系，在金属诱导非晶半导体晶化的过程中，也常常出现雪花状的分形结构。见诸文献的有关报道，多为没有化合物产生的金属、半导体共晶系统，例如Au/a-Ge(Si)、Ag/a-Ge(Si)和Al/a-Ge(Si)[4-6]等等。对于有反应物生成的金属/半导体薄膜体系，这种研究报道很少。段建中等曾在Pd/a-Si中发现了分形[7]，分形出现的同时有多种硅化物产生。吴学华等对Pd/a-Ge体系进行了研究，发现在350℃热处理条件下出现了分形，同时伴有Pd、Ge化合物生成[8]。对于分形形成的机制，已建立了若干模型，其中扩散限制聚集(DLA)模型是很成功的，但DLA模型难以解释金属/半导体二元薄膜体系中分形的成因。侯建国、吴自勤教授根据薄膜体系中分形晶化的微观结构观测，提出了由温度场控制的随机逐次成核(RSN)模型，在解释薄膜的分形晶化时十分令人满意。为了进一步探讨金属/半导体二元薄膜体系中分形形成的机制，特别是对有多种化合物生成的体系，我们对各种不同膜厚比和退火温度条件下的Pd/a-Ge进行了观测分析，获得了较全面的实验结果。根据实验结果，对分形的形成及其特征进行了较详尽的讨论

二、实 验 方 法

将纯Pd、Ge经清洗处理后蒸积在新解理的NaCl(100)面上，蒸积时真空度优于2×10^{-5} Torr，膜厚由点蒸发源公式$m=4\pi r^2 h\rho$和称得质量及调节蒸积距离给出，蒸积次序为先蒸Ge后蒸Pd记为Pd/a-Ge，两次蒸镀在同一真空度下进行。所得试样如表一所示。

表一：Pd/a-Ge双层膜样品的膜厚比及原子百分比

试样号	1#	2#	3#	4#	5#
Pd/a-Ge (nm)	15/65	20/60	30/50	40/40	45/30
Ge(at%)	74	66	52	39	30

制好的膜置于真空退火炉中退火，退火温度分别为：250℃、300℃、350℃、400℃、450℃、500℃，退火时间均为30分钟，550℃退火时间为15分钟。加热前真空度优于2×10^{-5} Torr，自然冷却后取出。将样品浸入蒸馏水中，待膜自然漂上后用铜网捞起。

试样的观测在日立公司的H－800型透射电镜(TEM)上进行。TEM显微照片和选区电子衍射花样(SAED)提供了该体系分形晶化及其形貌特征的各种证据。

三、实验结果和分析

1.分形形成的TEM观测

实验观测表明：在各种退火温度下，1#和5#样品都没有出现分形结构。室温下，1#样品中已有Pd_2Ge生成，随着温度的升高，又有PdGe化合物产生，直到300℃，试样中的a-Ge才开始晶化，并逐渐形成大小不一的岛状结构。5#样品在室温下已发现有大量Ge晶粒，并同时探测到Pd、Pd_2Ge和PdGe晶粒的存在(图1.)。随着退火温度的升高，尽管各物相的晶粒都有所长大，但比例大致不变。这些物相能共存于试样中而不发生明显反应，可能是体系中形成了Pd、Pd_2Ge、PdGe和Ge四层薄膜，使易反应的Pd_2Ge和Ge、PdGe和Pd相互隔断的结果

2#样品在300℃以下的低温退火时未发现有分形产生，但在350℃、400℃和450℃温度下，发现了一些衬度为白色的花状结构，即所谓分形(图2.图3.图4.)。SAED表明，分形区基本上是Ge晶粒，非分形区则由Ge、Pd_2Ge和PdGe等晶粒组成。可以看到，不同退火温度下出现的分形结构，其密度大小和枝叉状都表现出明显的差异。350℃样品，主要由白色分形区和灰色衬度区组成，而400℃和450℃退火的样品，出现了许多孤立的白色小岛，分形区枝叉比350℃时显著变粗。450℃时，分形尺度大小不一。对于500℃以上温度的样品，多枝叉的分形形态已经完全消失。

3#样品只在300℃时出现了分形(图5.)。由图可见，花形尺度较小，枝叉也比较粗糙。

4#样品在400℃时产生了分形(图6.)，其形貌特征与3#样品中的分形十分相近。450℃时，分形消失，但在550℃退火15分钟，试样中又发现有分形形成(图7.)，其分形密度较高，花形尺度也大，枝叉也很清晰。这些分形花样似乎相互连结成网，难以区分出独立的分形结构，象是许多小分形不断长大连成一片。

2.分形的维数、密度和尺度

为了计算分形的维数，采用计算机对TEM显微图象进行数值化处理，确定一个灰度判定标准来区别TEM照片上的分形区和基体区。设分形区的密度为1，基体区的密度为0，然后在原始TEM显微图象中提取分形结构，再按面积—回转半径法编制程序计算分形维数。计算过程是，对照片中每一孤立分形结构，取一系列回转半径Rg，计算其中所占象元个数N，得到一组(R_g,N)。对于分形结构应具有如下标度性质$N \sim Rg^{d_f}$，其中d_f为分形维数，用LnN对LnL作图，斜率即为d_f。

分形密度是指单位面积上的分形个数，它反映了体系中a-Ge初始晶化成核导致分形产生的几率。

通过计算不同样品中分形的分维数、密度和尺度如表二所示。

图给出了2#样品350℃退火后所得分形结构的TEM显微图象计算机处理结果和分维计算结果

四、讨 论

对于Pd/a-Ge薄膜中分形的形成，吴学华曾根据其实验结果350℃时出现分形，按照随机逐次成核的模型进行了解释[8]：由于初始的急速升温使第一生成相Pd_2Ge来不及反应，非晶Ge便在晶界等有利位置成核长大，长大过程中释放了潜热，形成了局域温度场，促使周围的Ge原子扩散进来，Ge晶粒的进一步长大将释放更多的热量。由于热场的传播快于原子的输运，

从而触发其它有利位置上的非晶Ge晶化，该过程的不断链式反应便造成形貌上的分形结构。这种解释给出了分形形成的总体图象，也同样适用于我们的实验结果，因为本工作中，不同膜厚比的Pd/a-Ge薄膜，分形出现也都是在温度高于300℃时发生的。

然而，实验证据还表明，对于不同膜厚比和退火温度，Pd/a-Ge 薄膜体系中分形的形成与否，分形的形态、密度、尺寸以及分维数等都表现出明显的差异，对这些现象的分析探讨，有助于进一步了解分形形成的物理机制。

表二：Pd/a-Ge双层膜中分形的维数、密度和尺度

试样号	Pd/a-Ge膜厚比(nm)	退火温度	分形维数	分形密度(个/μm²)	分形尺寸(μm)
2#	20/60	350℃	1.78	1.12	1.0
		400℃	1.84	2.92	0.8
		450℃	1.92	0.46	0.8
3#	30/50	300℃	1.83	5.10	0.35
4#	40/40	400℃	1.88	0.20	0.8
		550℃	1.85	0.34	2.2

其中：550℃退火15min.

1.膜厚比对分形形成的影响

在我们的实验中，1#和5#样品在各种退火温度条件下都没有出现分形，说明分形的形成与Pd组分的多少有关。进一步的分析表明，Pd诱导非晶Ge晶化的能力起了至关重要的作用。1#样品的Pd组分过少，室温下已有大量Pd_2Ge生成，说明Pd几乎消耗贻尽，使金属诱导非晶Ge晶化的能力大大减弱，直到300℃时非晶Ge才开始晶化。由于Pd的耗尽，热扬传播减缓，晶化的主要过程是Ge原子的短程扩散，随机触发成核的几率大大降低，不利于分形的形成。5#样品Pd组分较大，诱导Ge晶化的能力很强，室温下Ge已晶化，并伴有大量Pd_2Ge生成，SAED中见不到非晶Ge的弥散环。由于非晶Ge已不复存在，无论在什么退火条件下，都不可能发生非晶Ge的分形晶化。

从表二中可以看出，就相同退火温度而言，随着Pd含量的增加，分形维数略有增大。究其原因，仍与金属诱导晶化的能力密切相关。Pd组分的增多，诱导Ge晶化的能力增强，形成的Ge晶粒较大，使分形的枝叉变粗。

分形密度和尺寸没有随Pd含量的变化而表现出明显的规律性，这可能是各种因素相互竞争的结果。一方面Pd组分的增加会提供更多的形核位置，有利于分形密度的增大，尺寸缩小；但另一方面蒸镀速率的变化和界面条件又会对形核位置的增减产生影响。如果控制界面条件，Pd组分的变化对分形密度和尺寸的影响有可能表现出特有的规律。

2.退火温度对分形形成的影响

退火温度是决定Pd/a-Ge薄膜体系分形能否形成以及分形形态的又一重要因素。实验结果表明，当退火温度小于300℃时，无论Pd、Ge的膜厚比如何，体系中都没有发生分形晶化。而在无化合物生成的金属/半导体共晶系统，如Al/Ge、Au/Ge等等，发生分形晶化的温度要比Pd/a-Ge薄膜体系显著降低，其重要原因之一在于Pd/a-Ge膜是有化合物生成的二元体系。由于Pd、Ge易于发生固态反应，低温退火时，成核生长主要是Pd、Ge反应形成Pd_2Ge的过程。当Pd耗尽后，Pd_2Ge还将与多余的Ge继续反应生成PdGe。这两个固态反应过程限制了金属诱导非晶Ge的分形晶化。

从表二中可以看出，对同一膜厚比2#样品的Pd/a-Ge系统，随着温度的升高，分维数单调增大，表现出明显的规律性，其原因在于温度的升高，非晶Ge原子处于较高的热激活状态，易于触发成核和晶粒长大的迅速，形成含有较大Ge晶粒的分形缩聚区，从而分维数增大。此外分形密度增大后再减小，是由于温度升高会引起非晶Ge晶化成核的几率增大，导致更多的分形中心，但是Pd、Ge化合物的形成不利于非晶Ge的晶化出现分形。当温度超过400℃时，分形的密度下降也可能与其有关。

参考文献

[1]W.T.Elam,S.A.Wolf,J.Spraue,D.U.Gubser,D.Van Vechten,G.L.Barz,P. Markin, Phys. Rev.Lett.,54(1985),701.
[2]S.R.Forrest,T.A.Witten,J.Phys.A,12(1979),L109.
[3]B.B.Mandelbrot,The Fractal Geometry of Nature,Freemen,New York,(1983).
[4]J.C.Hou,Z.Q.Wu,L.S.Bi,Thin Solid Films,173(1989),77.
[5]R.J.Zhang,L.Li,Z.Q.Wu,Thin Solid Films,208(1992),295.
[6]B.Q.Li,B.Zheng,S.Y.Zhang,Z.Q.Wu,Phys.Rev.B,47(1993).
[7]J.Z.Duan,Y.Li,Z.Q.Wu,Sol.Stat.Comm.,65(1988),7.
[8]X.H.Wu,S.Y.Zhang,Z.Q.Wu,Proceedings of 5th Asia-Pacific Electron Microscopy Conference,(1992),422.



图1:5#样品室温形貌及衍射

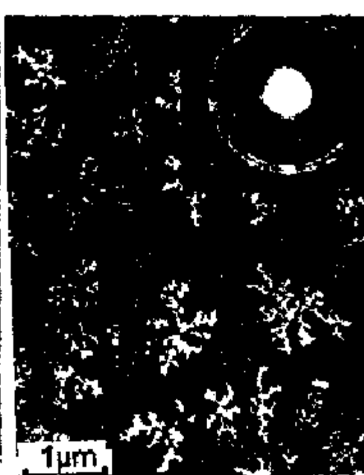


图2:2#样品350℃形貌及衍射

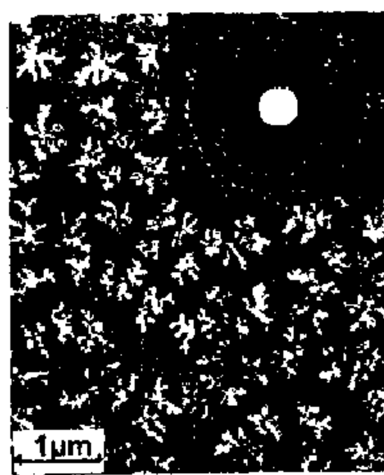


图3:2#样品400℃形貌及衍射

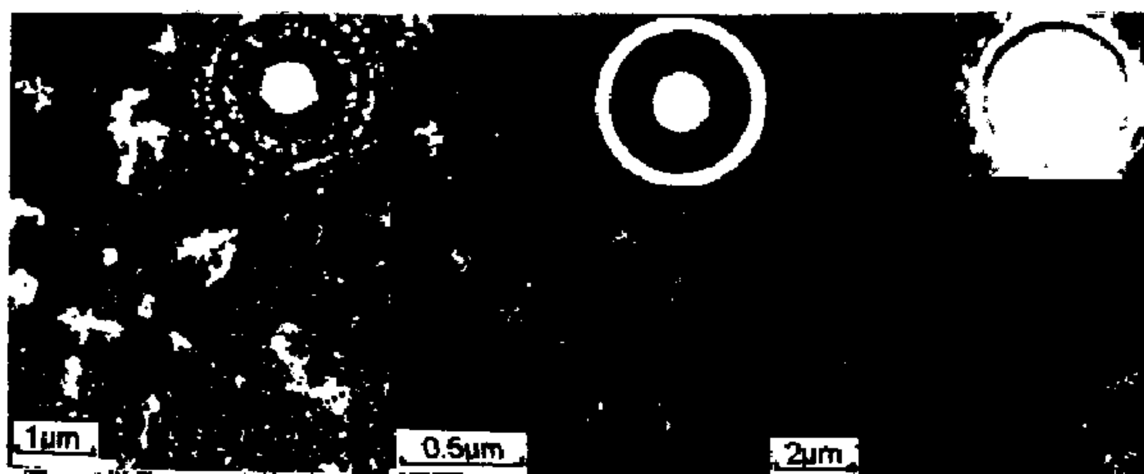
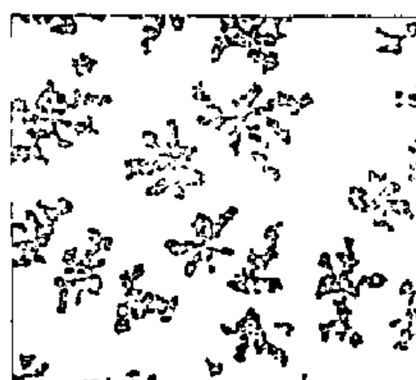


图4·2#样品450℃形貌及衍射　图5.3#样品300℃形貌及衍射　图6·4#样品400℃形貌及衍射



图7·4#样品550形貌及衍射图



8(a).2#样品350℃退火时分维的计算机计算结果

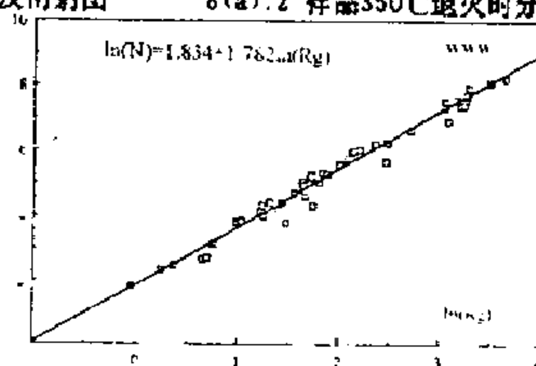


图8(b) 2#样品350℃退火时TEM显微图象计算机处理结果

材料中的多度域分形

龙期威

中国科学院金属研究所和中国科学院国际材料物理中心沈阳，110015

Ⅰ. 引言

分形几何[1]已在许多学科领域中得到了广泛的应用 作为探索物质存在的基本形式和基本运动规律的物理研究离不开它的研究对象－物质 分形物理研究也不例外 虽然整个物质世界在空间和时间上是无限的，但每一个具体的个别物质在空间和时间上则是有限的 对微观物质的研究，从分子、原子、原子核到基本粒子，涉及的时空结构越来越小，不可穷尽，但每一个结构层次都有它存在的一定的度域范围 所以，具体的物质中的嵌套结构也会是有限代层的[2]、如何将研究无限自相似嵌套结构的分形几何应用到物理问题中去， 总是不可避免的要遇到这个有限性根本问题 固体断裂的实验说明，正是这些有限范围的界限（晶粒尺寸，聚集物单体的大小，泡沫材料中孔洞的尺寸等）是决定具体物质特性（力学的和其他物理的性质）的重要因素之一[3]

Mandelbrot 讨论的分形图形在结构上是无限代层的（事实上是半无限代层的）， 在认识上（码尺）则是有限的，以一定长度的码尺去测量（认识）它，揭示出许多新的现象 现在，我们认识到自然界中客观存在的自相似嵌套结构是有限代层的，只是近似的"自相似"，以不同长度的码尺去测量（认识 不同度域的"分形结构"也就会出现更多的复杂情形

具体的材料则更为复杂 同一种材料中可能存在多种分形结构，如沿晶裂纹，穿晶裂纹，位错线，空位团，沉淀相等 它们都存在于一定的度域范围。这些度域范围有的还互相交叠 本文统称为多度域分形 下面以固体的断裂为例，讨论材料中多度域分形结构和性能的关系以及分维测量中存在的一些问题

Ⅱ. 与多度域分形有关的两个实验

Mandelbrot 等[4]1984年的实验指出，断裂表面具有分形结构的性质 以后 本文作者及合作者在这个方面进行了一系列的实验和分析[5-8]， 实验指出了分形概念应用于断口定量分析的可能性和存在的问题，将分形理论和断裂力学结合，可以导出断口表面分维和材料断裂韧性之间的定量关系[3,7] 实验还指出利用周界和面积关系的方法测量周界分维存在一些根本问题[5,8]，提出了周界 最大直径方法作为周界 面积方法的一种改进[8,9]

龙起易等关于超高强度钢由氢引起的裂纹稳态扩展实验指出：尽管材料中存在穿晶和沿晶两种裂纹扩展机制，在裂纹长度和码尺长度的双数关系图上仍可以在2μm η。 50μm范围内（μ，是码尺长度）得到一条近似的直线关系[10]。 这一实验说明：仅仅在双对数图上得到近似直线关系并不能说明材料中只存在单一的分形结构

穆在勤等用周界 最大直径方法和周界 面积方法测超高强度钢的一次拉断试样断面分维，发现在两个度域范围内测得了两个不同的分维值、这说明试样中可能在不同度域范围内存在两种不同的分形结构[8]

上述两个实验说明，从简单的模型到复杂的材料中分形问题时，必须了解多种分形结构并存时会对性能有什么影响。

多标度分形或多重分形概念的提出曾经是分形理论中的一个重要发展，它已成为描述在某一几何支撑上物理量不均匀分布的重要概念。但是，我们认为并不是所有的不均匀分布均可以套用多标度分形的概念。以材料断裂为例：由于沿晶和穿晶断裂所遇到的临界裂纹扩展力往往不一样，在低应力条件下，性脆的晶界先断开，组成自己的自相似系统。在高应力条件下，穿晶机制才参加进来，又组成穿晶裂纹的自相似系统。于是，在材料中有两个自相似系统的效应叠加，而不是像通常的多指标分形是每个代层两种机制均按一定比例混合，从而组成一个自相似系统（图1）。对于前面的情形，下面将作具体的分析

Ⅲ．N 个分形结构的度域范围不互相交叠的情形

断裂力学中将材料的断裂表面简化为二维平面中的裂纹。假设裂纹可以当做Koch 曲线来处理，裂纹的分形增长可以按照Richardson-Mandelbrot 的方法计算出。

令$\varepsilon_i = \eta_i / l_0$，为裂纹最小步长的正规化长度，$\eta_i$为最小步长的长度，$l_0$是裂纹分形起始图形的长度。在 Mandelbrot 的分形图形中，分形结构是无限代层的，ε则指的是测量码尺的正规化长度，$\varepsilon_0 = l_0 / l_0 = 1$。对于第一个分形结构，当最小步长为$\varepsilon_1$时，最小线段的数目则为

$$N(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{-D(1)} \tag{1}$$

其中D_1（$D(1) \equiv D_1$）为第一个分形结构的分维。当最小步长为ε_1时，Koch 曲线的总长度为

$$L_1^T(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 N(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{1-D(1)} \tag{2}$$

设分形结构在度域范围内是一个紧接着一个的，即第一个分形结构的最小步长即第二个分形结构的起始图形边长（图2）。这种情形在实际材料过程中也是可以见到的：Hornbogen 将CuZnAl 固溶体合金在850°C的温度进行范性加工，形变度达90％可以产生粗糙的晶界[11]，原来直线的最小步长（晶粒间界的一边）经过粗糙化变成了新的细微的海岸线式的结构，此时，上一个分形结构的最小步长ε_1便成为下一个分形结构的起始图形边长。第二个分形结构的长度应当和它的最小步长ε_2和分维有关[12]。

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon_2) &= (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-D(2)} \cdot \varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_1(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1-D(2)} \end{aligned} \tag{3}$$

乘上$N(\varepsilon_1)$便是第一个分形结构和第二个分形结构综合起来的总长度：

$$\begin{aligned} L_2^T(\varepsilon_2) &= N(\varepsilon_1)\,\varepsilon_1(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1-D(2)} \\ &= (\varepsilon_1/\varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1-D(2)} \end{aligned} \tag{4}$$

将上式的结果推广到N 个分形结构，则总长度为：

$$L_N^T(\varepsilon_N) = \prod_{i=1}^{N} (\varepsilon_i/\varepsilon_{i-1})^{1-D(i)} \tag{5}$$

这便是材料中存在N个多度域分形时，曲线的总分形增长。相应地，临界裂纹扩展力的总分形增值为：

$$G_{IC}^F / G_{IC} = L_N^T(\varepsilon_N) = \prod_{i=1}^{N} (\varepsilon_i/\varepsilon_{i-1})^{1-D(i)} \tag{6}$$

其中G_{IC}为直裂纹时的临界裂纹扩展力，即$2\gamma_s(\varepsilon_c - 1)$，$\gamma_s$为固体表面张力；

为了测量第 n 个分形曲线的分维值，可以在ε_n和ε_{n-1}之间变化码尺长度ε，测量相应的$L_I^T(\varepsilon)$，从$L_I^T(\varepsilon)$和ε的双对数图的直线斜率直接可以确定D_n值．（此时，ε不是指线段长度或最小步长）。

$$\log L_I^T(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1}(1-D_i)(\log\varepsilon_i - \log\varepsilon_{i-1}) + (1-D_n)(\log\varepsilon - \log\varepsilon_{n-1})$$

$$= \text{常数} + (1-D_n)\log\varepsilon \qquad (7)$$

$$D_n = 1 + [\log L_I^T(\varepsilon) - \text{常数}]/\log(\varepsilon^{-1}) \quad (\varepsilon^{-1} \to 0) \qquad (8)$$

Ⅳ．N 个分形结构中相邻的两个度域范围有交叠的情形。

图 3 示意N个Koch曲线在相邻的两个度域范围有交叠的情形．用前节同样的推理方法可以得到分形曲线的总长度表达式．

$$L_I^T(\varepsilon_{2N}) = \sum_{j=1}^{N-1} P_j \prod_{i=1}^{j}(1-P_{i-1})(\varepsilon_{-1}/\varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1}/\varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}(\varepsilon_{2j}/\varepsilon_{2j-1})^{1-D(j)}$$

$$+ \prod_{i=1}^{N}(1-P_{i-1})(\varepsilon_{-1}/\varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1}/\varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}(\varepsilon_{2N}/\varepsilon_{2N-1})^{1-D(N)} \qquad (9)$$

式中D_i是第i个分形的分维，ε_i是最小步长($\varepsilon_0 = 1$)，

P_i是分维为D_i的第i个分形曲线在有交叠度域时的布居分数。如果将N=1和2，就容易看出(9)式呈现简单的形式

1．N=1， $L_I^T(\varepsilon_2) = (\varepsilon_2/\varepsilon_0)^{1-D(1)}$ (10)

或 $L_I^T(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{1-D(1)}$ （在此情形$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$，$\varepsilon_0 = 1$）

2．N=2， $L^T(\varepsilon_4) = P_1(\varepsilon_2/\varepsilon_0)^{1-D(1)} + (1-P_1)(\varepsilon_1/\varepsilon_0)^{D(2)-D(1)}(\varepsilon_4/\varepsilon_1)^{1-D(2)}$

或 $L^T(\varepsilon_3) = P_1\varepsilon_2^{1-D(1)} + (1-P_1)\alpha^{D(1)-D(2)}\varepsilon_3^{1-D(2)}$ (11)

（此时，$\varepsilon_4 = \varepsilon_3$，$\alpha = \varepsilon_0/\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{-1}$）

临界裂纹扩展力被N个分形曲线增值为

$$G_{IC}^F/G_{IC} = L^T(\varepsilon_{2N}) \qquad (12)$$

测量分维D_n值时可以选择码尺ε在$\varepsilon_{2N-1} \geq \varepsilon \geq \varepsilon_{2N-2}$之间变化

$$L^T(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N-1} P_j \prod_{i=1}^{j}(1-P_{i-1})(\varepsilon_{-1}/\varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1}/\varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}(\varepsilon_{2j}/\varepsilon_{2j-1})^{1-D(j)}$$

$$+ \prod_{i=1}^{N}(1-P_{i-1})(\varepsilon_{-1}/\varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1}/\varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}(\varepsilon/\varepsilon_{2N-1})^{1-D(N)}$$

$$= A + B(\varepsilon/\varepsilon_{2N-1})^{1-D(N)} \qquad (13)$$

(13)式中A和B是常数。引入参量$Y(\varepsilon)$

$$Y(\varepsilon) = L^T(\varepsilon) - A \tag{14}$$

$$\log Y(\varepsilon) = 常数 + (1-D_N)\log\varepsilon$$

从双对数图上的直线斜率可以确定D_N值。

应当指出：从$L^T(\varepsilon)$和ε的双对数图上的直线斜率直接确定D_N是不正确的；因为，

$$\log L^T(\varepsilon) \neq 常数 + (1-D_N)\log\varepsilon \tag{15}$$

在交叠区域：$\varepsilon_{2N-2} \quad \varepsilon \quad \varepsilon_{2N-3}$

$$L^T(\varepsilon) \quad \sum_{j=1}^{N-2} P_j \prod_{i=1}^{j} (1-P_{i-1})(\varepsilon_{-1} \quad \varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1} \quad \varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}$$

$$\cdot(\varepsilon_{2j} \quad \varepsilon_{2j-1})^{1-D(j)}$$

$$+ P_{N-1}\prod_{i=1}^{N-1} (1-P_{i-1})(\varepsilon_{1} \quad \varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1} \quad \varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}$$

$$\cdot(\varepsilon \quad \varepsilon_{2i-1})^{1-D(N-1)}$$

$$+ \prod_{i=1}^{N} (1-P_{i-1})(\varepsilon_{1} \quad \varepsilon_0)^{1-D(1)}(\varepsilon_{2i-1} \quad \varepsilon_{2i-3})^{1-D(i)}(\varepsilon \quad \varepsilon_{2N-1})^{1-D(N)}$$

$$= A' + B'(\varepsilon - \varepsilon_{2N-3})^{1-D(N-1)} + C(\varepsilon - \varepsilon_{2N-1})^{1-D(N)} \tag{16}$$

上述关系比较复杂，但是，用计算机数值解出D_N的值也是可能的。

\. 由两个分形曲线组成的$\log L^T$-$\log\varepsilon$曲线。

下面我们考虑两个分形曲线，其度域范围完全相同或部分交叠时的情况（图4）。从(13)和(16)式可以简化得N 2时的式子

$$L^T(\varepsilon) \quad \varepsilon^{1-D(1)} \qquad (\varepsilon_1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon_0) \tag{17-1}$$

$$L^T(\varepsilon) = P_1\varepsilon^{1-D(1)}+(1-P_1)\alpha^{D(1)-D(2)}\varepsilon^{1-D(2)} \qquad (\varepsilon_2 \quad \varepsilon \quad \varepsilon_1) \tag{17-2}$$

$$L^T(\varepsilon) = P_1\varepsilon^{1-D(1)}+(1-P_1)\alpha^{D(1)-D(2)}\varepsilon^{1-D(2)} \qquad (\varepsilon_3 \quad \varepsilon \quad \varepsilon_2) \tag{17-3}$$

如果，为了简化模型，我们设$\alpha \quad \varepsilon_0 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3$，

此模型表示的交叠区域为$\Delta\varepsilon$，即

$$\Delta\varepsilon \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_0 \quad \alpha \quad \alpha\varepsilon_3 \tag{18}$$

当$\alpha = 1$时 $\Delta\varepsilon \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_3$，此即表示两个分形曲线在整个度域范围中都交叠。当$\alpha = (\varepsilon_0 \quad \varepsilon_3)^{1/2}$，$\Delta\varepsilon \quad 0$，此即表示两个分形曲线在其度域范围内完全不交叠。

图5表示α 1，3和5时的计算曲线。在龙起易等[10]的试验中明明白白存在沿晶和穿晶两种机制，但双对数图上却指出似乎只有一个分维值，即单一的分形结构。从上述计算可以看出：当$\alpha = 1$，即两个分形结构的度域范围完全交叠，而分维值又相差不大时，就可能在实验误差范围之内，在双对数图上得到一条近似的直线，但，这并不代表只有一种分形结构，这是过去许多实验工作所不曾注意到的。穆在勤等的实验[8]则可能是属于α 5或3的情形：两个分形结构的度域范围只有部分交叠或完全不交叠。从图上还可以看出：单纯从$L^T(\varepsilon)$和ε双对数图上直线斜率得不出D_2 1.5，D_1 1.26的数值，一般的说由于背景数值降低了斜率，从而也降低了真正分维测值

Ⅵ. 多度域分形中的多标度分形

当两种分形结构的度域范围互相交叠，裂纹的扩展出现不断地分叉时，有可能穿晶与沿晶从统计意义上讲每一代均按一定比例混合起来，形成整体一个自相似的系统，这时成为多标度分形，即通常的多重分形。现在用Cantor集模型来分析此分叉裂纹

在我们的问题中，关注的物理量是此复杂系统导致的断裂韧性（或临界裂纹扩展力）的分形增量。在二维裂纹问题中，裂纹的分形增长正比于此物理量。裂纹的分形增长又包括两个因子，即，某型（如沿晶）开裂几率P_i和裂纹线段增长的乘积。设P_o为沿晶开裂的几率，其形式为，

$$P_o = \frac{(G_{IC}^{I})^{n}}{(G_{IC}^{I})^{n} + (G_{IC}^{T})^{n}} \tag{19}$$

裂纹线段的分形增长则视沿晶与穿晶的机制不同而异（图6）

$$L_i / L_o = (1/2)\csc(\theta_i/2) \tag{20}$$

其中$\theta_i = \theta_1$时指沿晶裂纹，$\theta_i = \theta_2$时指穿晶裂纹。于是，“沿晶”“穿晶”裂纹的分形增长分别为，

$$P_1 = \frac{2L_1}{L_o}P_o = P_o\csc(\theta_1/2)$$

$$P_2 = \frac{2L_2}{L_o}(1-P_o) = (1-P_o)\csc(\theta_2/2) \tag{21}$$

沿晶裂纹对断裂韧性贡献的布居分数，即沿晶裂纹分形增长的布居分数P，可以由下式求出，

$$P = \frac{P_o\csc(\theta_1/2)}{P_o\csc(\theta_1/2) + (1-P_o)\csc(\theta_2/2)} \tag{22}$$

按照 Feder（1988）[18]

$$\tau(q) = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(q,\delta)}{\ln\delta} \tag{23}$$

$$N(q,\delta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{qk}(1-P)^{q(n-k)} = [P^q + (1-P)^q]^n \tag{24}$$

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = -\frac{1}{\ln 2}\,\frac{P^q\ln P + (1-P)^q\ln(1-P)}{P^q + (1-P)^q} \tag{25}$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q)$$
$$= -\frac{q}{\ln 2}\,\frac{P^q\ln P + (1-P)^q\ln(1-P)}{P^q + (1-P)^q} + \frac{\ln[P^q + (1-P)^q]}{\ln 2} \tag{26}$$

根据龙起易等[10]的实验数据，经验地设 $P=2/3$，则

$$\tau(q) = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(2^q+1) - q\ln 3\right] \tag{27}$$

$$\alpha(q) = \frac{\ln 3}{\ln 2} - \frac{2^q}{2^q+1} \tag{28}$$

$$f(\alpha(q)) = \frac{\ln(2^q+1)}{\ln 2} - \frac{q\,2^q}{2^q+1} \tag{29}$$

$$D(q) = \frac{1}{(1-q)\ln 2}\left[\ln(2^q+1) - q\ln 3\right] \tag{30}$$

函数D(q)是G1E G1C 分形测度的分维谱，其几何支撑的维数为 D(0)=1 （即直裂纹线）（图7）[14]

Ⅶ. 小结

1. 分形的物理研究离不开它的对象—物质。物质存在的形式是空时的有限性和无限性的统一，自然界中具体的嵌套结构是有限代层的，材料中的嵌套结构除了有限代层性以外还可能同时存在多种嵌套结构，它们有各自的度域范围，本文统称为多度域分形。

2. 在材料开裂过程中的多度域分形大多数不一定是标准的多标度分形而只是各种自相似结构的叠加，只有在一些特殊情形，如裂纹分叉生长，或穿晶沿晶开裂几率相近时才可能出现通常的多标度分形

3. 实验得到的双对数图上的直线关系并不一定代表单一的分形结构，沿晶和穿晶开裂并存的实验和本分析说明进行材料中分形实验研究时，辅以其他实验观察是非常必要的。

4. 本文提出的多度域分形概念有可能应用到其他分形过程，如分形聚集生长，分形子和声子的渡越及表面生长动力学等

*本文得到国家基础性研究重大项目《非线性科学》及国家自然科学基金委的资助

参考文献

1. B.B.Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, 1983, *Freeman, San Fransisco.*
2. 龙期威，穆在勤，中国科学，1993年(即将刊出)。
3. C.W.Lung, in "Fractals in Physics", Eds. L. Pietronero and E.Tosatti, 1986, P.189, Elsevier Science Publisher B.V.
4. B.B.Mandelbrot, D.E.Passoja and A.J.Paulay, Nature, 308 (1984) 721.
5. C.W.Lung and Z.Q.Mu, Phys. Rev. B, 38 (1988) 11781.
6. C.W.Lung and S.Z.Zhang, Physica D, 38 (1989) 242.
7. Z.Q.Mu and C.W.Lung, J.Phys, D. Appl. Phys, 21 (1988) 818.

8. C.W.Lung in Nonlinear Phenomena in Materials Science Vol. 2, Eds. G. Martin and L.Kubin, 1992, P.483

9. 穆在勤，龙期威，康雁，材料科学进展，1992, Vol.6, No.3, P.227.

10. Q.Y.Long, S.Q.Li and C.W.Lung, J.Phys. D Appl. Phys. 24 (1991) 602

11. E.Hornbogen, Int. Mater. Rev. 34, (1989) 277.

12. C.W.Lung, J.Mater. Sci, Technol. Vol. 9 (1993) 37.

13. J.Feder, Fractals, 1988, p.81. Plenum Press.

14. C.W.Lung, in Proc. Int. Workshop on Statistical Physics, Beijing Normal University Press, 1993. (in the press).

马氏体相变的分形描述

龙起易[1,2]，朱祖铭[1]，穆在勤[1,2]，龙期威[1,2]
([2]中国科学院材料物理中心，[1]中国科学院金属研究所材料疲劳断裂国家重点实验室)

本文研究如何测量含马氏体和剩余奥氏体的金相照片的谢宾斯基地毯(Sierpinski Carpet，下称SC)分维(简称谢氏分维)，以及用谢氏分维描述马氏体相变(下称MT)的物理意义。

一、测量方法和结果：图1a和b是一理想SC的第一、二代，有两法得其分维，一是理论计算法：计算公式是[1]：

$$D=\log N/\log(1/r) \qquad (1)$$

其中D是分维，r是相似比，1/r则是线性放大倍数，N是面积放大倍数，例如，图1a,b中AB=1，A'B'=1/5，A"B"=1/25。将四方形A'B'C'D'放大到ABCD。1/r=5，N=21，则D=log21/log5=1.8916；若四方形A"B"C"D"放大到ABCD，1/r=25，N=441，D=log441/log25=1.8916，另一方法是Richardson作图法可表达为[2]：

$$A(\varepsilon)=A_0\varepsilon^{(2-D)} \qquad (2)$$

ε为被挖去块片(或测量面积)的归一化有效直径，它是被挖去块片面积的平方根乘一常数形状因子，A(ε)为归一化有效直径大于和等于指定的ε时的归一化剩余面积，Ao为常数，D为谢氏分维。例如，图1a,b中，以不同正方形面积为测量面积，以其边长对AB归一化为归一化有效直径，则ε=1时，A(1)=1；ε=1/5时，A(1/5)=21/25；ε=1/25时，A(1/25)=441/625，……，在双对数纸上作图，如图1C。各数据点可连成一直线，斜率为0.1084，D=2-0.1084=1.8916。作图法有两大优点：一.它揭示了谢氏分维的物理意义，谢氏分维愈小，背景材料随ε减小而消失的速度越快；二.它提供了一个有力的方法测量只有统计上自相似性的SC的分维，例如，图1d是图1b的统计上相似的图形，用理论计算法很难得D，但用作图法就容易了。应该指出，如果被挖去块片形状彼此相似，且剩余面积和被挖去块片的尺寸之间满足(2)式的图形，必有谢氏分维，而不必考虑单个被挖去块片的位置。

现在讨论MT，图2a是Fe-29%Ni-0.16%C合金冷却到-125℃所得到的金相照片，它由马氏体和剩余奥氏体组成。这是一个无序但不随机的显微结构。随着MT进行，奥氏体的体积百分数收缩，马氏体晶粒相当于图1a，b中挖去的块片，假定，马氏体晶粒之间彼此相似，这一图形是否有谢氏分形特征取决于残余奥氏体面积和马氏体尺寸之间的关系是否满足(2)式，尝试着作Richardson图。首先，测量各单个马氏体晶粒的面积，然后将马氏体晶粒分组。在一组内，各单个马氏体晶粒的面积与该组马氏体晶粒平均面积误差在10%内。以后，该组每个马氏体晶粒的面积均取为该组的马氏体晶粒平均面积。对应于某一组马氏体归一化有效直径是该组的马氏体晶粒平均面积比整个图形面积的平方根。对应于给定ε的归一化剩余奥氏体面积定义为(A-B)/A，A为整个图片的面积。B为马氏体组归一化有效直径大于和等于ε的所有马氏体组所占面积。这些数据点在双对数纸上作图，如图2b所示。由它可见，在马氏体中间尺寸区间，即0.02<ε<0.1，这些数据点构成一条很好的直线，斜率为0.38，谢氏分维为1.62。在大尺寸和小尺寸区间，数据点偏离了该直线，而似乎构成了另外两直线，斜率分别为0.19和0.13，即D分别为1.81和1.87。

二、讨论：用谢氏分维描述MT时，谢氏分维值越小，剩余奥氏体随马氏体晶粒尺寸变小而消失的速度

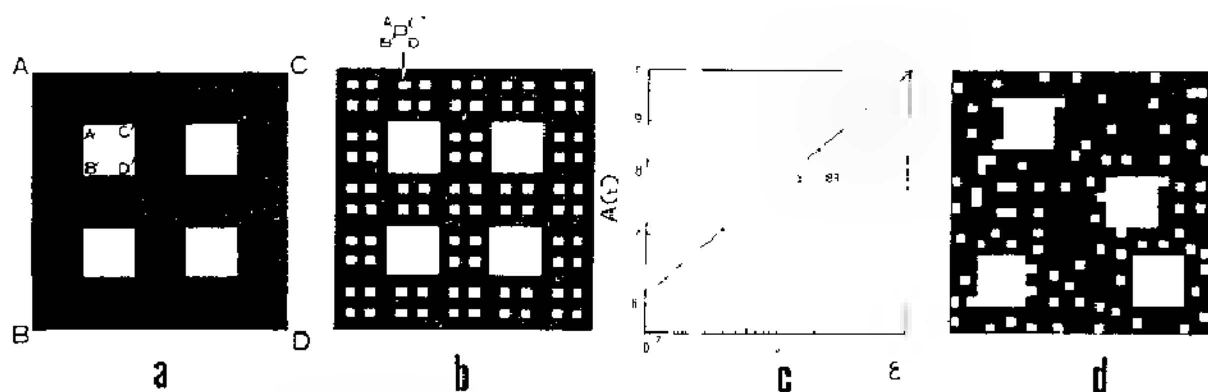
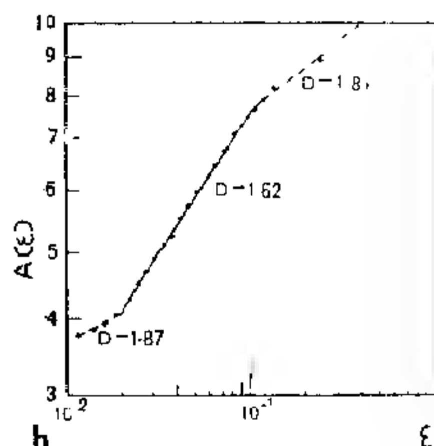


图1(a)，(b)：理想的SC的第一、二代；(c)：它的Richardson图；(d)：与(b)统计相似的图形。





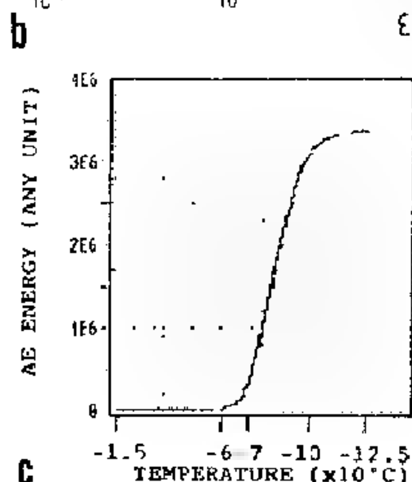


图2.(a).Fe 29%Ni 0.16%C合金冷却到 125℃的金相照片，黑的为马氏体，白的为奥氏体；(b).该照片的Richardson图；(c)该合金以2℃/分冷至-125℃过程中AE能量和温度的关系。

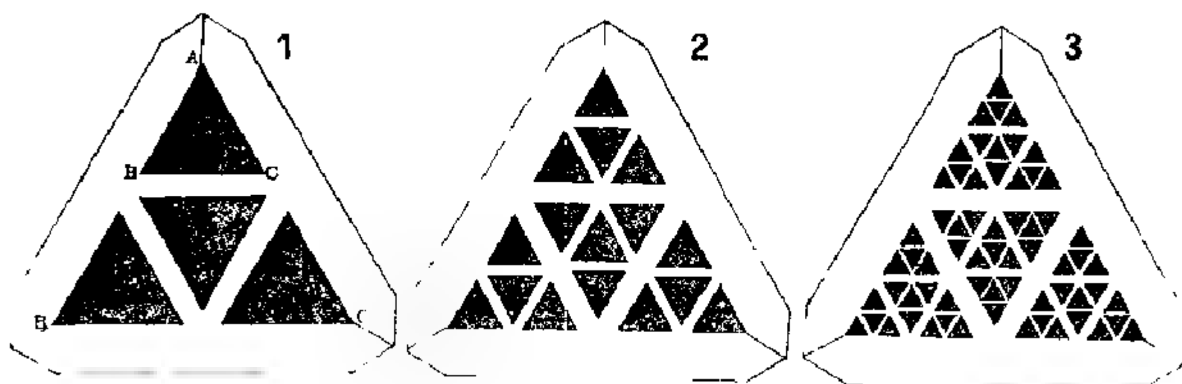


图3 说明马氏体相变的理想的SC

速快，即马氏体增加得快）、换名话说，谢氏分维反映了马氏体晶粒大小的分布情况。三个不同马氏体尺寸区间有三个不同的谢氏分维值意味着在不同马氏体尺寸区间，奥氏体随马氏体晶粒尺寸变小以不同的速度减小、这很可能反映该合金冷却过程中MT的三个阶段。这种想法似乎得到了该合金冷却中MT产生的声发射(AE)数据的支持。图2C是AE能量随温度的变化关系，可分为三个阶段。在第一阶段(从60℃(M)到70℃)和第三阶段(100℃～125℃)AE能量随温度下降而增加的速度比第二阶段(70℃～100℃)慢。从统计上看，随MT的进行，供马氏体相变的空间变小，而自触发现象随温度下降而变多(即马氏体胚核增多)，因此，随温度下降，转变的马氏体晶粒尺寸(s)变小，密度(d)增高。因此，图2C中的第一、第二和第三温度区间在趋势上大致地与图2b中大晶粒尺寸、中晶粒尺寸和小晶粒尺寸区间相对应。在一定温度下，转变的马氏体体积分数的增量(MI)主要决定于乘积sd。在第一阶段，虽然s大，但d小，所以MI小；在第一阶段，s和d都较大，所以MI大。在第三阶段，虽然s大，但d小，所以MI小；在第二阶段，s和d都较大，所以MI大，在第三阶段，虽然d大，但s太小，所以MI又变小。可合理的认为，在一定温度下，AE的能量增加和MI成正比例，因此，随温度下降，在第一阶段和第三阶段的AE能量增加的速度比第二阶段小，反过来，这与马氏体中间尺寸区间较小的谢氏分维相吻合。

最后，为了更深一步理解用谢氏分维描述MT的意义，提出一模型如图3所示。这个SC的分维可用(1)式计算。这里1/r AB'/AB, N 4, D=log4/log(AB'/AB)，结果由表1给出、表1中f表示当马氏体晶粒减小AB'/AB倍时，剩余奥氏体面积损失的百分数。用Richardson作图法亦可得到相同结果。

表1：对图3计算的D值

AB'/AB	D	f
2.000	2.00	0
2.098	1.87	9%
2.150	1.81	13%
2.350	1.62	27%

三、结论：1. 描述MT的谢氏分维的物理意义是：谢氏分维愈大，剩余奥氏体面积随马氏体晶粒变小而缩小的速度愈慢。

2. 含马氏体和奥氏体的金相照片是否有谢氏分形特性决定于剩余奥氏体的面积与马氏体晶粒尺寸之间是否满足(2)式。

参 考 文 献

(1)Hornbogen, E., Z.Metallkde, 1987 Vol.78, P.352.
(2)Hornbogen, E., Inter. Mater. Rev. 1989, Vol.34. P.277.
(3)Su.Hui and Yan.Zhengi., Mater.Let.1992, Vol.13, P.102.
(4)Manderbort,B,B., "The Fractal Geometry of Nature", 1982, Freeman, San Fransisco.
(5)Pfrifer.P., :Fractals in Physics", edited by Pietronero.L.and Tosatti.E. 1986, P.83-86.

分形粒度分布模型及颗粒过程的统一性

黄　暹　　柯家骏

中国科学院化工冶金研究所，北京 100080

本文首先借助于数学上的有规分形，构造了有限的自相似尺度分布集合，从而导出了真实颗粒体系的分形粒度分布（FSD）模型，得到了用粒数密度表示的 FSD 严格定量关系。建立在这一关系基础上的分布矩函数及其它性质分布表达式，使得 FSD 模型更加完善。本文还对颗粒过程的统一性进行了论述，得到了颗粒过程的统一表达式及分形过程判据。实验结果肯定了 FSD 模型的实用性和可靠性。

1．从有规分形到真实颗粒体系

现在从有规分形 Sierpinski 垫片 [1] 入手，导出真实颗粒体系的分形粒度分布（fractal size distribution — FSD）表达式。考察 Sierpinski 垫片时，感兴趣的是镶嵌在垫片结构中的那些空隙（空三角）。假定垫片是有限大的，其空隙的尺度具有上下界，上界不为无穷大，下界不为零，并且尺度范围足够宽。这样，垫片上就具有有限多个空隙。记最大空隙的尺度（边长）为 L_c、最小空隙的尺度为 L_f，第 k 代空隙的尺度为 L_k（$k=0,1,2,3,\cdots$），以及尺度比 L_k 大的空隙数目为 $N(>L_k)$。最大空隙即第 0 代空隙，因而有 $L_o=L_c$。从而，数目与尺度的关系可用表 1 来表示：

表 1　有限 Sierpinski 垫片中的空隙尺度分布

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$
L_k	L_c	$2^{-1}L_c$	$2^{-2}L_c$	$2^{-3}L_c$	$2^{-4}L_c$	$\cdots$	$2^{-k}L_c$	$\cdots$
$N(>L_k)$	0	1	4	13	40	$\cdots$	$(3^k-1)/2$	$\cdots$

从表 1 可以得出 $N(>L_k)=\frac{1}{2}(3^k-1)$，注意到 $3^k=2^{k(\ln 3/\ln 2)}=2^{kD}=L_k^{-D}L_c^D$，可得到

$$N(>L_k)=\frac{1}{2}L_c^D(L_k^{-D}-L_c^{-D}) \tag{1}$$

式中，L_k 作为函数 $N(>L_k)$ 的自变量来考虑，L_c 为常量，D 是分维（$=\ln 3/\ln 2$）。可以验证，式 (1) 对每一代空隙都成立。这就是 Sierpinski 垫片中空隙的 FSD 表达式。

同样，如果把有限多代 Cantor 棒、Sierpinski 地毯中的正方形空隙群以及 Sierpinski 海绵中的立方体空隙群分别作为具有尺度分布的集合，那么，可以分别导出类似于式 (1) 的对应尺度分布关系式，并由此归纳出以下通式：

$$N(>L_k)=K_o(L_k^{-D}-L_c^{-D})\qquad(L_f\le L_k\le L_c) \tag{2}$$

式中，K_o 为常数。式 (2) 是对有规、精确和不连续的 FSD 的定量描述。现将这种 FSD 拓广为无规、统计和连续的 FSD。将不连续尺度变量 L_k 代换为连续尺度变量 L，即得

$$N(>L)=K_o(L^{-D}-L_c^{-D})\qquad(L_f<L\le L_c) \tag{3}$$

那么，式 (3) 便是对类似于如图 1 所示的统计自相似尺度（粒度）分布的定量描述。显然，对于一个“无限的”颗粒体系，$L_c\longrightarrow\infty$，式 (3) 近似化为

$$N(>L)\propto L^{-D}\qquad(0<L<\infty) \tag{4}$$

上式被用来描述瑞士乳酪中的气孔 [1] 和月球表面的陨石坑 [2]。

式(3)虽然是一个精确的分布函数，但却不是定标函数。为找出一个严格的定标函数，定义粒数密度(population density) $n(L)$ 如下

$$n(L) = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{-\Delta N(>L)}{\Delta L} = -\frac{dN(>L)}{dL} \tag{5}$$

于是，从式(3)可以导出以下重要幂律：

$$n(L) = K_o D L^{-(D+1)} \quad (L_f \leq L < L_c) \tag{6}$$

其中，$K_o = n(L_o) L_o^{D+1}/D = n(1)/D$，$L_o$ 为参考粒度。式(6)是一个严格的定标函数，反映了 FSD 的根本特征。以后，相似维 D 称为分布分维，它是 FSD 复杂程度(不均匀程度)的量度。$D = 0$ 意味着体系中所有颗粒具有同一粒度，不存在粒度分布；$D > 0$ 意味着在一定粒度范围内存在着自相似粒度分布。不过，真实 FSD 体系不必约束于欧氏几何空间结构上，其数目与粒度的分布关系完全不受欧氏空间维数 E 的限制，甚至有可能出现 $D > E(1,2,3)$ 的情形。当 $D = E$ 时，如果用该颗粒体系紧密地充填 E 维空间，那么，可以把 E 维空间填满而不产生尺度大于 L_f 的空隙。D 值越大，$n(L)$ 随 L 减小而增大的速度越快[3]。

FSD 模型的其它表达式——分布矩(moments of distribution)函数，可以从式(6)出发分别导出，例如：

1) 假定 FSD 体系中所有颗粒都具有同样的分形表面，即拥有相同的表面分维 D_S 值，那么，累积表面积 $S(>L)$ 可由 FSD 的 D_S 阶矩来表示：

$$S(>L) = c_s K_o \frac{D}{D_S - D} (L_c^{D_S - D} - L^{D_S - D}) \tag{7}$$

式中，c_s 为表面积形状系数。

2) FSD 的三阶矩为累积质量 $M(>L)$ 或累积体积 $V(>L) = M(>L)/\rho$，累积质量为

$$M(>L) = \rho c_v K_o \frac{D}{3 - D} (L_c^{3-D} - L^{3-D}) \tag{8}$$

式中，c_v 为体积形状系数，ρ 为颗粒密度。

由式(7)和式(8)可以给出质量比表面积 $a_m(>L)$：

$$a_m(>L) = \frac{S(>L)}{M(>L)} = \frac{c_s}{\rho c_v} \frac{3 - D}{D_S - D} \frac{L_c^{D_S - D} - L^{D_S - D}}{L_c^{3-D} - L^{3-D}} \tag{9}$$

应当指出，当 $D = E$(0、1、2 或 3)时，以上各方程失去定义。然而，它们在这些点处的极限是存在的。

2. 颗粒过程的统一性及其分形判据

大自然中的许多固体物质，都是以颗粒群状态而存在。在化学工程、提取冶金及材料工程中，常见的颗粒体系是各种碎矿石、粉状原料及颗粒状产品。如果把“颗粒”的概念进一步扩充，那么，一切存在于连续相中的分散相，如气孔，液滴或气泡等，都可以视为颗粒体系。经验表明，典型的颗粒过程通常产生几何自相似的颗粒体系。例如，在粉碎过程中，如果破碎方式一定的话，大颗粒碎裂而生成的小颗粒可望与大颗粒本身在几何上统计地相似。溶液中的结晶过程则更是如此，大大小小的单个晶粒都具有统计相似的形状。但是，经过一个颗粒过程之后，所有的颗粒都具有同一粒度，这样的现象是很少发生的。颗粒体系总是以某种近乎连续的粒度分布而存在。

令人感兴趣的是，某些颗粒过程产生的颗粒体系，除了颗粒的几何自相似性以外，其数目-粒度分布也同样具有自相似性，并且对应于比较宽广的线性粒度范围。形状和数目－粒

度分布的双重自相似性，说明该颗粒体系满足 FSD 模型。这类分布不存在任何特征峰值，不能用最大或然值和离散度这两个特征量来描述。

笼统地说，伴随有颗粒体系生灭现象发生的过程，就叫做颗粒过程。具体说来，“过程”可以是物理化学过程，也可以是机械过程，或者是二者的结合。进行这种过程的主体，是颗粒体系（分散相）。颗粒体系与过程是紧密联系的，其表现形式是多样化的。粒度、数目和总质量的演变方式，决定了颗粒过程的基本特征。而颗粒体系的粒度分布，则是颗粒过程最重要的性质。可以对颗粒过程下一个统一的定义：使颗粒体系中颗粒粒度、总体数目或总体质量发生演化，以及使颗粒体系产生或消亡的过程，统称为颗粒过程。

从动力学的角度来考察颗粒过程，可以发现，其粒度变化速率可写为：

$$L^{b-1}\, dL/dt = g(t) \tag{10}$$

式中，$g(t) < 0$ 时为粒度减小过程，$g(t) > 0$ 时为粒度增大过程。参数 b 值的范围是 $0 \sim 2$ 。式 (10) 是颗粒过程的统一表达式，任一颗粒过程的特性均由参数 b 和函数 $g(t)$ 所决定。函数 $g(t)$ 的正负是粒度增大或减小过程的唯一判据。当 $g(t)$ 为常数时，过程为连续稳态过程。

参数 b 值与过程类型的内在关系如何？我们指出：

1）$b = 0$ 为分形颗粒过程

$b = 0$ 时式 (10) 即变为

$$d\ln L/dt = g(t) \tag{11}$$

可以证明，凡是满足式 (11) 的颗粒过程，都是分形颗粒过程（包括稳态的和非稳态的）。分形颗粒过程最初产生 FSD 颗粒体系的机理可能是极其复杂的，而维持 FSD 的条件则只有一条：保持 $\ln n \sim \ln L$ 直线关系。

2）$b \neq 0$ 为非分形颗粒过程

非分形颗粒过程不可能产生 FSD 颗粒体系。如果初始状态下的颗粒体系是一个 FSD 体系，那么，过程一旦开始，FSD 即不复存在，也就是说，当 $t > 0$ 时 $\ln n$ 对 $\ln L$ 作图已经不是直线了。但是，这并非等于说 FSD 模型不能应用于 $b \neq 0$ 的过程。可以根据初始的 FSD 及过程本身的特性对整个过程进行预测，如找出其动力学特征。

3. FSD 模型的应用

通过实验研究已经证明 [4–6]，粉碎、结晶、喷雾造粒和胶体化等过程，在一定条件下都可能成为分形颗粒过程，产生 FSD 颗粒体系。用 FSD 模型定量描述这类分形颗粒过程，必须同时采用分布分维和表面分维。对于拟连续稳态分形颗粒过程，如可破碎物料的冲击式粉碎和静压式粉碎过程、受扩散控制的依粒度成长结晶过程，其动力学特征是粒数密度与粒度之间始终保持双对数直线关系，即以满足式 (11) 为前提。FSD 颗粒体系的流 - 固相非催化反应不是分形颗粒过程，但拟稳态下颗粒集合体的总反应动力学仍受制于初始的 FSD 特性，从而以 FSD 模型为基础建立了总反应动力学模型，并开发了总动力学模型的计算程序，数值模拟结果与典型的实验结果是基本一致的（详见文献 4）。

大量实验表明，粉碎过程产生 FSD 颗粒体系是比较普遍的现象 [4]。图 2 是粉碎产物的 FSD 例证，该实验是用对撞式气流粉碎机对性质有区别的石灰石分别进行粉碎得到重质碳酸钙，然后用 GXL-202 离心沉降式粒度分析仪对产物进行测试。该类产物的粒度范围在 $0 \sim 12\ \mu m$ 内，颗粒主要分布于 $1\mu m$ 以下。

对四硼酸钠 - 水体系的间歇式冷却结晶进行了实验 [4]。在安装有调速搅拌浆的小型冷却结晶器中，将一定温度下的饱和溶液冷却结晶至室温。改变初始的结晶条件，将得到的

产物分别进行粒度分析，其结果列于表 2 。表中各组结晶过程都是分形颗粒过程。从表 2 中可以看到：同一搅拌转速下，初始的过饱和度 (结晶推动力) 越大，D 值越高；初始过饱和度相同时，搅拌转速增加，D 值升高。在本实验装置中，第 2 、4 和 5 号实验结果表明，分维 D 在一定范围内大约正比于转速 ω，即 $D \approx 0.0061\omega$。分维 D 值是根据 $\log n \sim \log L$ 实验点回归直线的斜率求得的，其截距对应于最终结晶产物的 K_0 与 D 值，从而可写出形如式 (6) 的瞬时定量关系。研究表明，在分形结晶操作过程中，完全有可能通过控制分维 D 值而达到控制产品质量的目的。

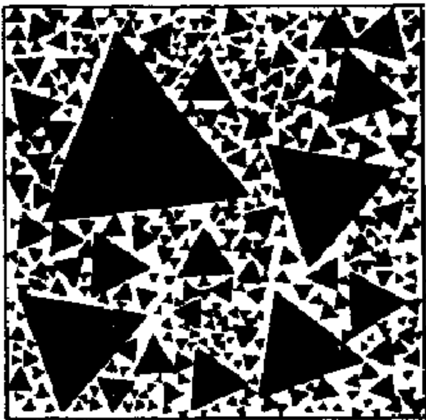


图 1 将 Sierpinski 垫片进行随机化处理后得到的连续分布的离散颗粒体系 (黑三角空隙群)

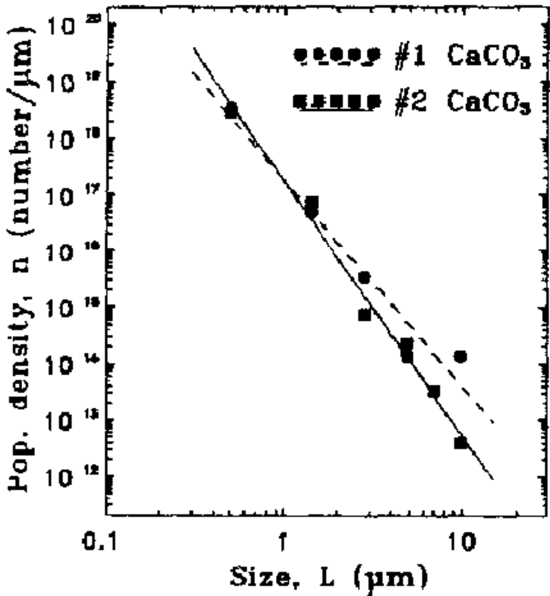


图 2 重质碳酸钙颗粒体系的 FSD 。设备：对撞式气流粉碎机。1 号样品：$D = 2.66$；2 号样品：$D = 3.51$ 。基准：100g 。

表 2 操作条件对 $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$ 间歇结晶产物 FSD 的影响 *

实验编号	饱和温度℃	饱和浓度 g/100gH_2O	搅拌转速 min^{-1}	分布分维 D
1	70	61.3	400	3.22
2	55	32.8	400	2.43
3	40	12.9	400	1.68
4	55	32.8	600	3.65
5	55	32 8	200	1.22

* 一律冷却至室温 20 ℃，对应的饱和浓度为 5.0 g/100g H_2O 。

参 考 文 献

[1] Mandelbrot B. B., *The Fractal Geometry of Nature* Freeman, New York (1982)
[2] Feder J , *Fractals*. Plenum, New York (1988).
[3] 黄 暹， 自然杂志 15(8) (1992) 632 .
[4] 黄 暹， 博士论文，中国科学院化工冶金研究所，北京 (1993) .
[5] 黄 暹、柯家骏、陈念贻， 化学通报，(6)(1992)36 .
[6] Huang X and Ke J. J., *The Kinetic Model of Fractal Crystallization*, in. *Proc. 12th Symposium on Industrial Crystallization* (Warsaw, Sept.20-23, 1993), in press.

分形布朗增量随机(DFBIR)场模型及其在材料断口定量分析中的应用

华中理工大学

机械工程二系　　李建明　林汉同　张　军

电子与信息工程系　朱光喜　朱耀庭　刘文予

一、前言

材料的断裂直接关系到工程零件的寿命和整个工程的安全，关于断裂的研究一直是材料学科和材料工程的重要研究课题。在断裂研究中，断口是材料断裂动态过程的静态反映，其上蕴含着能够反映断裂过程和断裂机制的丰富信息，所以它一直是国内外材料学界研究的重要对象。近年来，断口的定量分析已成为材料形变和断裂研究不可缺少的部分，它可以提供与其它金相方法相互补充的信息。关于这方面的最新进展 M・Coster 等作了很好的评述[1,2]，其中提到的新方法之一就是使用分形（Fractal）来表征断裂面。

B・B・Mandelbrot[3]创建了著名的分形几何学（The Fractal Geometry of Nature）。他认为：分形是一个可用于研究许多物理现象的有力工具，并且可以用来处理自然界中大量的不能被经典欧氏几何处理的极不规则的自然几何形状。1984 年 Mandelbrot 等人[4]应用 Slit Island Analysis 和 Fracture Profile Analysis 两种方法测量了马氏体钢不同热处理工艺试样断口的分形维数，发现冲击能随分形维数增加成单调下降的直线关系。在研究中他们指出：金属断裂表面是粗糙不规则的，具有不严格意义上的自相似性，可以看成一种分形结构，而分形维数则是断面粗糙程度的一种量度。Pande 等人[5]用 Mandelbrot 提出的两种方法测量了不同 Zr 含量的 Ti 合金（Ti-6Al-Zr）断裂表面的分形维数，发现其值与动态断裂能有关。Underwood 等人[6]在纵剖面线法基础上发展一种新方法，可将具有 RSC（Reversed Sigmoidal Curves）特性的分形图线性化，对纵剖面线和断裂表面提出了新的分形方程。

近几年，国内关于分形在材料断裂研究中应用更加广泛深入。具有代表意义的是 1985 年中科院金属所龙期威[7]首先从理论把金属断裂表面分形模型与断裂力学联系起来，这是分形断裂力学的起点。他在 1985 年意大利国际理论物理中心"Fractal in Physics"学术讨论会的论文[8]中指出：金属断裂的裂纹呈 Z 字形扩展，在大 Z 字形中套小 Z 字形，因此，可以近似看作具有自相似性，是一种分形结构。他用 Mandelbrot 的两种方法计算了沿晶断裂的临界裂纹扩展力，发现临界扩展力随晶粒尺寸的减小，而快于 Hall-Petch 的 $d^{1/2}$ 定律的增加。中科院穆在勤等人用 Slit Island 法研究了两种高强钢不同热处理和不同实验温度的平面应变断裂试样断口的分形维数，得到 K_{1c} 值对数与分形维数成相反关系的变化的直线关系，他们进一步的工作表明[9,10]：获得的分形维数与测量码尺有关，只有当测量码尺足够小时，才能得到断裂表面的实际分维。同时,他们研究了在平面应变条件下平行与垂直裂纹扩展方向上剖面轮廓线的分形维数与 $\log k_{1c}$ 关系[11]。

上述关于断口分形参数估计都是基于 Mandelbrot 提出的 Slit Island analysis 和 Fracture Profile analysis 及其修正的方法．Slit Island analysis 估测分形维数，是依据面—线的分形关系，这种观点认为：断口（经过抛光）岛或湖的面积与其周长存在下述关系：$P^{1/D}=CA^{1/2}$，式中 P 为岛或湖的周长，A 为岛或湖的面积，D 为分形维数，C 为常数，两边取对数可得：$\lg P=C+1/2D\lg A$，固定一个码尺，测得许多的岛或湖的周长与面积，通过回归分析可以测得分形维数 D 值．资料[9]通过研究发现，此方法测得的分形维数 D 不是断裂表面的真正分形维数，而是表观分形维数，它与测量码尺有关．目前，这种方法在用于断口分析中受到限制．

Fracture Profile analysis 用于断口分析中很直观，并且，测算的分形维数即是实际断口轮廓线的分形维数，所以目前得到广泛应用，它测算分形参数的是依据线—线分形关系，它认为：断口纵剖面线或裂纹线的分形长度与其欧氏长度或称投影长长存在如下关系：$L=L_0\eta^{1-D}$，式中 η 为码尺，D 为分形维数，两边取对数得：$\lg L=\lg L_0+(1-D)\lg\eta$，变动码尺，测得 L 值，通过回归分析，可得出分形维数 D 值．

国内外学者通过上述两种方法在研究材料断裂及其断口特征方面，取得了大量的成果．但随着研究的深入，也发现了一些问题，集中于以下几点：（1）制样有损伤，常丢失细节特征，并且同一断口无法反复做试验．（2）某一断面或剖面的分形特征并不能代替整个断口的分形特征．（3）码尺变动范围小，不能将宏观分形特征与微观分形特征相联系，同样也不容易寻求分形结构的不同层次．（4）由于制样与测量分析交替进行，难以实现自动分析，针对上述问题，华中理工大学朱耀庭等人提出一种新的方法（简称"SEM—FD"），将分形理论，图象处理与材料断口分析结合起来，实现了对材料 SEM 三维图象断口进行无损伤自动分形分析．下面主要介绍该方法的分形理论及其在材料断口分析领域中的应用．

二、离散分形布朗增量随机场(DFBIR 场)分形模型

分形几何是研究极不规则的复杂曲线和曲面的几何学，它包括确定分形几何学和随机分形几何学．前述两种分形方法属于确定分形几何学，而随机分形几何学主要研究分形布朗随机场（Fractal Brownian Random Field—FBR 场）．早在 1968 年 Mandelbrot 和 Van Ness 就拓广布朗运动概念[12]，定义了一个近似零均值的随机函数，称为分形布朗运动(当时称"分数布朗运动"Fractional Brownian Motion—FBM")．

定义 1：设 H 满足 $0<H<1$，b_0 为任意实数，若随机函数 $B_H(t,w)$满足：

$$B_H(0,w)=b_0$$

$$B_H(t,w)-B_H(0,w)=\frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}\right]dB(s,w)+\int_0^t(t-s)^{H-1/2}dB(s,w)\right\}$$

则称 $B_H(t,w)$为分形布朗运动．式中 H 为分形参数，b_0 为初始值．$B(s,w)$为通常的布朗运动，$\Gamma(\cdot)$为伽玛函数，w 为属于样本空间 Ω(以下 w 省略)，它表示 $B_H(s,w)$为一随机函数，t 为自变量．显然，$H=1/2$ 时为通常的布朗运动．

定义 2: 随机函数$\{x(t), -\infty < t < \infty\}$增量被称为具有 H(H≥0)参数下的自相似性，若对于任意 $h>0$ 和 t_0，有$\{x(t_0+\tau)-x(t_0)\} = \{h^{H}(x(t_0+h\tau)-x(t_0))\}$成立。

Mandelbrot 证明了 $B_H(t)$增量具有 H 参数下的自相似性，并且是平稳的。但是 $B_H(t)$不具有平稳特性，处理起来极不方便。因此，B · B · Mandelbrot 又从 FBM 出发给出分形布朗噪声(fractal Brownian noise—fBn)的定义[13]:

定义 3: $N_H(t,w) = B_H(t,w)-B_H(t-1,w)$ (1)

其相关函数: $R_H(k) = 1/2\,(|k+1|^{2H}+|k-1|^{2H}-2|k|^{2H})$ (2)

同样可以定义离散分形布郎噪声 dfBn。dfBn 模型具有平稳性，处理容易，但它是作为研究长记忆，长相关(long memory, long corelation function and long run)问题提出来的，适合于自然景物的整体描述[14]，其局部特性与图象的局部特性吻合不好，不易描述自然景物图象的局部特征。将 FBM 中的时间（一维）坐标推广到空间坐标(多维)，便得到分形布朗随机场（Fractal Brownian Randorm field－FBR 场）。其定义如下[15]:

定义 4: 设 $B_H(t)$为一高斯随机场。对于 $0<H<1$，若 $B_H(t)$满足:

$$P_H\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^{H}}<y\right)=F(y)$$

则称 $B_H(t)$为 FBR 场，当 t 为一维时，即为 FBM。式中 $P_H(\cdot)$表示概率测度，F(y)为零均值高斯随机变量的分布函数。若定义 4 中的 t 和 Δt 取离散值，就可得到离散分形布朗随机场（Discrete Fractal Brownian Random field－DFBR 场）。

$B_H(t)$具有如下性质[3,12,15]:

性质1: $E|B_H(t+\Delta t)-B_H(t)| = E|B_H(t+1)-B_H(t)|\,\|\Delta t\|^{H}$ (3)

性质2: $E|B_H(t+\Delta t)-B_H(t)|^2 = E\,B_H(t+1)\quad B_H(t)|^2\,|\Delta t\|^{H}$ (4)

性质3: $E\,B_H(t+h\Delta t)\quad B_H(t)|^2 = h^{2H}E|B_H(t+\Delta t)-B_H(t)|^2$ (5)

式中 H 为任意正数。式(5)表示 DFBR 场增量具有在 H 参数下的自相似性。DFBR 场相关函数与时间有关。所以它是非平稳场。Pentland[15]对自然景物纹理图象进行大量实验，发现绝大多数自然场景在局部区域较好地满足 DFBR 场的统计特性，并认为 DFBR 场作为图象模型较为合适。然而 DFBR 场在大尺度范围内的统计特性并没有被验证。Peleg 证明了[16]自然界纹理在中大尺度范围内不满足 DFBR 场。另外 DFBR 场不具有平稳性，数学上不易处理。考虑 $B_H(t_2)-B_H(t_1)$增量 它是平稳的，因此定义，$I_H(t,d) = B_H(t)-B_H(t-d)$，此式实际上是将式(5)中的 1 变成任意位移 d。称 $I_H(t,d)$为离散分形布朗增量随机场(Discrete Fractal Brownian Inscreasing Random field—DFBIR 场)。文献〔17〕给出 DFBIR 场另一种形式的定义。

定义 5: 设 $I_H(t,d)$为一各向同性平稳场,若其相关函数为 $R_H(s,d) = 1/2[(1+\|s/d\|^{2H})+(1-\|s/d\|^{2H})-2\|s/d\|^{2H}]$，则称 $I_H(t,d)$为广义 DFBIR 场，若 $I_H(t,d)$又是高斯的，则称 $I_H(t,d)$为 DFBIR 场。

图 1 为 dfBn 的相关函数曲线。当 $H=1/2$，$R(k)=0$，即处处不相关；当 $H<1/2$ 时，R(k)为负值，可见 dfbn 仅适合于处理 $H>1/2$ 的图象。图 2 为 DFBR 相关函数曲线。它是非平稳的，与 t 相关，t 越大，R(τ)曲线下降越缓慢。图 3 是 DFBIR 相关函数

曲线，在大尺度范围内（s／d＞1），它即为 dfBn 相关函数；在小尺度范围内(s／d＜1)，它接近于 DFBR 场相关函数；在 0＜H＜1／2 时，DFBIR 相关函数在负值接近零处振荡．图 4 为实际纹理的相关函数曲线．a 对应于长记忆长相关纹理（如海洋、沙漠等），b 对应分形图象(如断口，第二相质点表面等)，c 对应一般自然图象(如航空图象纹理等)．对于分形图象，其相关函数也在负值接近零处振荡．可见 DFBIR 场与实际情况最接近[18]．由图 4 可知，R(d)在 s＝4～5 时接近零，对于具有分形特征的纹理一般 s＝0～4 之间其有幂函数特性，因此估计 H 参数仅限于在此范围内，s＞5 以后，参数估计意义不大．这也符合 DFBIR 在小尺度范围内与 DFBR 等价．由于 DFBIR 场吸取了 dfBn 和 DFBR 场的优点，并具有平稳特性，所以，DFBIR 场实现了对图象纹理的综合描述，适合于作为图象处理的数学模型．可以证明[18,19] DFBIR 一阶矩，二阶矩与 DFBR 场具有相同的幂函数特性，如式（3）（4）．利用此特性可对分形参数进行估计，下面结合 DFBIR 场在材料断口定量分析中的不同应用给出其相应的估算方法．

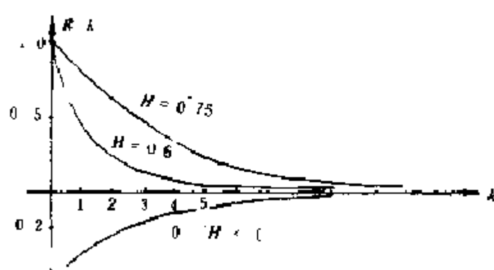


图 1　dfBn 相关函数曲线

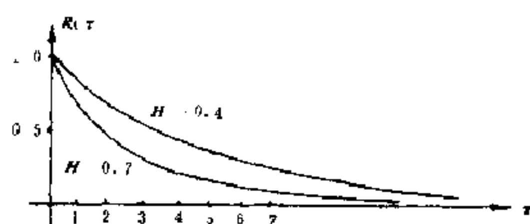


图 2　DFBR 的相关函数曲线，对应 l＝5

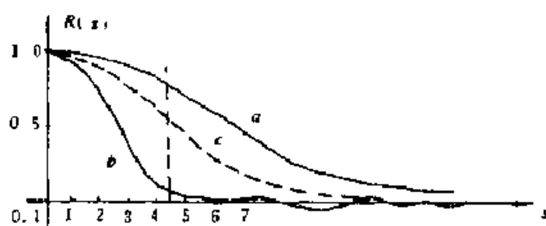


图 3　DFBIR 场相关函数曲线，对应 d＝5

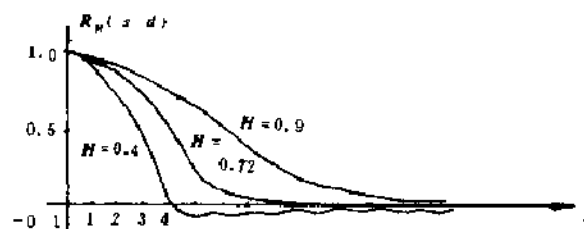


图 4　实际纹理的相关函数曲线

三、DFBIR 场在材料断口定量分析中的应用

1. DFBIR 场在研究断口中第二相质点表面形貌中的应用。

第二相质点对断裂过程的影响甚为重要，尤其是在延性断裂过程中，第二相质点形态，大小及其分布强烈影响断裂的应力、应变以及断口的形貌．但目前，无论是研究质点对延性断裂三阶段影响或是研究质点对力学性能影响，描述质点状况的参数仅是平均尺寸、形状因子或体积百分数，还没有任何参量来描述质点的 3-D（三维）表面形貌对断裂过程的影响，因此不能满足实际工程的需要．这在研究球铁的石墨形态与力学性能之间

关系中反映尤为突出．球墨铸铁的力学性能除与基体组织、石墨球大小，分布有关，还在很大程度取决于石墨球 3–D 形貌或表面起伏程度．传统的形状因子等描述方法，是二维的，本身的计算精确有限，它仅作为质点形貌的定性描述，尽管如此，一些研究表明，现有的形状因子不能很好的与力学性能吻合[20]．也即它们可以具有相同的形态因子，但其力学性能却差别较大．SEM 象给出断口及其第二相质点的精确图象，成为研究材料断裂的重要手段，但它仍存在具有精确的图象而无精确的定量的矛盾．DFBIR 场应用于研究 SEM 灰度图象，很好地解决了这一矛盾．经研究发现其分形参数适合于描述第二相质点 3–D 表面起伏程度．

单一石墨球 3–D 形貌分析技术：石墨球表面形貌是一个各向同性场，随机在石墨表面开窗口，得到一幅 256×256 数字灰度图象．设象素 i 的灰度值为 g(i)，窗口图象即为 $\{g(i)\}_{256\times256}$．考察包括 8×8 个象素的子窗口 $\{g(i)\}_{8\times8}$．利用 DFBIR 场局部统计特性，其一阶矩具有幂函数特性，即 $E\,|I_H(t+\Delta t)-I(t)| = C\,\|\Delta t\|^{H}$ 来估计该子窗口的分形参数 Hi．考虑到石墨球表面灰度为一各向同性场，因此各个子窗口的灰度增量一阶矩可用笛卡尔坐标的两个方向一阶灰度增量来估算，即：

$$E|I(t+\Delta t)-I(t)|_{|\Delta t|=m} = (1/M)\left[\sum|I(t+\bar{i}m)-I(t)| + \sum|I(t+\bar{j}m)-I(t)|\right]$$

这里 M 为求和总数 $\bar{i}$ 与 $\bar{j}$ 分别为两坐标轴单位基向量．为获得整幅图象的 H 值，采用二分之一覆盖法移动子窗口，求出共计 64×64 个子窗口的 Hi 值，求其均值即得整幅图象 $\bar{H}$ 值．

$$\bar{H} = \frac{1}{64\times64}\sum_{i=1}^{64\times64} H_i$$

为了考察球墨表面各类起伏的统计特性及其空间分布状态，还通过图象处理系统给出了所有子块 H_i 的统计分布直方图和 H_i 分布图象．研究发现[21]：①$\bar{H}$ 与球墨表面总体 3–D 形貌具有良好的对应关系，可以作为定量表征球墨表面平均起伏程度的参数．②H_i 直方图可以表征球墨表面各类起伏出现的频率及其统计分布特性，能进一步刻划与区分球墨的 3–D 表面形貌特征；③H_i 取阀值可对各类起伏进行轮廓提取，边缘检测或分区分割．运用分形参数均值 $\bar{H}$，H_i 值方图和 H_i 分布图象的分析方法称为图象的"三 H 分析"技术．

石墨群 3–D 形貌度量：球铁的力学性能与球铁中石墨群是紧密相连的．单个石墨球表面起伏不能代表面整体石墨群的表面形貌．在断口上随机抽样若干石墨球，测算其 H 值，加权平均，来代表整个断口的石墨表面起伏将是合理的，而关键的问题是能反映整个断口上石墨 3–D 形貌的 H 值的最少的个数 N_{min} 是多少？通过对 10 种球铁样品 600 张 SEM 照片分别进行实验表明：$N_{min}=50$．这与用切比雪夫定理的理论推测是相符合的．如图 5 是 H 参数的估值与样品数之间关系曲线，可见 N＞50 时，H 参数估值已趋于稳定，这样便获得球铁断口石墨群三维形貌分形参数的精确估算方法．

利用上述分形分析技术，作者作了以下几项工作[21,22]：

<1> 考察了用 SbReMg, MgSi, ReMg 和 ReSi 作为球化剂而得的四种球铁的球墨表面形貌，得到

$$\bar{H}_{(SbReMg)} < \bar{H}_{(MgSi)} < \bar{H}_{(ReMg)} < \bar{H}_{(ReSi)}$$

这表明采用 SbReMg 球化剂有利于获得高质量球铁。

<2>研究了 Bi 对 Mg 球铁表面形貌和机械性能影响及其"时序效应"特征．在 Bi 以与球化剂一起加入与孕育剂一起加入和直接加入型腔三种加入方式下，得到的抗拉强度 (σ_b)，延伸率 (δ) 与 Bi 加入方式的关系为：

$$(\sigma_b,\ \delta)_{加入型腔} > (\sigma_b,\ \delta)_{加入孕育剂} > (\sigma_b,\ \delta)_{加入球化剂}$$

而对的 H 值与 Bi 加入方式的关系为：

$$H_{加入型腔} < H_{加入孕育剂} < H_{加入球化剂}$$

这恰好反应了 Bi 对石墨形貌，实质上是对球墨结晶、生长具有一种"时序效应"。Bi 加入的时效延后，石墨表面起伏减小，有利于提高球铁的力学性能。

<3>研究了分维 FD 与多次多冲击韧性对数值 logN 之间关系，发现 logN 随着 FD 增加呈单调线性减少．可表示为：$\lg N = aFD + b$，该式可变为：$N = C \cdot \exp(a \cdot FD)$，$C = e^b > 1$．式中 a，b 其值与冲击能量 W 有关．当 $W_1 = 1.108N \cdot m$ 时，$a_1 = -5.63$，$b_1 = 24.59$；当 $W_2 = 1.889N \cdot m$ 时，$a_2 = -2.21$，$b_2 = 14.47$。它表明随着球墨表面分维增加，球墨铸铁多冲韧性值呈负指数函数趋势减少；当冲击能量 $W_1 < W_2$ 时，$|a_1| > |a_2|$．这表明在球墨铸铁构件承受多次冲击能量较小时，其多冲韧性对球墨表面分维的敏感性更大．因此，在此工况条件下对球墨铸铁构件的球墨圆整度与表面平滑程度应要求更高．这反映了球墨表面起伏程度与球铁多冲韧性之间的一种内在联系，表明球墨表面分形参数 H 可能作为衡量球铁多冲韧性的一种变量．

<4>考察了在高球化率条件下，Re／Mg 值与石墨形状因子 (SF)、单位面积上球数 (n) 球墨平均直径 (d) 以及分形参数 H 之间的关系，研究结果表明(如图 6) SF，n，d 对工艺因素的响应性不如 H 敏感与精确，故 H 是定量描述高性能球铁球铁石墨表面形貌的一个更为理想的参数．

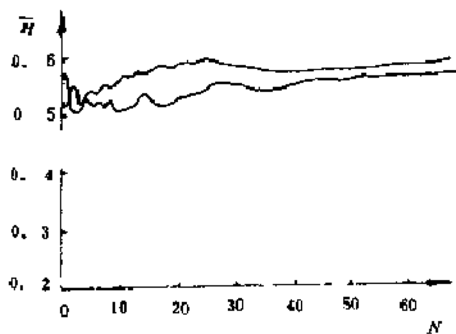


图 5　H 的估值与样品数之间关系曲线

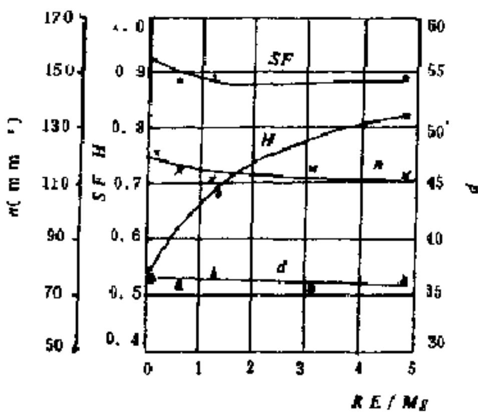


图 6　RE／Mg 与 SF、n、d 和 H 之间的关系

本研究建立了对球铁化学成分，工艺因素——球墨表墨形貌——动、静态性能之间的定量关系，对于球铁的实际生产具有很大指导意义，本研究方法也适合于对复合材料质点 3-D 表面形貌的定量描述．

2. 基于 DFBIR 场的球铁断口分形分析

各向同性断口的分形分析：实际的断口图象与石墨图象不同，它可能是各向异性的，这与断裂过程有关，但在较在放大倍数情况下摄取的 SEM 象仅是断口微观形貌，它是各向同性的。在这种情况下，处理方式与处理石墨 3–D 表貌是类似的，但一些统计量的意义却有些差别。将实际大小为 M × M 断口 SEM 数字图象，分成 $M_1 \times M_1$ 子块。每个子块大小为 $M_2 \times M_2$，为充分利用断口上的信息，各子块间必须有一半重叠，即满足 $M_1 \times M_2 = 2M$。对于每一个子块（i，j）估计参数 H（i，j），H 参数的均值：

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M} H(i,j) / M_1^2$$

$\bar{H}$反映了断口整体起伏。它是断裂 3–D 表面形貌最直接的反映。H 参数方差 δ_H^2 为：

$$\delta_H^2 = \frac{1}{M_1^2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M} H^2(i,j) - \bar{H}^2$$

δ_H^2 反映了一断口整体起伏的离散程度。δ_H^2 越小，表示 H 参数越集中，趋于单一形态的断口。δ_H^2 越大，则表明断口趋于混合形态的断口。

各向异性断口的分形分析：由于实际断口从整体上来讲是各向异性的，而对于各向异性场则不能用上述方法估算 H 值，需要建立各向异性 DFBIR 场的 H 参数计算模型。对于二维 SEM 断口图象，考虑一个 8 × 8 窗口，如图 7 按 8 个方向进行一维 H 估计，则每个窗口可得到 H 测度：$H = \{h(1), h(2), \cdots, h(8)\}$，其中 h（i）是第 i 个方向 H 的一维估计。显然这 8 个方向包含了整个窗口的信息，H 测度的均值为整个窗口的 H 估计。定义 $H = 1/8\sum h(i)$。H 测度的方差显然反映了 H 在不同方向上的变化，因此它可以作为各向异性场的一种度量。定义 $V = (\max\{h(i)\} - \min\{h(i)\}) / H$，设定一个阀值 T：若 $V > T$，则为各向异性断口，当 $V < T$，则为各向同性断口，大量实验结果 T 为 0.5。断口图象的方向定义为最大的 h(i)方向，即方向定义为 $h(dir) = \max\{h(i)\}$。如果是各向同性断口，则设 dir = 0，这时转化成前面讨论过的情况，可用$\bar{i}, \bar{j}$两方向代替 8 个方向计算。

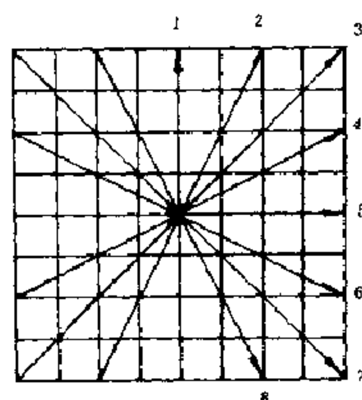
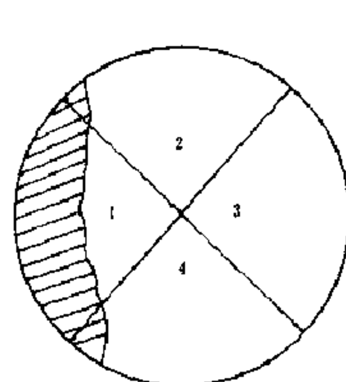
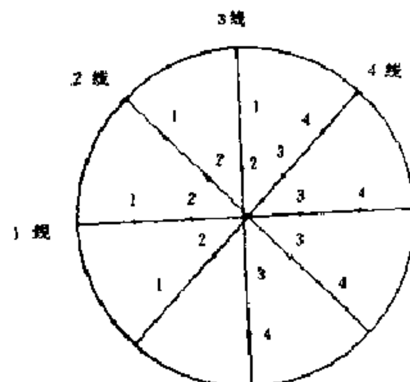


图 7 各向异性区窗口 H 值估计



a. 断口分区(阴影为纤维区)



b. 断口视场确定示意图

图 8 断口分区与视场确定

断口分区与最低统计样本容量：整个断裂表面是复杂的，从宏观来看断口存在纤维区，快速扩展区等，此时需要对断口分区并确定最低视场数，比较分析不同区域分形参数 H，可确出裂纹源等断裂信息，图（8）a、b 是对珠光体基体，铁素体基体和混合基体三种球铁小能量多次冲击断口分区进行 H 值测算示意图。大量的试验数据表明：单一基体的球铁断口仅需 9 点（4×2+1）已足够反映整体的断口 H 值，而混合基体的断口则需 17 点（4×4+1），比较各区的 H 值大小可寻找出断裂源。例如对上述三种球铁小能量多次冲击断口分区测算，结果表明中心区域 H 值最大，它说明裂纹源在中心区域；而对球铁拉伸断口测算则发现最大 H 值区处于边缘，这些计算与实际断裂源所在区是相符合的。

利用上述断口 SEM 象分析分析方法估计了 650 倍下韧窝与解理形貌元的 H 值，得到 $H_{韧窝}=0.542$，$H_{解理}=0.479$。通过小能量多冲球铁断口形貌大的 H 值测算得出了区分断口类型的如下 H 判据：$H<0.481$，断口为解理断口；$0.481<H<0.525$，断口为混合型断口；$H>0.525$，断口为韧窝断口。

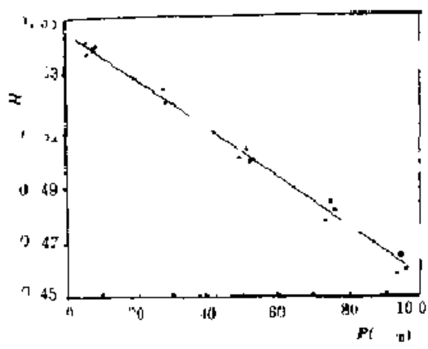


图 9　珠光体量 P 与分形参数 H 的关系

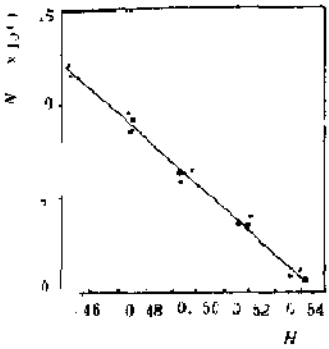


图 10　分形参数 H 与冲击次数 N 的关系

图 9，10 分别是断口分形参数与球铁 P 含量和小能量多冲韧性 N 之间关系，它们都呈线性的。这些数据表明，断裂表面分形参数可以反映断口的类型与断裂机制，而断裂表面与金属的微观结构紧密相连，且能反映材料的力学性能，因此通过大量的试验建立分形参数 H 与冲击次数 N，显微组织之间关系，这对于材料在不同环境条件下失效分析有重要实际意义。

四、结束语

材料断口分形研究中还存在较多问题。应该指出材料断口并不是数学意义上的分形，而是物理意义上的分形。显然把一个物理表面在全尺度范围内看成是分形的观点是不合理的，所以一个物理表面若在一个相对宽的尺度范围是分形的，那么就称它是分形表面。这就涉及到断口表面分形层次、相对稳定的分形尺度范围及其上下限等问题。例如分形上下限问题，其上限可能就是断口本身宏观所能分辨的尺度，小于这个尺度，电镜所摄取的照片无法反映断裂表面起伏，实际上，也就转化成欧氏空间中的点、线、面等几何问题；而下限可能是材料的晶粒尺寸、第二相质点间距、裂纹尖端塑性区等。研究断口的多尺度分

形谱有可能精确描述这些问题。多尺度分形谱就是变倍数摄取 SEM 象，获得一系列分形参数，制成的分形参数 —— 尺度谱线。多尺度分形谱可具有以下几点意义①不同类型的断口可能具不同的谱线，利用它可进行断口模式识别;②断口若存在一个相当稳定的分形尺度范围，则此类断口是分形表面；若不存在一个相对稳定尺度范围，而是一个随尺度变化的，则称此断口是多尺度分形表面，那么其分形层次、尺度范围、上下限等问题也迎刃而解;③在研究力学性能 —— 分形参数之间关系时，多尺度分形谱是确定有效分形参数的依据。关于多尺度分形问题，我们已进行初步研究，获得预期的效果。另外延性断口力学研究起步较晚，在理论还不够成熟。从物理机制上来看，这种断裂具有非线性与耗散性，它分形结构产生的物理机制相洽，将分形参数引入延性断裂理论中，对材料科学发展具有很大的理论与实际意义。

References

1. M. Coster and J. L. Chermant, International Metals Reviews, 1983, Vol 28, No.4, 228.
2. J. L. Chermant and M. Coster, Journal of Materials Science 14 (1979) 509.
3. B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York, 1982.
4. B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, Nature Vol.308, 19, 1984, 721.
5. C. S. Pande et, Acta Metall, Vol.35, No.7, 1987, 1633.
6. E. E. Underwood and K. Banerji, Materials Sci. and Eng, 80(1986), 1.
7. Lung. C. W. Fractal in Physics. Elsevier Science Publishers B. V 1986, 189
8. 穆在勤，龙期威，金属学报，Vol.24, No.2, 1988, A142.
9. C. W. Lung and Z. Q. Mu, Physical Review B, Vol.38, No.16, 1988, 11781.
10. 穆在勤，龙期威，材料科学进展，Vol.3, No.2, 1989, 110
11. 穆在勤，李淑清，龙期威，材料科学进展，Vol.4, No.3, 1990, 247.
12. B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, SIAM Review, Vol.10, No 4, 1968, 422
13. B. B. Mandebrot, Water resource research, Vol.7, 1971, 543.
14. R. L. Kashyap, IEEE Trans, PAMI–6, No.6, 1984, 131.
15. A. Pentland, IEEE Trans. PAMI–6, No.6, 1984, 661.
16. S. Peleg, IEEE Trans PAMI–6, No.4, 1984, 518.
17. 李炳成，分形及其在图象选码中的应用，博士论文，1989.
18. 刘文予，朱耀庭，朱光喜，模式识别与人工智能，Vol.5, No.2, 1992, 116
19. 李炳成，朱耀庭，朱光喜，万发贯，华中理工大学学报，Vol 16, No.6, 1988, 77.
20. 清华大学，球铁，Vol.3, 39.
21. 熊同庆，张军，林汉同，朱耀庭，李炳成，朱光喜，华中理工大学学报，Vol 16, No.5, 1988, 9.
22. 张军，林汉同，朱耀庭，朱光喜，华中理工大学学报，Vol.20, No.5, 1992, 1.

断层与裂缝系统的分形结构研究

汪　富　泉

（四川师范学院数学系　　南充　　637002）

摘要　本文论述了与褶皱和地层产状要素无关的裂缝、区域性裂缝体系、裂缝组系的方位、发育程度和分布等方面的分形规律. 运用拉普拉斯分形、迭代函数系统和分形内插等方法，针对实际地质构造中常见的小断层、小背斜、局部向斜等构造、实际的地面小构造和地震剖面，抽象出一些具有代表性的地质模型对它进行模拟和细化处理，结果与实际的地质构造和地质剖面具有可对比性和较好的吻合性. 在断裂的形成、裂缝的发育与分布及断层和裂缝的关系方面获得了某些新的认识.

1. 引言

来自地质和石油物探界的资料表明，碳酸盐岩储集层由于在其沉积环境、成岩和构造应力影响下，其断层，裂缝，孔隙和孔洞的分布是各向异性、极不均质等强非线性特征. 因此，是典型的无序介质. 这类储集层在四川的分布较广. 比如，已寻找到的位于四川盆地东部的丹凤场气田，就是一个典型的裂缝性气藏. 对于裂缝性油气藏的勘探与开发，仅仅依据构造形态是不够的，需要寻找缝洞体的具体分布. 由于这些缝洞体在储集层中的分布极不规则，非均匀性十分显著. 因此，裂缝发育带的精确预测非常困难. 这样，研究断层与裂缝发育的关系，裂缝发育和分布的规律，对裂缝性储集空间油气资源的勘探与开发具有重要的实际意义. 本文就对这方面的问题进行探讨与尝试.

2. 断层与裂缝的形成机理及其分形结构

研究资料表明，裂缝方向和岩石层理方向之间存在一定的规律. 一种意见认为，裂缝产生于褶皱过程中(褶皱伴生缝)及进一步的构造断裂变形运动中；而另一种意见认为，在成因上裂缝和局部褶皱的形态以及变形运动之间没有任何联系；还有一些学者认为，成岩和构造两种类型的裂缝随着时间的推移而融合在一起. 由此，在没有任何构造因素的影响下，岩石中产生的次生变化也可以形成裂缝. 这样，关于裂缝成因有三种互不相同的假说：褶皱前产生的裂缝、与褶皱同时产生的裂缝以及在褶皱后产生的裂缝. 现代观察资料和研究结果表明：从全球性的大规模构造和人造地球卫星拍摄的大地裂缝到各种不同尺度的断层、裂缝乃至只有在显微镜下才能看到的微破裂，其结构上都存在着相似性. 这可能是由于构造应力或地质作用，在褶皱的形成过程和构造断裂变形运动中，产生各种不同尺度的断带、裂纹、而且向各个方向扩展的结果. 因此，断层与裂缝系统的分形结构表明，裂缝与褶皱同时产生这一假说似乎更为合理. 而且裂缝系统产生和扩展的机理及自相似结构可用拉普拉斯分形理论描述并通过裂缝扩展指数或扩展几率来计算裂缝网络的分维. 而裂缝扩展几率又可以和裂缝参数如裂缝体积密度，面积密度，线密度，裂缝张开度，裂隙率等联系起来. 裂缝空间方位也可以和拉普拉斯分形模型联系起来. 因此，得到了研究裂缝形成扩展及分布规律的一种新方法.

3. 裂缝分类及其分布的分形规律

在外成力作用下岩石内部性质发生变化形成的裂缝为非构造缝，它们在层理面上形成多边形网格，并形成分枝状的分形网络．因此在极短的距离内，裂缝方向就发生变化．它包括成岩缝和收缩缝．另一类则为构造缝，分为张裂缝和剪切裂缝，分别是正应力和切应力作用的结果．按照时间演化，可将裂缝分类为：成岩裂缝、构造缝和风化裂缝，而按照尺度范围，大致可划分为层裂缝（不超出相同岩性地层范围），局部缝（切割了不同岩性地层）和区域缝（超出局部构造范围）．从空间分布看，某些不同方向的裂缝组系组合在一起，给人的表观印象似乎是无序（混沌）的．实际上，岩石裂缝具有自组织性．无论是在时间尺度上还是在空间尺度上，都具有一致的几何形态．通常情况下，裂缝网络由两组方向互相垂直的正交于层理面的主要裂缝组系组成，只在个别情况下，可能由一组平行于层理面的水平裂缝组系（如薄层）或三组垂直裂缝组系（如泥灰岩）组成．不仅宏观的断层系如日本断层系、圣安得列斯断层具有相似结构，而且微破裂如大理石的微观断裂也具有自相似结构．裂缝与断层虽有尺度上的差异，但在几何结构上具有一致性．广义地，断层也可归结为裂缝．即"岩石裂缝"包括了地壳中大小及成因极为不同的各种断裂变形．

断层与裂缝系统具有分形分布．地面观察和岩心取样分析的结果表明，地表露头上的裂缝组系与地下深处具有相似性．地下深处有效裂缝密度最大的地方也就是上部地层或天然露头上的裂缝强烈发育带．地下深部岩石裂缝强烈发育带与地表的自相似性，对碳酸盐岩地区的油气资源勘探具有实际意义．地表广泛发育的河谷水文网方向与裂缝方向密 [illegible] 大规模融岩的形成与裂缝延伸方向一致而且经常沿裂缝发育．这不仅说明岩石裂缝与地质构造有关而且说明了其分布上的自组织与分形结构．有些学者认为，岩石裂缝可分为两类，一类的方向及形成机理与局部褶皱作用有关，另一类则与褶皱和地层产状要素无关．后者具有构成地壳的分形网络结构，这种结构具有全球性特点，在从大到小的各种尺度上具有分形分布．区域性裂缝的布和发育也具有分形规律．不同地区，不同地层中的裂缝组系具有自相似性，裂缝发育的方位也具有自相似性，例如数量上，正交裂缝组系占优势而斜交组系次之．不连续裂缝的分布也具有这种性质，它分布于不同尺度的范围之内．考虑到断层裂缝分布的统计自相似性和非均匀性，较合理的是选用多重分形描述裂缝的分布规律．把实际的断层裂缝系统划分成粗的均匀网格，根据裂缝密度或裂缝率求出每一网格内的裂纹生长几率，并对网格进行细化，可求得定量表征非均匀分布的广义维数谱或奇异谱．

4．断层与裂缝系统的模拟

从前面各节的论述知道，一个区域内的断层与裂缝存在着自相似结构．因此，我们可以运用与分形有关的数学模型，根据已知断层对其区域内的小断层及裂缝发育带进行模拟与预测．

首先，我们可将裂缝参数与 DBM 模型结合起来，求出适当的裂缝生长几率，应用拉普拉斯方程，在正方形点阵上模拟裂缝的扩展与分布，得到裂缝网络．该网络的分维可由平均场理论和模拟参数确定．

数理统计是裂缝研究中的常规方法，把数理统计的研究结果与克龙内克尔矩阵乘积法相结合，经过迭代，可模拟断层与裂缝系统的多重分形分布．其奇异谱或广义维数谱可用数盒子法，固定半径法和固定质量法等方法求得．我们在正方形网格上模拟了一个容量维 $D=1.6$ 的系统，与实际剖面较为吻合，由此合理地解释了该油气储集结构的连通性与渗流性．

运用巴昂斯勒和德门科建立的迭代函数系统和分形内插法并结合裂缝扩展过程中的随机

性，我们建立了模拟断层与裂缝系统的模型，对一些具有代表性的结构进行了模拟．以 P_1 层为模式设计的断层落差约 30 米，断开三个层面的小断层模型，模拟结果可以发现沿断面的破碎带．对常见的拱曲、拗陷、平台三种不同形态的断块模型模拟的结果，在背斜拱曲的顶部，折曲最大的点下方出现较宽的破碎带，局部凹陷部位则在界面上方出现较宽的破碎带．对实际地震记录瞬时相位剖面上的解释小断层模拟结果，在构造转折部位出现一些成群小断层及破碎带，与瞬时相位解释结果吻合较好，从实际岩心样本中选取小背斜和局部向斜裂缝样品，提取少数型值点构成地质模型，模拟结果，背斜的转折部位出现明显的裂隙分布和小断层分布，而向斜底部有一系列小断层出现．模拟结果与实际样本的裂缝网络极为接近．模拟断层，裂缝网络的分维，由型值点和垂直标度因子决定，在上述各模拟系统中，除平台断块系统有非常接近 1 的分维以外，其余系统都是分维大于 1 的断层与裂缝网络．

5. 结 语

上述研究说明，碳酸盐岩等岩层中的断层与裂缝系统虽然复杂，但表观无序中蕴含了系统的自组织．裂缝网络在几何形态、发育程度及分布等方面都存在分形的规律，模拟结果与实际地质构造的吻合性说明，分形理论不失为研究断层与裂缝系统的一种新方法．但应指出，目前国内在这方面的研究工作还不多，研究的时间也不长，理论和应用方法还不完善，本文中的某些观点也是一户之见，愿与同行们共同探讨．

参 考 文 献

1. 汪富泉等，关联维数在油气勘探中的应用，中国海上油气（地质），Vol 6，No2，(1992)，61－67.

2. 汪富泉等，油气预测的新方法研究，<<运筹与决策>>．ORSC' 92，成都科技大学出版社(1992)，1830－－1836.

3. 汪富泉等，G－－P 算法的改进及其应用，计算物理(待发表)．

4. 汪富泉等，非均匀介质中地震波能量的分形分析，第一届全国地质科学与分形理论学术讨论会论文集，中国地质大学出版社(出版中)．

5. 汪富泉等，小波理论在地震信号分析中的应用，中国地球物理学会年刊．地震出版社，(1992)，3.

6. M. F. Bansley，Fractal Everywhere，Acadmic Press Inc. (1988)

关于岩石材料断口的分形分析*

胡事民　　金以文
浙江大学
陈智纯　　黄平
中国矿业大学

一　引言

岩石材料在客观上最终破裂，与其内部微观结构及其外加载荷情况紧密相关，而断口表面往往是凹凸不平的。用分形维数来刻划岩石材料断裂表面的粗糙程度，有助于从岩石材料破坏之后的断裂表面的分析，去推测材料之所以发生断裂的机理。

对岩石断口的定量分析主要有两种方法，一是岛湖法，以断裂表面的横截面为研究对象，由周长-面积关系

$$P(\delta) = C \cdot \delta^{1-D} \cdot \sqrt{A(\delta)}^{D} \tag{1}$$

来确定分形维数，其中，$P(\delta)$ 为码尺 δ 测量分形集所得的周长，$A(\delta)$ 为以 δ^2为单位，测量分形集所得的面积。另一种方法是纵剖面线法，即以材料断裂表面对断口的相贯线为研究对象，由

$$L(\delta) = L_0 \cdot \delta^{1-D} \tag{2}$$

来确定分形维数，其中 $L(\delta)$ 为码尺 δ 测量纵剖面线得到的长度。许多研究者提出了这样的问题，岛湖法应取怎样的层剖深度，才足以求得最恰当的断口分形维数值？同样，对于纵剖面线法，应选取怎样的切剖面角度呢？其实，这两种方法所求得的维数，不是断口表面的真正的维数值，而只是低一维的近似值。我们采取这种权宜之计，原因在于测量高维分形集维数的技术上的困难。乞今实验上仍难以测量三维分形曲面的维数值。

本文从截集的概念出发，讨论了分形集与其截集之间的维数关系，并且给出一个维数近似计算公式，从而改进了已有的断口定量分析方法。

二. 截集与维数估计

对于 Euclid 空间 E^n 中的点 x，有 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$，其中，$e_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为 E^n 的标准正交基。对于超平面

$$L = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, x \in E^n\}$$

和给定的分形集 F，$F \cap L$ 称为 F 关于超平面 L 的截集。特别的，关于超平面

$$L_{x_i=b} = \{x \mid x_i = b, x \in E^n\} \tag{3}$$

的截集，记为 $F_{x_i=b}$。

许多作者研究了各种分形集 F 的截集 $F_{x_i=b}$ 的维数计算。我们从实际应用出发，更关

---

* 本文受煤炭基金和浙江省自然科学基金资助

心能否从 F 的一系列截集的维数计算，反求 F 的维数。正由于高维分形集，特别是三维分形曲面维数计算的困难，这个问题有很现实的意义。

定理 1. 对于分形集 F，$F_{x_i=b}$ 如上定义，$Proj(F)$ 表示 F 在轴 $\{x\ x_j=0, j\neq i, x\in E^n\}$ 上的投影，则

$$dim(Proj(F)) + \inf_b(dim(F_{x_i=b})) \leqslant dim(F) \leqslant dim(Proj(f)) + \sup_b(dim(F_{x_i=b})) \quad (4)$$

这里 $dim(F)$ 表示分形集 F 的盒计数维数。

证明 令 $dim(Proj(F)) = d_1$，$\sup_b(dim(F_{x=b})) = d_2$，由于维数值是有界值，存在 b_0，使

$$\sup_b(dim(F_{x=b})) = dim(F_{x=b_0}) = d_2$$

则用边长为 δ 的 E^n 中的方网格覆盖截集 $F_{x_i=b_0}$，需要用网格数为

$$N_1 = c \cdot \delta^{-d_2}$$

而覆盖 $Proj(F)$ 需要的长为 δ 的一维网格数为

$$N_2 = d \cdot \delta^{-d_1}$$

所以用边长为 δ 的 E^n 中的方网格覆盖 F 所需网格数为

$$N < N_1 \cdot N_2 = c \cdot \delta^{-d_2} \cdot d \cdot \delta^{-d_1} = c \cdot d \cdot \delta^{-(d_1+d_2)}$$

从而

$$dim(F) \leqslant dim(Proj(F)) + \sup_b(dim(F_{x=b}))$$

同理可证

$$dim(F) \geqslant dim(Proj(F)) + \inf_b(dim(F_{x_i=b}))$$

证毕。

由[1]之定理 7.12，不难证明，上述结论对 Hausdorff 维数也成立，从而改进了高维空间的投影定理[1]。由上述定理，在维数近似计算中，我们可采用如下近似公式

$$dim(F) = dim(Proj(F)) + \sigma(dim(F_{x_i=b})) \quad (5)$$

这里 σ 表示平均值。

例. Sierpinski 地毯。

选择适当的直角坐标系 XOY，使 Sierpinski 地毯之四个角点的坐标分别为 (0,0)，(0,1)，(1,0)，(1,1)，我们有

(1). 当 $y = \frac{2^i \quad 1}{3^n \times 2} \qquad 0 \leqslant i \leqslant 3^n, n = 0, 1, \cdots$

$$dim(F_y) = \inf_y(dim(F_y)) = \frac{ln2}{ln3} = 0.6313$$

(2). 当 $y = \frac{i}{3^n} \qquad 0 \leqslant i \leqslant 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$

$$dim(F_y) = \sup_y(dim(F_y)) = 1$$

我们简单地取

$$\sigma(dim(F_y)) = (\sup_y(dim(F_y)) + \inf_y(dim(F_y)))/2 = 0.8156$$

由近似计算公式 (5)

$$dim(F) = dim(Proj(F)) + \sigma(dim(F_y)) = 1.8156$$

而 Sierpinski 地毯之实际维数为 1.89。可见近似公式 (5) 在实际工程应用中，精确程度是可以接受的。

二、定量分析方法的改进

材料断口表面是极不规则的，可以认为具有统计自相似性，因此通过测定其分形维数来刻划不规则性。利用上节的近似计算公式，我们改进了岛湖法和纵剖面线法。

1. 改进的岛湖法

在材料断口表面上，涂上一层金属粉沫(或镀金)，沿着平行于断裂表面的方向上，一层层地磨去，我们称凸出来的部分为岛，凹进去的部分为湖。在光学显微镜下使用固定的码尺，可以测量这些非规则的岛与湖的周长和面积，由周长与面积关系(1)，可以得到一系列截面的周长的分形维数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$。另外，由于抛磨的深度，截面与断口总是有交集，因此在垂直于它轴向上的投影集 $Proj(F)$ 的维数为 1。在实际的测量中，可以取 n 为 20 次左右，由近似计算公式(5)，得到断口的分形维数近似值

$$D = 1 + (\sum_{i=1}^{n} d_i)/n \tag{6}$$

2. 改进的纵剖面线法

在材料断口上涂上一层金属粉沫(或镀金)，将试件平行于某一个垂直于断口的平面抛磨，将抛光的纵剖面在光学显微境下照相，利用图象分析技术，可以提取纵剖面线，由此可以得到一系列纵剖面线，由(2)即得到一组分形维数值 $d_1,d_2,\cdots,d_m$。由于纵剖面与断口表面交集总是非空，故断口表面在垂直于抛磨面的轴向上的投影集 $Proj(F)$ 的维数值为 1。由近似计算公式(5)，得断口的分形维数近似值为

$$D = 1 + (\sum_{i=1}^{m} d_i)/m \tag{7}$$

以上两种改进的方法，算得的维数值不再是低一维的近似值，而比较接近于断口的实际近似值，这无疑有助于研究材料断裂的机理。另外，还要指出，由公式(5)，可以改进研究岩石断裂的 Cantor-Dust 方法，得到与 (6)-(7) 相似的公式，但公式右端的首项不是 1，而是介于 0,1 之间的数。

参考文献

1. Falconer, K. J; Fractal Geometry: Mathematical Foundation and Application, Wiley NewYork, 1990

2. 刘文予等;金属断口纵剖面的分形分析，第二届全国分形会议文集，武汉，1991

3. 谢和平等;断口定量分析的分形几何方法，工程力学，VOL. 6, NO. 4 1989

4. Velde, B, etc.; Fractal Analysis of Fracture in Rocks: Cantor Dust Method. Tectonophysics, 179, 1990

溶胶—凝胶过程及多孔材料的分形研究

郭国霖　　桂琳琳　　唐有祺
（北京大学物理化学研究所）
（北京国家分子动态与稳态结构实验室）

一、引言

溶胶凝胶过程已成为制备高技术新材料的重要方法，多孔材料是重要的功能体系（实例）。

分形理论对溶胶过程及多孔材料的应用是分形研究最富有成效的范例之一。

二、多孔材料的分形研究

多孔材料具有高比表面和可调孔分布，在吸附、催化、固体电解质等众多方面有广泛的应用前景。

硅胶、γ－氧化铝和活性炭是分形研究的早期对象之一。

近来用超临界法制得的气凝胶是一类新材料，其密度仅 0.02g/cm^3，孔隙度达到 99%，它是只有‘皮’，没有‘肉’的真实分形怪物。

多孔催化膜是反应—分离一体化的新材料，累积孔体积与孔径的函数关系，可用来求分数维，多孔膜的分形特征是膜形成机制的直接结果。

其它多孔物质的分形研究结果。

多孔材料中反应的分形动力学特征。

多孔介质中的流体扩散与传输特征。

三、溶胶—凝胶过程的分形研究

通过溶胶—凝胶途径可制备众多功能材料。

激光光散射、SAXS、SANS 和 TEM 对溶胶，凝胶结构的分形研究。

溶胶—凝胶的转变，分形凝聚的平衡研究及动力学研究。几何自相似及动力学自相似，分形凝聚的多标度特征。

溶胶—凝胶过程的非线形动力特征

四、展望和结束语

分形理论的进展将为溶胶—凝胶过程及多孔材料的研究提供更有力的方法和观点。

溶胶—凝胶过程和多孔材料的广泛应用和开发将为分形凝聚和分形结构提供富有启发的原型，它的高科技应用背景将是分形理论发展的强大动力。

黄铜在粘着磨损形成过程中的分形结构

沈阳工业学院　　张志军　贾春德　吴希平

摘要：本文着重讨论了有色金属黄铜在粘着磨损形成的动平衡过程中的分形结构，分析了磨粒形成过程中的分形结构与摩擦机制之间的相互关系。

主题词：粘着磨损、磨粒、分形结构、维数

一 引言

物体的摩擦磨损是物体在运动过程中不可避免的一种现象。物体的磨损形式是多种多样的，然而金属材料的磨损发生最多的是粘着磨损。当摩擦付相互接触时，由于表面微观接触的压力很大，引起足够的塑性变形，并使表面 温度因磨擦而升高，从而破坏了表层的氧化膜和润滑 膜，使新的金属材料暴露，造成了材料分子之间的相互吸引，相互渗透，相互粘着或咬焊。在应力的作用下，粘着点附近产生了裂纹，剪应力的作用又使结点在裂纹处分离，形成了粘着磨损的宏观变化，

实际上粘着磨损的形成是一个很复杂的动态过程。而对粘着磨损的研究通常是采用传统的宏观观察法。本文作者用动态的微观试验机观测了 H62 这种材料发生粘着磨损的全过程，并提出了用分形结构，分形维数来研究粘着磨损产生机理的一种新思想，用测定磨擦表面 的分形结构特征，来确定粘着磨损的产生形式及磨损的相对程度。

二 实验及分形维数的测定

试件是在摩擦磨损动态观测实验机上进行的试验。试验装置见图 1 所示。试件材料为拉制的铜锌合金其物理性能见下表，与试件相互运动的摩擦付采用透明度好，易清洗，粘附强度高的碱性平板玻璃。试验条件；销钉用 3um 金刚砂研磨，经退火处理，并采用医用氧作为气体介质，室温，径向加载 36Mpa，摩擦付的相对动速度 12mm/min 单向一次性摩擦。试验过程；在干燥的氧中，用黄铜销针对

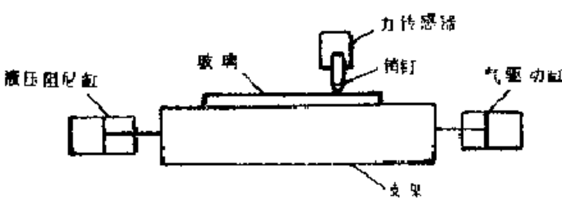


图 1、摩擦磨损动态观测机示意图

H62 材料试件的物理性能表

比热 C (cal/g°c)	导热率λ (cal/cm·s·c°	20c°时线膨胀系数(×10⁻⁶)	电阻系数 ρ (Ω·mm²/m)	弹性模量 E (kgf/mm²
0 0925	0.26	20 6	0.071	1000

磨平板玻璃，用光学显微镜观察运动过程中摩擦付磨损的动态变化过程。在其它条件不变的情

况下，改变摩擦偶件的组合，平板玻璃的粗糙度、摩擦速度和介质种类，以观察试验结果的变化。不同磨损阶段下磨粒分形结构的维数确定：依次选取边长为L＝1，2，3mm的正方形，分别计算各正方形内包含的不为零的格点占有数N，在双对数坐标纸上作lnL，lnN的曲线，取直线部分的斜率即为磨粒分形结构的维数Df。

三观测结果分析

首先是所有的微小磨粒从销钉的前缘生成，并随着相对的波动，这些微小的磨粒变得越来越大，当到达一定尺寸后，这些长大的磨粒便转移并比较稳定的粘附到玻璃一方，形成了粘着磨损。

3.1 成核区

成核区的分形结构见图2的1区。此区是核磨粒的产生区。由图可见，没运动时，玻璃与销钉有清楚的界面。运动开始时，静、动摩擦力处在交替变化过程中，靠近界面处静摩擦力较大，没有明显的核磨粒产生。随着运动的进行，摩擦力趋于减小，由于切向应力较小，这时，只有铜销钉表面上那些原来就有裂纹的晶界产生破裂，产生了少量的核磨粒。这些小的核磨粒呈岛状结构，并随机分布在摩擦区内。随着切向应力和塑性变形的增加，岛状结构的核磨粒数量在不断增多，许多相邻的小岛在无规则的运动中，在分子间亲合力的作用下相互粘在一起，当切向力最大时，核磨粒产生的最多，此时的分形维数Df＝1.82，见图3曲线1。这个成核区宽度为1.0，1.2um之间，表面光滑，没有微凸体粘着后撕裂结点的迹象。该区核磨粒的尺寸约0.05至0.1um，核磨粒略长，呈薄片状，并略有分叉开放的辐射分形结构。从该区的分形结构来分析，表明核磨粒在生长过程中，摩擦力和切向应力的变化起主导作用。材料内部的空穴积聚、位错塞积及晶界腐蚀等因素，导至亚结构晶界产生微裂纹、裂纹沿晶界扩展使晶胞相分离，分离的晶胞吸附到玻璃表面上，一个核磨粒便诞生了。

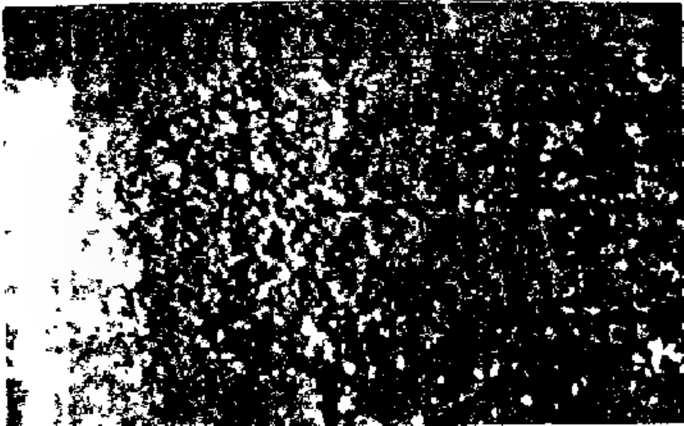


图2、不同阶段的磨粒分布结构图

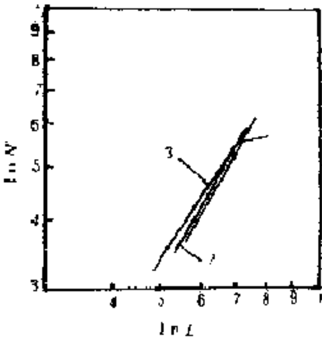


图3、分形维数曲线

核磨粒在形成以后，由于运动产生了摩擦热。在热激活能的作用下，许多核磨粒在摩擦表面上做了微小的有规则的偏移运动，发生了质量迁移，使摩擦表面能最小。此外，还由于此区的分形结构呈分叉状，能量消耗较小，状态比较稳定。

3.2 摩粒兼并长大区

当铜销钉运动到摩擦力趋于稳定时，核磨粒停止生成。此后，随着运动的继续，磨粒的结构

尺寸明显迅速增大，岛呈无规则的分叉，且周边光滑的分形结构。见图2Ⅱ区。此区宽度较大，整个表面布满着极小的长大着的磨粒，每个磨粒都由若干更小的核磨粒组成。由于Ⅰ区磨粒表面能随着表面积的突然增大而迅速增高，这些高表面能的小微粒趋于相互结合以减少其表面能而处于一种较稳定的状态，因此磨粒长大率相当高，由兼并而长大的磨粒的分形维数 Df=1.84，见图3曲线2。由磨粒的分形结构可以得知，磨粒的长大过程不是以摩擦力为主导，是以粘着、吸附、兼并机制为主，此间没有出现滚动粘着的现象。

该区磨粒的结构尺寸约为0.26—0.58um，且随机分布。此外，Ⅱ区的分形维数略大于成核区的分形维数，说明仍有少量的核磨粒在产生。在转移长大区内，许许多多的核磨粒在粘着—吸附长大机制作用下相互兼并和堆积长大，促使了局部长大区结构的调整，使磨粒在运动中完成了长大过程，并形成了较大的岛状、周边光滑的分形结构形貌。有些无规则的分叉则是由金属材料的塑性流动过程所制，光滑的周边则是由在吸附过程中表面能的耗散，磨粒分形结构趋于稳定、平衡状态所制。

3.3 粘着磨损区

Ⅲ区为粘着磨损区。此区以粘着—转移—粘着机制为主，同时还伴随着后材料的撕裂及硬质点的耕犁效应。由于最大剪应力是发生在摩擦表面的内层，长大的磨粒受到交变力的作用，结合部产生疲劳破坏。脱离了玻璃表面的磨粒可能再转移回铜表面上，较牢固的粘附和镶嵌形成了磨粒滞溜和积聚，局部的积聚层因阻止向它们运动着的磨粒而迅速长大，于是，形成了面积较大的转移层。转移层会不时地破裂形成大的磨粒团，这些转移长大的磨粒团又再次粘附到玻璃表面上，形成了粘着磨损。随着相对滑动，一些较硬的磨粒便在摩擦面上犁出较深的沟痕。粘着磨损区的分形结构呈尺寸大小不一，外貌不规则的岛状。其分形维数 Df=1.74，见图3曲线3。由于维数的变化，可知粘着—转移长大的磨粒在Ⅲ区内的占的面积比Ⅰ、Ⅱ区磨粒所占的面积减小，磨粒的厚度增加。此区使磨粒形貌改变的主要机制是粘着。摩擦表面的磨损较严重。

四、结论

1. 粘着磨损的形成过程是一个动态变化过程，核磨粒形成的先决条件取决于材料的塑流层。磨粒生成及长大过程决定、制约着摩擦和磨损。

2. 不同阶段磨粒的分形结构取决于制约机制的不同变化。分形维数的变化在一定程度上反映了粘着磨损的不同阶段，即发生磨损的相对程度。

参考文献

1. 贾春德，磨粒生成及长大机理的新探索，机械工程学报，1989年，第四期

2. Mandelbrot B、B，The Fractal geometry of nature，new Your，Freeman，1982

3. 温诗铸，摩擦学基础，清华大学出版社，1991年

4. 肯尼思·法尔科内著，曾文曲、刘世耀译，分形几何—数学基础及其应用，东北工学院出版社，1991年

5. 林鸿益，非晶态半导体中的分形结构，化学研究与应用，1991年，第四期

先进耐磨陶瓷的冲蚀表面的分维特性

徐利华（浙江大学材料系）　陈刚（浙江大学数学系）　丁子上（浙江大学材料系）

一.引言

自70年代Mandelbrot提出分形几何以来，分形理论已经引起众多领域中的研究者兴趣，它成为人们研究自然中貌不似规的形体的一个有力的数学方法。

P.R.Stupak和J.A,Donvan[1]首次将分形维数引入到磨损研究中。他们采用橡胶材料在磨擦磨损实验机上以不同的输入功进行磨损实验，用测量的尺度和长度之间的关系确定磨损表面的分形维数，A.Hammersten等人[2]也进行了一些有意义的工作，李长春等人[3]近期对16Mn钢的冲蚀磨损实验作了研究，但是从目前有关文献看来，分形几何在磨损力学行为中的应用仅仅还处于起步阶段，而且分形理论在数学上还有待于完善与发展，因此还未能从材料的磨损机理方面与材料的分形特征之间加以有机地结合起来。

冲蚀磨损是一个复杂的动态力学过程，它涉及到诸多因素。陶瓷材料的冲蚀磨损表面属于非规整的几何表面，它蕴藏着关于冲损伤表面的丰富信息，在统计上遵从分形的规律，可用分形维数对其非规整几何量进行定量描述。本文按Mandelbrot的分形概念，对复相陶瓷磨损表面形貌特征作定量的研究和分析。

二.磨损实验和分形测量

本文所用的耐磨试样为ZrO_2-Al_2O_3-TiC(ZAT)三元复相陶瓷，采用热压烧结方法制备。在射流型冲蚀磨损试验机上进行冲蚀磨损实验，选用80目的SiC磨料作为冲蚀粒子，冲蚀频率为8.0g/min，冲蚀条件和实验结果如表1所示。实验后的冲蚀磨损试样经线切割取样，用两种不同测量方法测试其分形维数。第一种方法用超声波清洗样品表面，并在S570型扫描电子显微镜下记录二次电子线扫描曲线，采用不同尺码(r)度量二次线扫描的线段总数N(r)，按以下公式求出Hausdorff分形维数D[4]。

$$N(r) \propto r^{-D_H} \qquad (1)$$

第二种方法是将样品表面置于6JA干涉显微干涉仪下观察，并按不同比例印相得到相应的图象，用求测度的方法测量出磨损表面的小坑周长L和面积S，并计算出相应的分形维数Ds，计算式如下[8]：

$$S^{1/2} \propto L^{1/D_s} \qquad (2)$$

将以上两种方法所测得的不同试样表面的分形维数列入表1。

表1　ZAT陶瓷材料在不同冲蚀磨损条件下的冲蚀冲蚀量和分形维数

试样编号	I	II	III	IV
冲蚀速率(m/s)	90	60	45	30
lgEv	2.2	1.9	1.8	1.1
D_s+D_h-3	0.51	0.40	0.28	0.13

三、分析与讨论

脆性材料冲蚀微观机理认为冲击粒子冲蚀靶材表面形成的横向裂纹与纵向裂纹(或环形裂纹)相互连结并贯穿而导致材料磨损。Evans.A.G[6]等从不同角度研究了材料的磨损行为和磨损机理(但与实验值相比总存在较大偏差)，他们对体积磨损速率基于以下的假设：

$$Ev \propto h \cdot S \propto h \cdot r^2 \qquad (3)$$

式中h为横向裂纹深度，r为纵向裂纹(环形裂纹)的长度。

实验表明材料的冲蚀表面具有较明显的分形特征，由于二次电子线扫描反映了沿该方向向上的侧角θ的变化，二次电子线扫描的相对高度$H=K/\cos\theta$[8]，其中K为常数，θ为入射点的面法线与入射电子束之间的夹角，该方向所测得H反映了材料中所形成的小坑的相对深度分布状况。事实上所测D_h是一种表观分维值。

在不同冲蚀条件下材料的体积磨损速率与材料磨损表面之间的关系如表1所示，

由于ZAT复相陶瓷材料本身仍为脆性材料性质，随着粒子的冲击速率的增加，材料表面的负载也相应增加，因而材料表面的分形维数也就提高。Hausdorff分形维数实质上反映了横向裂纹的扩展深度，当冲击速率较小时，材料表面的冲蚀磨损为一种晶粒的轻微剥落(minor chipping)，这时横向裂纹只在冲蚀点的亚表面核化，当冲蚀速率继续增大，相应材料表面的负载增大并超过其断裂临界值，导致横向裂纹的深度的增加，从而使得材料磨损机制转为大块晶粒断裂(large-scale fracture)占主导的群晶剥落机制，这时速率指数因子n值增大[7]。假定体积磨损速率 Ev 与横向裂纹深度d，纵向裂纹形成的面积S相关，d与S分别为欧氏长度的测量值。可得：

$$Ev/Ev^{0} \sim d \cdot S \sim \varepsilon_{0}^{3-(D_s+D_h)} \qquad (4)$$

其中Ev^{0}是$\varepsilon=1$时的值，ε_{0}为标度且小于1。从而给出

$$\lg Ev \sim 3-(D_s+D_h) \qquad (5)$$

实验结果与理论分析相一致如表1所示。

四．参考文献　（略）

Cu–Zn–Al 合金表面振荡花样[①]的分形动力学过程研究

天津大学　　　　　高后秀、赵燕平、杨渝钦、范宏寅
天津中德培训中心　王建中
南开大学　　　　　杨敬宇

摘　要

本文应用 LEITE Metallux3 金相显微镜和连接在显微镜上的 Panasinic F10 摄像机，首次拍录下在 Cu–Zn–Al 形状记忆合金表面的振荡花样，并将其输入 MICROⅡ–M75 计算机图像处理系统，根据 Sand box 方法，对图形进行分维的测定和分形动力学过程的探索和研究，得到固态相变与非线性动力学相结合鲜为人知的结果。

关键词：形状记忆　振荡花样　分维　分形动力学

Cu–Zn–Al 记忆合金是一种新型功能材料，国内外科技工作者对其进行了广泛深入地研究。我们对 Cu–Zn–Al 合金表面在等温条件下出现振荡花样的实验现象已在论文〔1〕中详细报导，本文应用分形方法对合金表面出现的振荡花样作了初步探索性研究。

1. 实验过程　实验用合金采用电解铜、工业用锌锭、铝锭熔炼成铸锭、再经高温扩散退火–热轧–中间退火–冷轧……而成。试样尺寸为 20×5×1（mm），在 800℃ 箱式电炉中保温 10min 油淬。然后在 LEITE Metallux3 金相显微镜下进行观察、拍录下花样的振荡过程，将其输入 MICROⅡ–M75 计算机图像处理系统，根据 Sand box 方法对图形进行分数维数的测定。

2. 实验结果

2.1　受成分、工艺等因素影响而出现的花样图形大多是分形图形，其分形维数在 1–2 之间。常见的马氏体浮凸，随温度的改变，有时呈现突然出现或突然消失的跳跃变化；有时又呈现连续长大或缩小的变化。(图 1)为我们观察到的具有振荡性的胞状组织，这种组织在一定条件下类似波传播的方式波动振荡。



1

2.2　为了研究整个振荡过程的分形动力学规律，我们选定一个振荡过程，将其输入 MICROⅡ–M75 计算机图像处理系统，根据 Sand box 方法对图形进行分形维数的测定。在一个振荡周期内，不同时刻的图形分维值亦不同(图 2)的分维数为 1.719，(图 3)的分维数为 1.598，表明花样在振荡，分维数值也在振荡，且其数值反映图形的不规则程度。胞状物越细小，不规则程度越大，分形维数值则越小。随时间的推移，分维值最后趋于稳定值 $D_f^0 = 1.651$。

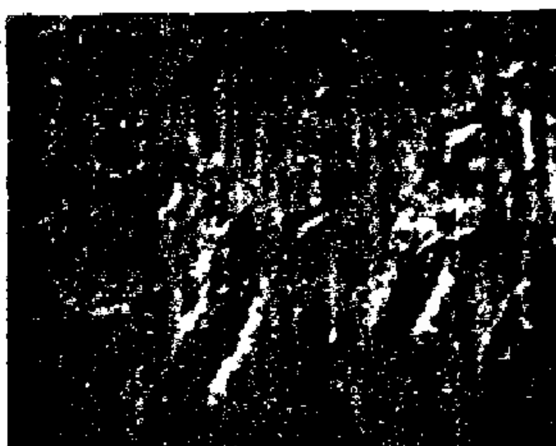
---

①本文为国家自然科学基金资助课题
参加本文工作的还有 92 届天大金相专业毕业生刘国峰、付胜利

2



3

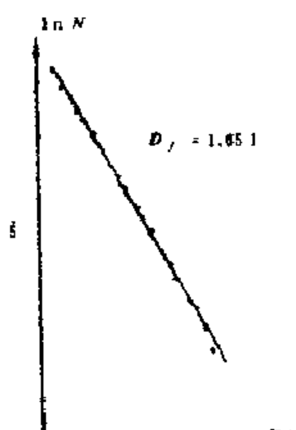


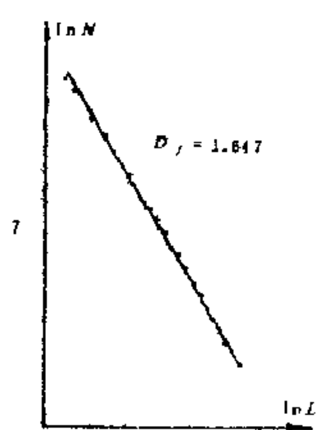
4

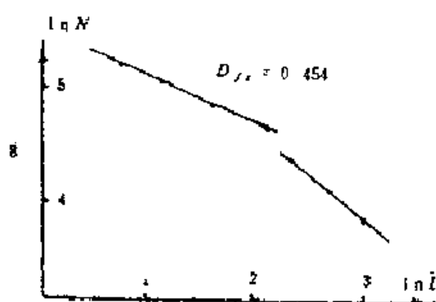


6











2.3　花样稳定后，我们将稳定的花样在200倍时（图4）测其分维（图5），500倍时(图6）测其分维（图7），分维值分别为1.651和1.647，无标度区间在$10^{-3}\sim10^{-1}$mm，同一图形在不同的放大倍数下D_f值相近，就明该图局部与整体为自相似的分形图形。

2.4　上述振荡过程在时间轴上呈现时间分形。采用不同标度的定长时段△t，分别统计出有振段N，然后绘出lnN−ln（△t）图，求直线的斜率得出该振荡过程的时间分形维数$D_{ft}=0.454$，其无标度区间为2−8秒。由（图8）可以看出，在2−8秒区间内，在时间轴上具有良好的自相似性；当$t>10$秒后，N与t大致成反比，恰好等于其拓朴维数，则不存在自相似性。

2.5　振荡过程稳定后，我们在FRANK型硬度计上，测定了有振区域、未振区域的显微硬度（图9），显微硬度数值呈现无规分布。经电子探针测其微区成分，也呈明显的不均匀分布。

3. 试验结果分析

我们设计的Cu−Zn−Al合金，电子浓度为1.42，是一种良好的双程记忆功能合金，其高温时为无序β相，淬火后组织为有序母相和马氏体相。依据工艺的不同，可能使母相和马氏体相的百分比量有所不同，反映了相变点和工作点都会不同〔2〕。而在同一温度下，某一区域内，母相和马氏体相却可以共存，类似为"双稳态"，这可从金相观察、成分测定和显微硬度的测定结果得到证实，但每一个相的成分和数量是不同的，这可以从微区电子探针的分析可知。这些马氏体相大都具有记忆功能，即是"热弹性"的。但由于某种微小"涨落"，就会导致这种母，M两相双稳态平衡的打破，即"失稳"。这种失稳是由于内部某种非线性动力学机制，可能因不同相相互间物质与能量的交换或与外界环境发生能量交换而形成的。我们所观察到的合金表面的振荡花样，其形成过程与普里高津所描述的自组织有相似之处。普里高津指出"尽管分子间相互作用不会超过10^{-8}cm范围，但体系能出现整体性的行为，就好象体系中存在着一个"超级通信系统"，使体系中每个分子都得到了有关体系总状态的信息一样，在体系中某个区域发生的事件，都能在整个体系中得到反响〔3〕。所以我们所观察到的组织形态，有的如同花岗岩中的环状结构、碘化钾沉淀的Liesegang环等自组织现象，就不难理解了。

以上说明采用分形理论可以较好地描述我们已观察到的Cu−Zn−Al合金表面振荡花样的复杂现象。但分形与固态相变及其它性能的关系有待于进一步的研究。

4　结论

4.1　受成分、工艺等因素影响而出现的合金表面金相图形大多是分形图形

4.2　合金表面花样的振荡过程反映在分维数值上也是随时间而振荡变化的。花样不变后，分维值趋于稳定。

4.3　花样的振荡过程具有时间分形。

参考文献:

1　Gao Houxio, Yang Yuqin, Wang Jianzhong, Forschung der Martensitumwandlungen der Cu−Zn−Al Formgeduchtnislegrungen, Practische Metallographie（待发表）

2. 高后秀，杨渝钦，天津大学学报，1990，4，p30

3. 武志贤，自然杂志，1992；8；p597

地质学运用分形理论需要考虑的问题

毕先梅　（中国地质大学　北京　100083）

近年来国内外掀起了一个学习和运用分形理论的热潮，有力地推动着包括地质学在内的各学科的发展．在我国地质学领域内最早应用分形理论的是彭志忠教授．[1]他在1985 年首次发现和提出准晶体具有分数维结构，即在原子和分子层次上的分形结构，此后近十年来，越来越多的地质工作者学习和运用分形理论来解决各种实际问题，诸如地震学（如洪时中，1987）、岩石力学（如谢和平，1989）、矿床学（如秦长清，1989）、水文地质学（如胡尊国，1992）、构造地质学（如索书田，1991）等，取得了许多新的进展．1992年春在中国地质大学（武汉）召开的第一届全国分形理论与地质学学术讨论会，标志着我国地学界分形研究队伍的进一步壮大．然而，尽管地质学分形的研究已取得可喜的成绩，但总体来说还处在初级阶段．本文拟就当前地质学领域分形研究中的一些必须考虑的问题，谈谈自己的认识．

一、地质学所研究的对象是开放的复杂系统

地质学所研究的对象地球及地球上的各类地质体，从本质上来讲是一个开放系统，它与外界环境存在着物质和能量的交换，是一个不断变化着的系统．因此，各种地质作用及这些作用所形成的地质体，大多数都处于复杂的非线性状态，即不规则的分形状态．对地学所研究的对象来说，开放性、不平衡性、无序性、非线性是绝对的、长期的；而封闭系统、平衡状态、有序性、线性则是相对的、局部的、暂时的．这是自然物质自组织过程（包括平衡态自组织和非平衡态自组织）导致的物质构型的多样性、复杂性的反映．这是我们运用分形理论研究地质问题时首先要树立的观点．

这就要求我们充分认识研究对象的复杂性，在研究中要防止简单化．同时，也正是因为地质学的研究对象具有复杂性和非线性的特征，分形理论才能在地质学领域有用武之地．

二、正确圈定无标度区

什么是无标度区？无标度区（scaling range）就是事物自相似性存在的尺度变换范围．例如空中的云团，因受地心引力、地球曲率半径、大气层特征等条件的控制其自相似性是在 1－1000Km范围内才能找到，离开了这个范围，云团就不具自相似性．于是，这个 1－1000Km的区域就是天空中云彩的无标度区．[2]

问题很明显，既然同一无标度区内的物体才具有自相似性，那么，若不能正确地圈定所研究物体的无标度区就无法进行分形维数（D）的求解．同属分散系的悬浊液和乳浊液（其分散质$>10^{-7}$m）、胶体（$10^{-7}-10^{-9}$m）、溶液（$<10^{-9}$m），具有极不相同的物理化学性质，分属不同的无标度区，只能在各自的无标度区内求其分形维数（D）。

在地学领域内如何判断无标度区，是个比较复杂的问题。一般可以认为，在同一条件下形成的同类地质体属于同一个无标度区，因为同一条件下形成的地质体其相似程度最大。

同类而不同期的地质体，具有一定的相似性，但也有非相似性。要分别进行维数计算，进行比较，才能找出其异同；不同类型的地质体，不能划在同一个无标度区内。否则，所求得的分形维数就不能反映这些地质体的真正的分形特征。所以要分别不同类型求分数维。

同一事物可以存在不止一个的无标度区。例如日本东部和希腊的地震的空间分布具有分形特征，存在两个无标度区。越复杂的事物，无标度区越多。能求出多个维数的分形体称为复分形（详见后述）。

无标度区的圈定，与研究的目的、着眼点和精度要求有密切的关系．例如，将分形理论应用于花岗岩的研究时，如果着眼点是为了弄清某个岩区的特点和规律，那么其无标度区就可以按花岗岩的单元或超单元的范围来圈定；但如果是为了对某个单一岩体进行详细的研究，那就至少要按不同的相带（如中央相、边缘相）来划分无标度区。当我们对一个地质体进行详细的解剖时，常常需要将该地质体中有比较显著差异的部分划成不同的无标度区，分别求出它们的分数维．由此可知，由于研究目的、着眼点和精度要求的不同，可以划出不同层次的无标度区．任何具有分形特点的客观事物，包括地质体与地质现象在内，都存在着不同层次的无标度区．灵活而正确地划分无标度区，是一项研究艺术．

下面讨论一下如何圈定具有分形特征的地质体（简称地质分形体）的无标度区的问题。有以下三种情况：

(1) 如果所研究的地质分形体的无标度区具有明确的物理界面，那么其边界很容易圈定，这是不言而喻的．

(2) 如果所研究的地质分形体的无标度区没有明显的物理界面，需要用物、化探数据或化学分析数据加以圈定，那么就可以将实测数据点绘在双对数坐标系统中，连结各点，找出其中线性关系最明显的线段，此线段范围即为该地质分形体的无标度区，线段的斜率即为所研究的无标度区内地质分形体的维数（D）．这种作图法很简便，但只适用于简单分形体．

(3) 对于无标度区很多、又没有明确物理界面的复杂分形体，则必须借助于计算机来进行数理统计的运算与作图来圈定无标度区和求解维数。

三、注意特征尺度的应用

我国物理学家郝柏林86年在“分形和分维”[2]一文中曾指出：“试图定量地描述自然现象时，抓住特征尺度更是关键环节……，由特征尺度决定基本层次……，看准了特征尺度，问题就比较容易解决”，“若没有特征尺度，就必须同时考虑从小到大的许许多多尺度（或者叫标度），这显然是远为困难的事情．”总之，要定量地描述一个事物，总要有一个尺度，而且尺度要与所度量的物体相匹配，俗话说，量体裁衣，这个尺度就是特征尺度．我们在描述地学中一些现象时同样如此，要根据不同类型的地质分形体选择相匹配的特征尺度，以使研究工作更加方便和富有成效．

目前地学中常用的尺度不外乎：经纬度、公里、公尺……直至纳米（nm）．以构造地质学为例，从宏观到微观至少可分为以下六个尺度：①在航卫照片上观测地质构造用经、纬度为尺度；②站在山头上观测地质构造用公里为尺度；③在野外实测剖面或作露头观察用米为尺度；④在手标本上观测构造特征用厘米至毫米为尺度；⑤在光学显微镜下观测构造现象用毫米为尺度；⑥在电子显微镜下（包括SEM，TEM等）观测更微细的构造现象用毫微米（μm）至纳米（nm）为尺度．

尽管借助于微束分析及航卫技术，人们的视域已大大地扩大与延伸了，已经可以观测到 $10^{8}-10^{-8}$m范围内的地质现象，但是对于地质工作者来说，在研究地学问题时首先还是应该立足于用自己的视力能观测到的几百米至几毫米的尺度上，可以说，这是观测一切地质现象的最基本的特征尺度，也是使用最方便的尺度，在这基础上再向Mega-和Micro-两端扩展和延伸，确定不同层次的特征尺度。

四、不要忽视在微观层次容易遗漏的信息

应用分形理论研究地学问题时，特别是进入微观层次时要特别注意，常容易漏掉一些重要信息．应该说，自然界物质本来是确定性的，但一旦进入人眼所不能看见的领域时，所获

得的研究结果往往是非确定性的.

钱学森教授曾经指出，[8]微观层次的量子力学所表现出来的非决定性，实际是决定性的渺观层次中十维时空运动的混沌所形成的。本来是决定性的运动，但看来是非决定性的运动．这是因为超弦的渺观世界是十维时空，有六维在微观世界看不见，不掌握，因而有六个因素没有考虑，漏掉了。可以说是因为在微观世界科学家的"无知"，造成本来是决定性的客观世界变得好象是非决定性的了。钱老将其称为"隐秩序"，即藏在渺观中的秩序。

这就提醒我们，在进行分形维数计算时有时不大准确，很可能是由于某些因素没有考虑进去，特别是由于漏掉了一些人们看不见、摸不着的信息而造成的。例如电子探针分析，当你用探针的电子束轰击固体物质进行元素分析时，若不进行ZAF（原子序数、吸收电子、荧光）修正及RST修正，则矿物的定量分析就不准确．这就是进行微观分析时不能忽视的一些量子力学问题的例证。

在研究宏观地质现象时，也会遇到一些我们尚未掌握的因素，影响着研究结果的精确性．一个地质体不仅具有时空四维的特点，而且还有许多看不见、摸不着的因素．这些因素常常可能被遗漏掉．所以在应用分形研究地质体时，首先要把这个地质体的形成机理搞清楚，尽可能地弄清影响该地质体成因的各种因素，并把这些因素考虑到分形计算中去．这里就涉及到多重分形问题．

五、多重分形是地质分形的主旋律

多重分形是地质体自组织的结果。自然界地质体很多都是多重分形．在地质现象中，平衡与非平衡、线性与非线性共存．因此在描述地质现象时应该是线性与非线性结合，整数维和分数维结合，单一的自相似分形与多重分形相结合，偏废任何一面都是不合适的．但是总体来说，地球无论在过去还是现在，不平衡都是主导的．因此我们在研究思路上，应将非线性和多重分形视为主体．多重分形可以看作是大量具有不同无标度区的集合。它可以是自相似分形，也可以是自仿射分形，还可以是生长型分形。

自相似分形是研究在均匀膨胀或收缩的线性变换群作用下图形的性质．在一定范围（无标度区）内由一个维数就可以加以描述．[4]

自仿射分形是按照它们各自方向进行不同比率的收缩或扩展，是非均匀的线性变换。对自仿射分形的结构要用多重维数来表述（如间隙维数、质量维数、整体维数、局部维数等）．它能从本质上反映大自然的丰富性与复杂性。[4]

生长型分形，即动态生长的分形，在生物界普遍存在．例如，一棵白菜的生长从形态上讲至少可以分为三个不同的阶段，即生长初期（卵形叶）、生长中期（长形叶）、生长晚期（开花结果），可以划分出三个相应的无标度区和求出三个不同的维数（D_1，D_2，D_3）。在地学领域内这种生长型的分形体也是常见的，如矿物的成核和生长过程、岩浆的演化路线、成矿过程及其不同阶段、地层的发育、大陆边缘的增生等，均可以用生长分形加以表述。

如果我们能把地学中复杂的分形体不同范围的无标度区划分清楚，求出不同无标度区的维数及其它参数，那么对于全面地研究和掌握各种地质体的特征及形成规律是很有意义的。

六、正确求解地质分形的维数，合理解释其含义

分形理论在地学的应用中，还可以见到一种现象：利用一些分形公式计算出某分形体的维数后，没有进一步充分利用这些数据，去探究这些维数所包含的地质意义．造成这种情况的原因，或是由于算出的维数与客观实际不符，或是由于尚未找到客观规律，难以对维数的含义作出解释。如果出现了所算出的维数或其它因子与客观实际不符的情况，正确的做法就

是要找出其不符的原因．这种原因可能有以下几种情况：第一种情况可能是无标度区划分得不对，所以得不到正确的维数．这时只要重新找到其正确的无标度区，问题就可迎刃而解．第二种情况，是可能丢掉了所研究的分形体的一些主要因素与信息．一般来说，所丢掉的主要信息越多，计算出的维数与客观相差越大．这时，我们应当尽可能地寻找、研究，以把握住这一分形体的全部主要信息．但是，有时囿于科学技术发展水平，对有些虽然是客观存在着、但现代技术手段还无法探测到的过于微观或过于宏观的东西，人们还无能为力．出现这种情况也是不足为奇的，我们只有尽最大努力去获得近似的数据．总之，为了获得正确的、有价值的维数，必须正确划分无标度区和尽可能收集和掌握分形体的全部主要信息．

在获得了较准确的分形维数之后，就要利用地质知识，对各种维数的地质意义作出合理的解释．对于地学工作者来说，这是比计算出维数更重要的一步。只有跨出了这一步，才能说分形理论已被应用于地学领域，才能对地学的发展发挥其强有力的作用．

以海岸线为例，分形理论的创始人B. B. Mandelbrot对某些海岸线的计算结果表明[5]，不同地区的海岸线，其分数维（Df）有一定的差别，英国西部海岸线Df=1.25，澳大利亚海岸线Df=1.13，南部非洲海岸线Df=1.02．由此可见，英国西海岸线维数较高，说明其复杂程度较高，而南非海岸线的维数较低，说明其形状相对简单．为什么如此？Mandelbrod没有说明．其实，造成海岸线形状的复杂程度不同，其维数有变化的根本原因是地质的因素：

（1）该地区地壳的升降情况．抬升区容易造成较复杂的岩岸型海岸；尤其那些被大陆冰盖复盖的地区，地壳抬升将会造成强烈的冰川下切和侵蚀，可以形成最复杂的海岸线．例如，斯堪地那维亚半岛及英国西北部的海岸线就属于这类复杂的海岸线，其分形维数会更高．在地壳稳定或下降地区，由于沉积作用超过剥蚀作用，常常为沙岸，海岸线一般比较平直单一，如我国华北的海岸线即属此种类型，其分数维较低．

（2）沿海的岩性、断裂发育程度与方向对海岸线的复杂程度也有一定的影响．如澳大利亚西北部，由于岩性和构造比较复杂，所形成的海岸线也比较复杂．

（3）气候条件、海水性质及风化剥蚀程度等，对海岸线的形状也有一定的影响．

由此可见，反映海岸线复杂程度的分形维数，实质是该地区的地质结构与内外地质营力的综合体现．这就是海岸线的分数维的地质含义．

对其他地质分形体的维数的地质含义也应进行类似的分析和解释．

除了以上几点外，在应用分形理论于地学领域时，必须引进计算机技术，还应与全息理论[6][7]有机地结合起来，以便更全面、准确地表述地质体和地质现象的特征，更深刻地揭示其内在联系与规律．关于这个问题，我们已在另文中作了较多的论述[7]，这里不再重复．

主要参考文献

[1] 彭志忠，准晶体的构筑原理及微粒分数维结构模型，地球科学，第10卷第4期，1985．
[2] 郝柏林，分形和分维，科学杂志，第1期，1986．
[3] 钱学森，基础科学研究应该接受马克思主义的指导，刘洪主编《新学科精览》P.1-8，中国科学技术出版社，1990．
[4] 谢和平等，自仿射分形几何，全国第一届分形理论与应用会议论文集，1989．
[5] Mandelbrot，B.B.，The Fractal Geometry of Nature，W.H. Freeman and Sons Company，San Francisco，1982．
[6] 张颖清，生物全息律，自然杂志，第4卷第4期，1981．
[7] 毕先梅等，全息理论在地质学中的应用，地球科学，第15卷第5期，1990．

沉积岩孔隙空间的分形结构*

王域辉　　廖淑华

（江汉石油学院，江陵 434102）

邢锦云

（中国科技大学，合肥 230026）

关键词　沉积岩　孔隙空间　岩石-孔隙界面　谢尔宾斯基海绵　分形结构

§1　引　言

地球表面大部分复盖着沉积岩，与人类生活休戚相关的两种流体——水和碳氢化合物就储集在沉积岩的微小孔隙里。沉积岩的孔隙不仅是流体的储集空间，也是它们的输运通道。显然，沉积岩的孔隙结构对于其中流体的输运起着举足轻重的作用．与流体输运相关的岩石特性是石油工业最关切的岩石物理性质，因此，岩石孔隙结构及其演化自然成为石油科学家和工程师们关心的热门话题．

经过长期细致的观察和艰苦的研究，科学家们提出了许多种孔隙结构的分类方法和理想模型，如以气泡、圆柱管道和堆砌颗粒为基础的模型等．这些模型虽然在一定程度上成功地预言了多孔介质的输运性质，但作为唯象模型只能预言材料的统计平均性质．而且，这种模型对于描述激烈起伏的岩石性质、粗糙复杂的孔隙结构及其形成演化机理，就完全不适用了。

分形几何是描述突变性、粗糙性、颗粒性对象最恰当的工具。从分形几何概念出发建立的孔隙模型恰可以弥补在传统观念基础上建立的上述唯象模型的缺陷．如所周知，在许多情况下，简单的随机生长过程往往会产生分形结构。并且已有实验证实了在多孔介质尤其是沉积岩中有这种分形结构存在．然而，生成分形结构的化学、物理条件相当复杂，要进一步分别出其中的实质因素就十分困难。其实，只要采用分形几何概念，这一点也就不难作到。

在本文第二节，我们向读者介绍经典孔隙模型和分形孔隙模型各自的特点及其区别。第三节叙述沉积岩的特点。第四节说明测定沉积岩分形结构的主要方法．第五节介绍目前已认识到的沉积岩孔隙空间分形结构的几种类型和层次．第六节分析沉积岩孔隙空间分形结构的形成机理．最后，第七、八两节分别讨论沉积岩孔隙空间分形结构与成岩作用以及与岩石物性的关系。

* 国家自然科学基金资助项目

§2 经典孔隙模型和分形孔隙模型[1]

经典孔隙模型的数学基础是欧几里得几何学，它以研究连续性、渐变性、光滑性对象为特点．各种经典孔隙模型都具有所谓特征长度．图 1 是二维经典孔隙模型的示意图．图 1a 是气泡的准单弥散分布模型．图 1b 是松散堆砌的弥散颗粒阵列．这些模型的基元——气泡和颗粒表面都很光滑．更主要的是它们都有一个特征长度，即气泡和颗粒的平均尺寸．

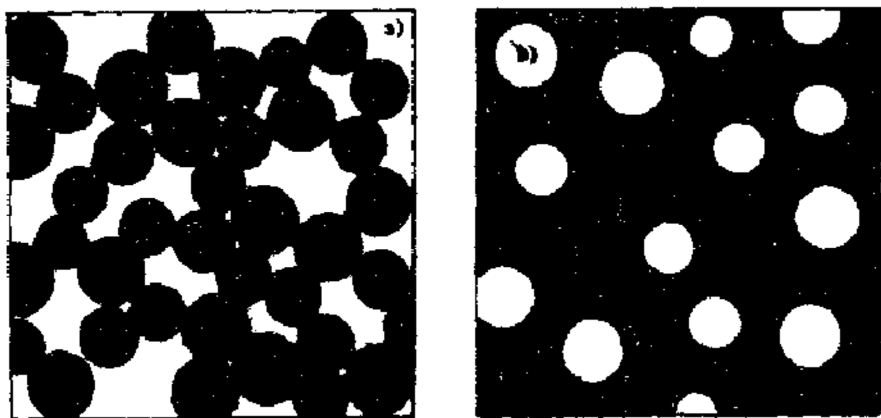


图 1　二维的非分形多孔材料

a）气泡、　b）堆砌颗粒

分形孔隙模型的数学基础是分形数学，它以研究间断性、粗糙性对象为特点，分形孔隙模型具有膨胀对称性，或称尺度变换不变性，其含义是指其结构不随尺度变化而改变，因而不具有特征长度。图 2a 是一个具有分形粗糙表面的多孔物体，将小尺度物体放大后，它的粗糙表面看起来几乎和大尺度物体的粗糙表面相同．类似这种局部放大与整体相似的情形，也反映在图 2b 的幂律孔隙分布中．图 2b 中有各种尺寸的孔隙，如果把此图形中的某一部分放大，所得图形结构的基本特征不发生变化．最后，图 2c 表示了一种随机网络．乍一看，似与图 2a、图 2b 的情形不同，事实上它显示出一种统计的尺度不变的几何特性．

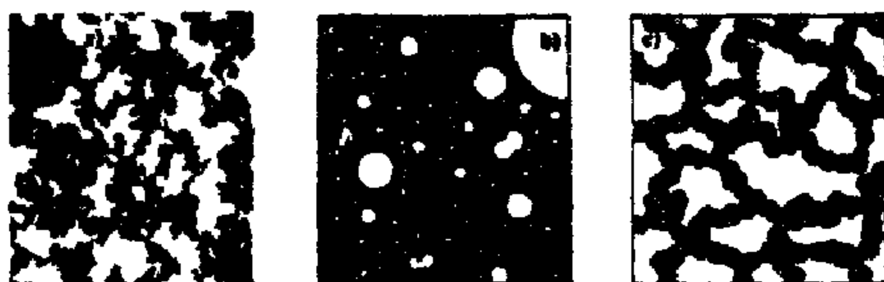


图 2　分形孔隙的二维模型示意图

a）分形粗糙多孔表面；　b）光滑孔隙的幂律分布；　c）胶体颗粒网络

分形孔隙模型从表面上看较为复杂，然而它却比较贴近自然真实；经典孔隙模型似乎更为简洁，但它们却忽视了许多细节，远离了岩石孔隙结构的实际．

§3 沉积岩的特点

沉积岩是一种非常独特的多孔材料，其独特之处在于岩石孔隙的几何结构与流经其间的液体流相互制约．沉积岩的形成经历了三个阶段．首先是岩石颗粒或从风中或从水中淀积下

来；其次是淀积起来的颗粒在重力作用下压实和压缩；第三个阶段，流体流过沉积物，产生溶蚀和固体材料或晶体的成核、生长等复杂的化学、物理过程，将颗粒结成大的岩石块乃至使材料改性，这就是成岩改性过程．在成岩改性过程中，孔隙结构限制了矿物流的速度和流量，而矿物流的速度和流量又决定岩石改性和孔隙结构改造的速度．因此，沉积岩的孔隙结构与输运性质之间的独特关系可能是其它多孔材料所没有的．

如所周知，湍流、河流流量、水位、雨量、潮汐、气候的变化和环境温度等都可能具有自相似的模式．这些环境因素控制着沉积岩形成的早期阶段，从而可以产生几个数量级长度范围内的结构和分层变化．大尺度的分层结构已经研究讨论了一百多年，不在本文讨论的范围之内[7]．

孔隙形成过程导致沉积岩孔隙结构具有以下几个突出特点：第一是孔隙的高度连通性，即使在孔隙率很低的条件下孔隙间仍会保持连通．第二，岩石间的小颗粒接触，不仅保证了孔隙的连通性，也保持了深埋地层的高孔隙率（超过 20,000 英尺深，仍有 20%孔隙率）．

岩石孔隙的成岩起源和岩石之间广泛的几何自相似性很容易使人联想到：孔隙形成的某些共同因素可能具有普适性，而且可以用一种基本的生长模型来描述．目前已经提出了一些孔隙分形结构生长的模型，然而由于问题的复杂性，这个问题还没有最后得到解决．

§4　测定沉积岩孔隙分形结构的实验方法

过去十几年间，已经发展了许多测量分形结构的实验方法。这些方法可以分为两大类实空间测量法，它们以变换测量尺码为基础；倒空间测量法，它们以光或中子的散射为基础．对于一特定系统，选择适合的测量方法是以该系统的性质和尺度范围为依据的．

我们在这里介绍两种测定沉积岩孔隙空间分形结构的实验方法：

（1）扫描电镜法——岩石断裂面特征体计数法；

（2）小角度散射法．

1. 扫描电子显微镜法——岩石断裂面特征体计数法．

Katz 和 A・Thompson [2] 等人在 1985 年提出了对岩石断裂面扫描电镜图象上特征体的手工分析技术。1986 年 Thompson 和 Krohn 等人 [3] 又将此发展为自动化技术，提高了分析的精度和速度。

这个方法的基本原理是对岩石–孔隙界面上的结构特征体的尺寸分布进行统计．由特征体数目 N（L）／厘米与特征体尺寸 L 的双对数图或直方图的拟合，确定分形维数和分形结构的上截止尺度 L．

理论分析表明：扫描电镜的一条扫描线和分形分布的特征体的交线上，单位长度的特征体数目 N（L）／cm 与尺寸 L 之间的关系可以表示为：

$$N(L)/\mathrm{cm} \sim L^{2-D} \tag{4-1}$$

（4–1）是此法的基本公式．

我们所说的特征体是指样品中的岩石颗粒、粘土质点以及在它们表面上的小坑和突出包．特征体的边缘因电场强度大，是次级电子强度的局部极大处．在扫描电镜的图象中，这些边缘为亮区，特征体的尺寸则由相邻的局部极大处间的距离确定．以特征体尺寸分布为基础的分析，可以说明孔隙空间是否由一个特别尺寸的特征体占主导地位，或是表明根本不存在特别尺寸的特征体、后者则是分形结构的特征．

选择这种方法测定沉积岩的分形结构，反映了石油物理方面的兴趣和意义。石油工作者关心的是孔隙空间中流体的传输性质。孔隙壁对传输性质的影响可以由所测定的几何特征体的数量和尺寸来描述，因为这些特征体突出伸入孔隙空间并散射孔隙空间中的流体元。可以推定，多孔岩石断裂面上的结构主要是和孔隙-岩石界面相关的。这对于在断裂表面下比岩石颗粒尺寸小的精细结构尤为正确。

如果测量出的孔隙空间服从（4-1）式的分布，则可以证明此岩石的孔隙度为：

$$\Phi = (L_1/L_2)^{3-D} \qquad (4-2)$$

式中 D 为孔隙分形的分维数，L_1 为下截止尺度，L_2 为上截止尺度。

断裂面上特征体计数测试技术与已发表的测量颗粒粗糙度的方法完全不同。测量岩石颗粒粗糙度的方法是通过分析颗粒图象的轮廓测量单个颗粒的粗糙度，而且这种测量还要涉及整个颗粒的外形。断裂面技术测量含有粘土和精细质点的孔隙-颗粒界面而并不测量孤立的单个颗粒，其主要的差别体现在测量的统计方法之中。

随着扫描电镜及图象设备的广泛使用，扫描电镜特征体统计法已成为十分方便可行的现场测试方法。

2. 小角度散射法

x 射线和中子束的小角度散射法是研究材料微米级结构的有效方法之一。已有许多人运用这种方法研究材料的分形结构。

基本原理：

图 3 是散射实验的示意图。一束入射光子或中子被实验物体散射。散射线束与散射角 ψ、θ 有关，其中方位角 φ 可以由物体随机取向而平均消去。余下散射角与动量转移 q 间的关系为：

$$q = 2kSin\frac{\theta}{2} \qquad (4-3)$$

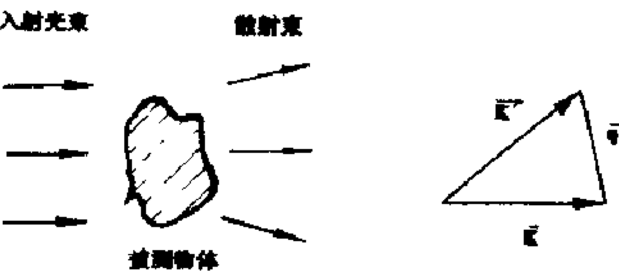


图 3　散射实验原理示意图

式中 k 为入射质点的波矢量或动量。散射束的强度 I（q）或 I（q）与入射束通量比（微分散射截面）σ（q）是实验要测量的量。

小角度散射技术的基本原理是，散射强度或微分散射截面与所研究物体的电荷分布（对光、x 射线散射）或质量分布（对中子散射）的富里叶变换有关。如所研究的物体是分形，则它的分维数就会表现在它的散射强度或微分散射截面之中。

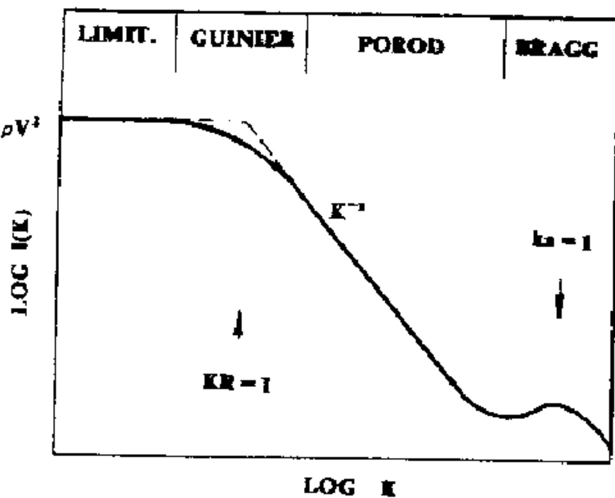


图 4　一种典型的多孔材料的散射曲线

图 4 是一条典型的多孔材料的完整的散射曲线。这条 I（q）-q 曲线共分为四个区，每

个区域与不同长度尺寸的结构相对应。

(1) 限定区 $(q\to 0)$

用来研究极长的波长起伏。在稀薄极限条件下，在 $q=0$ 附近散射强度与散射物体（孔隙或质点）的密度 ρ 及体积 V 的平方乘积成正比。

(2) Gunir 区 $(qR\approx 1)$

用来探测与相关长度相当的波长起伏，典型值为平均孔隙尺寸。Gunir 区散射曲线有一个弯段，由此曲率可以求出平均孔隙的半径 R。

(3) Porod 区

在 q 值更大的区域，散射曲线出现一线性段，这就是 Porod 区。这段区域可以用来研究比平均孔隙尺寸小但比晶格原子结构大的材料结构特性。

对非分形材料，这部分散射强度与动量转移的关系为：

$$I(q)\sim\frac{1}{q^4} \tag{4-4}$$

这就是著名的 Debye-Porod 定律。

对于分形结构，上述关系变得十分复杂。正为其如此，小角度散射技术可以用来区别：自相似面分形、自仿射面分形和体分形。

对于自相似面分形，散射规律为

$$I(q)\sim 1/q^{6-D} \tag{4-5}$$

这一特性由 Bale 和 Schmidt[4]用 x 散射技术在褐煤中观测到。Wong 等人[5]用中子散射在砂岩和页岩中获得了类似结果。

对于自仿射面分形，散射定律为：

$$I(q)\sim\frac{A}{q^4}+\frac{B}{q^{3+\alpha}} \tag{4-6}$$

其中 $B/A=b^{1-\alpha}$ 决定了转变长度 b。因为 $\alpha=3-D$，式中 $q^{-(3+\alpha)}$ 与前一式中的 $q^{-(6-D)}$ 相同，附加项 q^{-4} 反映了在较大长度处自仿射表面实际变得光滑，故在此极限条件下表面的性状逐渐接近于 Debye-Porod 定律所反映的特性。Wong 等人[5]的石灰石小角度中子散射数据揭示了这样的特性。

对于体分形，散射规律为：

$$I(q)\sim 1/q^{D} \tag{4-7}$$

式中指数 D 小于 3，与面分形的（4-5）式比较，其指数 6-D 大于 3，所以可以根据散射曲线判定所测分形是体分形或面分形。Schaefer 等和 Dimon 等分别在氧化硅胶体凝聚物和金质点凝聚物中观测到了（4-7）式所表示的体分形散射规律。

(4) Bragg 区：g 值达到与晶格常数 a 的倒数相当的区域，是著名的 Bragg 区，常常用来分析晶体结构。

小角度散射实验测定分形结构是在动量空间或倒空间而不是在实空间进行的。这些方法的最大优点是在短时间内可以收集到高质量的数据，其缺点则是只适合于探测微米级乃至次微米级的结构，最新水平的同步幅射 x-光散射设备只能测量 5000Å以下的特性，因此对大尺度结构有兴趣的地质学家不会用这种方法作研究工作。然而，自然界的分形可能直到原子尺寸都会存在。

§5　沉积岩孔隙空间分形结构层次

经过科学家们的努力探索，已经发现了沉积岩孔隙空间的分形结构十分复杂，具有几个不同尺度的结构层次。

1. 原生孔隙和体分形

原生孔隙是沉积颗粒自然堆砌而形成的。不同尺寸和形状的颗粒在水中流动或在风中飘动而逐渐沉淀下来，堆积在一起，它们之间的间隙就是原生孔隙。这种孔隙在成岩作用初期占压倒优势。由于外部条件的自相似特点，使得这部分孔隙具有十分复杂的结构，但颗粒表面仍可以认为是基本光滑的，它所具有的分形是一种体分形。

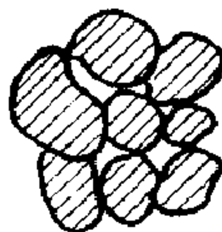


图5　原生孔隙

理论和实验都证明，随机堆砌的等球颗粒模型可以构成一定的体分形孔隙空间，只不过和总的孔隙空间相比，所占的份额较少而已。这部分分形结构应在与颗粒尺寸相当的范围内观察到。

2. 孔隙空间壁的面分形

原生孔隙空间表面可以认为是十分光滑的，不具有面分形性质。但随着地层水流经孔隙，孔隙壁与地层发生复杂的物理、化学变化，使孔隙逐步变得粗糙起来，最后会导致岩石改性，孔隙壁高度皱折，并且填满了孔隙空间。实验证明，粗糙的孔隙壁具有面分形性质。

上述演化过程可用图6表示。图6a为初期光滑的孔隙壁，开始粗化之后，到了图6C

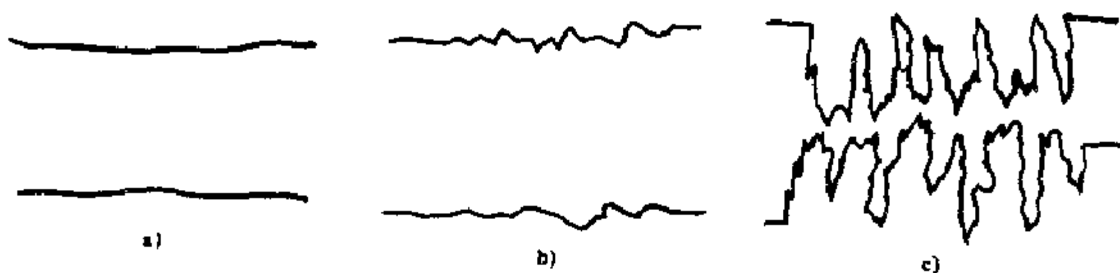


图6　孔隙壁演化过程

a）初期光滑的孔隙壁　b）孔隙壁开始粗化

c）高度粗化的孔隙壁实际已填满孔隙空间

的阶段，孔隙空间的体分形和孔隙壁的面分形实际上已经无法分辨，可以认为它们具有相同的分维数 $D_V = D_S$。

3. 孔隙壁上均匀性与分形岛

SEM 实验观察发现，孔隙壁上的分形结构很不均匀。有时只在局部区域形成岩石、粘土的颗粒团簇而其周围材质并不具有分形性质，即形成所谓的分形岛。



图7　孔隙壁上的分形岛

4. 准谢尔宾斯基（Sierpinski）海绵体——孔隙壁上的规整分形岛

前面所述的沉积岩孔隙空间的分形结构都具有自然界分形的普遍特性 统计性的有限尺度范围的自相似性。

作者及其同事 1991 年 7 月在观察用 SEM 拍摄的砂岩样品图片时，发现了普遍发育于胶结物、粒间填充物、岩石颗粒中的三角形多孔团簇[6]（图 8、9、10）．其中图 8 最为典型．从这些图片中可以观测到七至八级大小不等的三角形溶孔．将图 8 和典型的分形——谢尔宾斯基垫子（图 11）对比，发现它们的形貌惊人地相似!



图 8　砂岩中胶结物上的多孔团簇

为了进一步研究这些团簇的形貌特征，我们曾绘出它们的轮廓图并测量各级三角形的尺寸．结果表明：各级三角形平均边长以二分之一的因子递降!这和谢尔宾斯基垫子完全相同．当然，这些三角形的嵌套次序不如理想的谢尔宾斯基海绵体完美，故我们称之为准谢尔宾斯基海绵体．



图 9　粒间填充物中三角形多孔团簇

在砂岩中发现如此规整的分形体实在令人惊讶!图 10 的照片表明，这种准谢尔宾斯基海绵与周围岩石材料迥然不同，它们是出现在岩石-孔隙界面上的体分形岛．准谢尔宾斯基海绵体的发现不仅为沉积岩中分形结构的存在提供了直观、确凿的证据，而且还揭示了分形结构的新的层次．

§6　沉积岩中分形结构的生成机理

关于沉积岩分形结构如何形成，科学家们提出了各种假说，大致可以归结如下：

1. 岩石颗粒的随机堆砌

岩石颗粒随机堆砌可以构成一定量的分形孔隙空间，这样形成的分形是一种体分形，其范围应当与颗粒尺寸相当

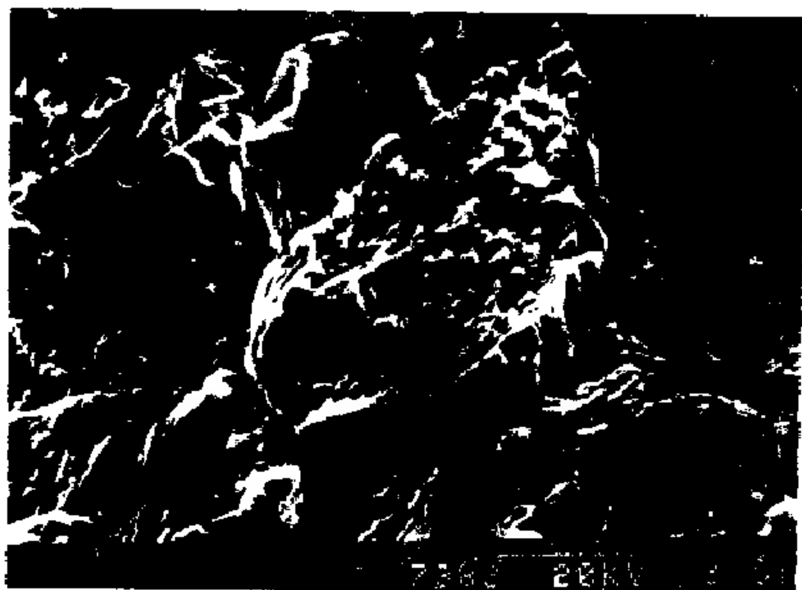


图 10　岩石–孔隙界面上的三角形团簇颗粒—规整分形岛



图 11　谢尔宾斯基垫子

2. 岩石–孔隙界面的自发粗化[7]

在岩石颗粒与孔隙中流体界面间的自由能 $\sigma_{GL}>0$ 时，低温条件下粗糙表面会比光滑表面有更高的自由能．然而，当温度增加时，与粗糙表面相关的附加熵会降低粗糙表面相对于光滑表面的自由能，直到某一温度 T_R 时粗糙表面的自由能与光滑表面的自由能相当为止．此时表面发生自发粗化．在粗化温度 T_R 处的粗化转变也可以看作在固定温度处当 σ_{GL} 通过一临界值 $\sigma_R>0$ 时发生的．自发粗化产生的分形是一种自仿射分形，它可以解释清洁的沉积岩表面分形的生成．

3. 岩石–孔隙界面上的结晶成核和生长[8]

晶体成核和生长模型可以说明为什么特征体尺寸具有幂律分布，而且对不同的岩石有不同的分形维数．

砂岩形成涉及的过程有．砂粒的埋藏、压缩和流经孔隙空间的流体对孔隙结构的改性．这种改性又涉及在孔隙表面上的晶体生长和成核．形成的晶粒大小分布实际是由动力学过程决定的．限制晶体成核和生长速度的关键是材料小块加到孔隙表面生长点上的速度．这两个竞争过程的动力学方程为

$$dR/dt=KC^{n},\ dN/dt=K_{1}C^{p} \tag{6–1}$$

式中 K 和 K_1 为平衡常数，C 为表面分子浓度．第一个方程描写了尺寸为 R 的晶体的径向生长．第二个方程则描写了在原始未改性表面的单位小块上新晶体异相成核过程．因为浓度变化缓慢，成核和晶体生长都可以看作稳态过程．一特定晶体的最终尺寸 R 受到在岩石表面上新晶体成核的限制：一新形成的质点生长是以消耗其下的表面积为代价的，在这些条件下 $R\sim Kc^{n}/N$ 且 $N\sim K_{1}C^{p}$，从而有

$$N(R) \propto R^{D/(D-1)} \qquad (6-2)$$

这个模型描述了在岩石中分形晶体生长的一种可能机制，而且还是一种能产生连续分形维数的机制。这个模型与动力学的细节无关，而只与反应级数有关。因为成核和生长反应的级数决定了指数值，故此值的测量对于了解成核对于成岩作用的影响可能会有帮助。

4. 有限-扩散-凝聚

有限-扩散-凝聚过程可以简单描述如下。在矿物流中的杂质分子，如粘土质点，一接触到岩石表面，便立即附着在此表面上，而未接触表面的质点在矿物流体中缓慢扩散，随矿物流流走，尔后新的矿物流带来的粘土质点接触到已生长在表面的粘土时，又附着在它上面，而未接触到表面和粘土的质点又随矿物流流走……这个过程进行较快，结果形成孔隙壁上许多树枝状的生长物这种具有自相似的分形结构。这是形成粗糙孔隙壁分形结构的重要方式之一。

5. 选择性溶触

在次生孔隙结构和准谢尔宾斯基海绵结构中都可以观测到明显由溶蚀作用引起的分形结构。关于它们的生成机理可能有两种。一是酸性水的溶蚀，这是一个与有限-扩散-凝聚相反的过程，如认为孔隙空间的发展是"孔隙"的有限-扩散-凝聚的结果。二是岩石颗粒或基体的择优溶蚀的结果。这时，溶蚀速度与晶体方位、晶体应力、缺陷等都有关系。

§7 沉积岩孔隙空间分形结构与成岩作用

从生成机理的讨论中，我们已经看到沉积岩孔隙空间分形结构与成岩作用有密不可分的关系，分形结构之所以形成，完全是成岩过程中复杂的物理、化学作用的结果。因此，沉积岩的分形结构和分形参数的测定结果，应当而且可以反映岩石成岩作用的程度。

根据分形参数可以计算出岩石的分形孔隙度

$$\Phi_{分} = (L_1 / L_2)^{3-D} \qquad (7-1)$$

这里 D 为分维数，L_1 和 L_2 分别为下、上截止尺度。一般地，分形孔隙度小于岩芯孔隙度，即

$$\Phi_{分} < \Phi_{岩芯} \qquad (7-2)$$

下面是 Krohn[8] 对部分岩石的测量结果

样 品	分形孔隙度 %	分形／总孔隙 %	总孔隙度 %	岩芯孔隙度 %
Table 砂岩	3.0	9	33	35
Coconino 砂岩	8.0	86	9.2	9.9
黑鹰前滩	5.4	45	12	15
黑鹰	6.5	89	7.3	7.5

从这个表中可以看出如下几点：

1）所测岩石均有一定的分形孔隙；

2）分形孔隙所占总孔隙的份额因砂岩而异。大致可以分为分形孔隙占主导的（$\Phi_{分} / \Phi_{总} > 50\%$，称为分形孔隙砂岩）和以非分形孔隙占主导的（$\Phi_{分} / \Phi_{总} < 50\%$，称为欧几里得砂岩）。

3）欧几里得砂岩的总孔隙度较高，与成岩早期的砂岩相当；分形砂岩总的孔隙度较低，与成岩后期的砂岩相当。

4）分形孔隙对总孔隙之比看来与孔隙空间的改性程度有关，有可能作为衡量岩石改性程度的定量描述。

§8　沉积岩孔隙空间分形结构与岩石物性

孔隙空间的几何结构对于岩石的物性有深刻的影响。然而，由于影响岩石物性的因素很多，涉及比较复杂的物理过程，也不能直接从孔隙空间的分形结构简单导出明确的结论。以下简述一下分形结构对岩石物理性质的主要影响。

1. 电导率和介电常数的频率响应[5]

如果岩石孔隙具有分形结构，则其电导率和介电常数的频率响应为

$$\sigma \sim \omega^{1+\frac{D-d}{2}} \quad (8-1)$$

$$\epsilon \sim \omega^{-\frac{4-D}{2}} \quad (8-2)$$

式中D是所测岩石孔隙空间的分形维数，而d是欧氏维数。

2. 渗透率[8]

影响岩石渗透率的因素很多，但从现在测量的结果看出一种趋势，即成岩作用愈成熟，岩石渗透率愈低。从分形参数的测试结果来分析，分形孔隙所占份额愈大，则相应的岩石渗透率愈低。

分形结构对多孔媒质中的许多物理过程，如声波的粘滞阻尼、第四声的愈合长度效应、浸润性等，都有很大的影响，因而，对于声波传播、多相流性质也都会产生明显的作用，是值得深入研究的问题。

参考文献

〔1〕 Schaefer DW etal. Physics and Chemistry of Porous Media Ⅱ New York.1987. 63

〔2〕 Katz A J, Thompson A H. Phys Rev Lett , 1985,54(12)·1325

〔3〕 Krohn C E, Thompson A H Phys Rev. B., 33(9):6366

〔4〕 Bale H D. Schmidt D W Phys. Rev Lett., 1985,53 1325

〔5〕 Wong P Z etal. Phys. Rev. Lett , 1986,57:637

〔6〕 王斌辉等. 砂岩中准谢尔宾斯基海绵体的发现，江汉石油学院学报, 1992,14(3):108

〔7〕 Cohen M H Physics and Chemistry of Porous Media Ⅱ New Yoork·1987. 3

〔8〕 Krohn C E. J. of. Geophysical Res. 1988,91(B_4)·3297

岩石-孔隙界面上的规整体分形岛*

王域辉　廖淑华　陈传仁　毛治超

（江汉石油学院，　江陵 434102）

摘　要

1991 年 7 月，我们用扫描电子显微镜拍摄砂岩样品时，发现了普遍发育于胶结物和孔隙填充物上的规则三角形多孔团簇，这种团簇形貌特征与谢尔宾斯基海绵（斜网）极其相似，进一步分析表明，它们是出现在岩石-孔隙界面上的体分形岛，其形成原因可能是矿物的择优溶蚀。

关键词：砂岩　准谢尔宾斯基海绵体　分形岛　扫描电子显微镜　岩石-孔隙界面

近十年来，研究沉积岩孔隙空间微结构的最重要成就是确认了它们的分形性质[1][2][3]，随机堆砌的颗粒构成的孔隙空间，即原生孔隙空间，有某种体分形性质，但这种分形孔隙对总的孔隙贡献不大。在成岩过程中，孔隙水流经孔隙，在孔隙壁上矿物的生长、溶蚀，使得孔隙壁变得异常粗糙。已经验明，粗糙的孔隙壁具有面分形性质。甚至，在成岩改性较成熟时，高度皱折的孔隙壁填满了孔隙空间，使面分形和体分形维数相同，这时的分形孔隙对总的孔隙贡献很大。看来，可以用分形孔隙对总的孔隙的贡献来衡量砂岩的成岩程度。

迄今为止，对于孔隙空间的分形测定都是统计性的。虽然对于孔隙壁上的面分形分布的不均匀性已有所认识，还有人提出了分形岛的概念，但也只是限于统计意义的面分形而言。

本文对新发现的砂岩中准 Sierpinski 海绵体[4]作了深入的形貌特征分析，指出它是砂岩-孔隙界面上的规则体分形；又由于它和周围矿物有明显不同的形貌特征，从而表明它是一种分形岛。

一、岩石断裂面的 SEM 图片制作

将选定的岩芯随机敲碎，从中选取 1～2 厘米见方、断裂面平整的样品，用乳胶将其粘在样品台上，粘接时尽量使平整断裂面与夹具底盘平行。之后放置约 24 小时，待乳胶干燥。干燥后的样品



图 1　砂岩断裂面的 SEM 图片（编号：7383）
发育于孔隙-岩石界面上的多孔团簇：
多层嵌套三角形孔洞结构

* 国家自然科学基金资助项目

置于 IB-5 型离子溅射台中，喷镀一层铂膜。将制备好的样品放在日立 S-530SEM 型扫描电子显微镜下观察，并对感兴趣的结构复杂区域拍照以作进一步分析。

二、分形岛的观测

1991 年七月，我们观测扫描电镜拍摄的某油田一块地面砂岩样品时，发现了普遍发育于胶结物和孔隙填充物上的具有多层嵌套结构的三角形孔洞团簇（图 1），这些团簇具有多层嵌套的自相似结构。从图 1 中可以观测到七级大小不同的三角形孔洞。

此前尚未见报道过此类形貌的砂岩断面 SEM 图片和砂岩中存在的规整自相似多层嵌套结构。

尤为有趣的是图 2 表明的特征：这种三角形孔洞团簇与周围环境差别甚大，形成了孤立的小岛。

为了分清三角形孔洞团簇的结构嵌套层次特征，分别绘出图 1 和

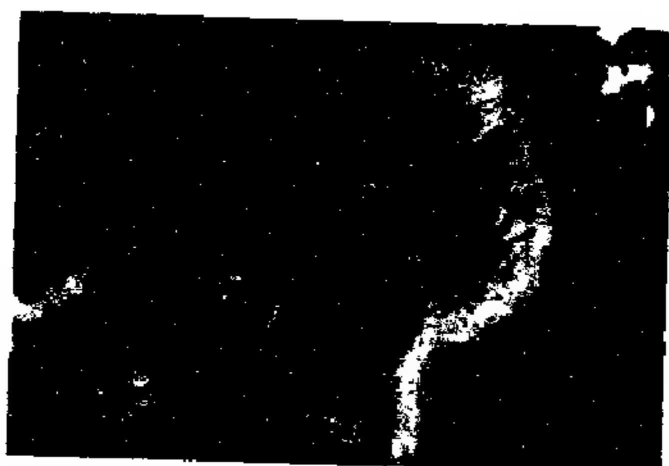


图 2 孤立的孔洞团簇-典型的分形岛

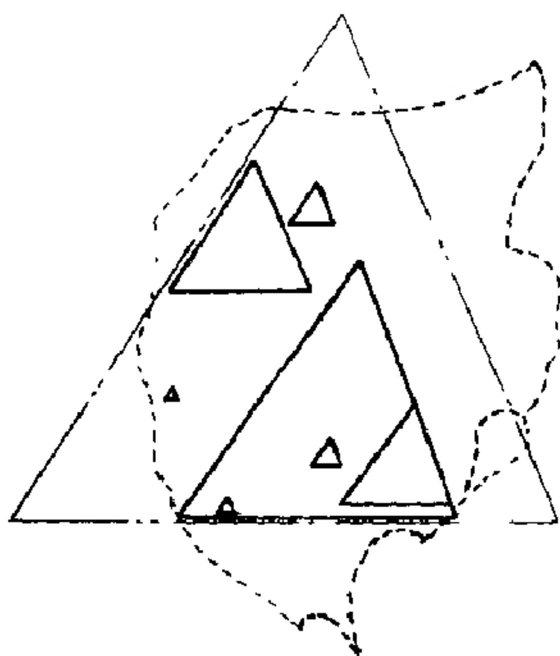


图 3 图 1 的 SEM 图片中主要多孔团簇的轮廓素描图

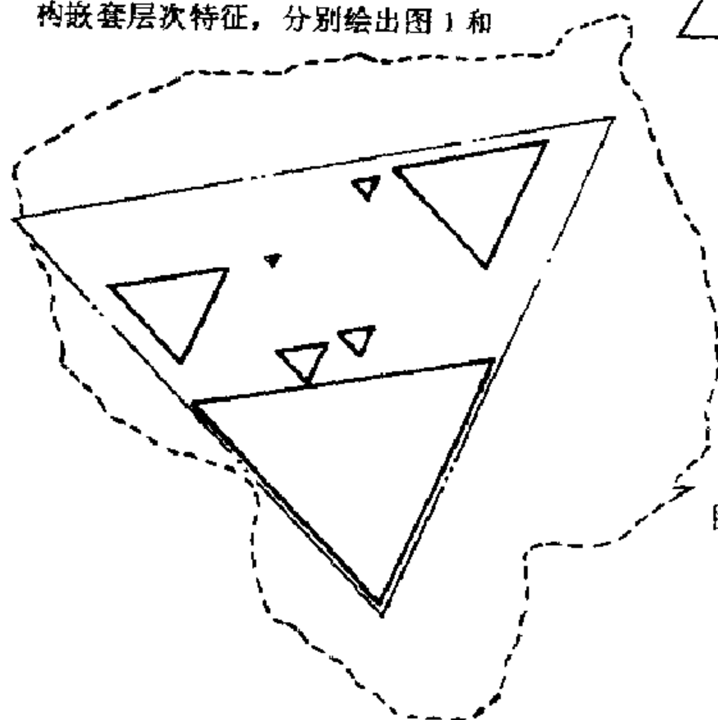


图 4 图 2 的 SEM 图片中主要多孔团簇的轮廓素描图

图 2 的 SEM 图片的轮廓素描图（图 3 和图 4）．在这些轮廓图上，清楚地标明了从图片上的看到七个不同级别三角形孔洞．

从轮廓图上用直尺测量出各级三角形孔洞的边长尺寸，其结果如表 1 所示：

表 1　图 3 和图 4 中各级三角形孔洞数据

图号	边长＼级别	1	2	3	4	5	6	7
7383	a	38.2	19.0	14.0	6.5	4.0	3.0	1.6
	b	34.0	18.0	12.8	6.0	3.5	2.5	1.4
	c	33.5	18.0	12.0	5.8	3.8	2.3	1.2
	平均 (mm)	35.2	18.3	12.9	6.1	3.8	2.6	1.4
	实际 (μm)	14.7	7.6	5.4	2.5	1.5	1.1	0.6
7391	a	42.0	16.0	7.0	5.0	3.0	1.8	0.8
	b	38.5	16.5	8.0	4.0	2.2	1.5	0.75
	c	40.5	16.0	8.2	4.2	2.5	1.5	0.75
	平均 (mm)	40.3	16.2	7.7	4.4	2.6	1.6	0.77
	实际 (μm)	10.8	4.3	2.1	1.2	0.7	0.4	0.2

从上述数据看出，不同级别三角形孔洞有如下特点：（1）近似为正三角形；（2）三角形孔洞平均边长级间大致依 1／2 因子下降．

三、分析讨论

如上所述，我们发现的砂岩中三角形孔洞团簇具有多层嵌套自相似结构，很容易和曼德布罗特（Mandelbrot）的分形几何联系起来．的确，它和分形几何中的谢尔宾斯基海绵（Sierpinski Sponge）形貌上极其相似：两者都具有三角形孔洞的嵌套结构，各级自相似三角形孔洞边长依 1／2 因子递降．所不同的是砂岩中多孔团簇的结构层次有限，排列顺序也不如谢尔宾斯基海绵完整．因此，可以把这种三角形孔洞团簇称之为准谢尔宾斯基海绵．

准谢尔宾斯基海绵体的发现意义在于：

1. 提出了砂岩孔隙空间分形结构的直观的、肯定的证据．近十年来，许多实验虽然确定了沉积岩孔隙空间结构的分形特性，但这些实验测量是建立在大量数据的统计平均基础上的，因而所确定的结构都是统计意义上的随机分形．准谢尔宾斯基海绵体是迄今为止所发现的沉积岩第一个规整的分形体，它令人信服地确认了砂岩孔隙空间具有分形结构．

2. 它们是岩石–孔隙界面上的体分形岛．我们从图 2 中可以明确地看出：准谢尔宾斯基海绵与周围的矿物迥然不同，它是生长在岩石–孔隙界面上的体分形岛．这种分形岛与岩石颗粒随机堆砌形成的孔隙空间的体分形结构（原生孔隙的体分形）和在岩石–孔隙界面上由于矿物的沉淀、生长造成的粗糙孔隙壁的面分形根本不同，它是岩石孔隙空间分形结构的一

个新层次。

3. 准谢尔宾斯基分形岛的形成看来是胶结物和孔隙填充物的择优溶蚀所致，它是一种次生孔隙结构。从图 2 的图片中可以观测到各部分溶蚀程度有很大差别。中心三角形是溶蚀较差的骨架，三个角上是溶蚀较深的三角形大孔洞，其中部分骨架已坍塌被地层水带走。设想在溶蚀的初期，中心三角形部分基本上不被溶蚀，三个角上则溶蚀出较浅的三角形孔洞，整个分形岛的形貌与谢尔宾斯基海绵体结构相同。随着溶蚀过程的发展，中心三角形部分也开始被溶蚀，原来孔洞部分的骨架被溶蚀坍塌，形成现在观测到的形貌。整个溶蚀过程显示了择优溶蚀的特点。如所周知，次生孔隙的发育有利于形成良好的储集层，因而研究次生孔隙的成因和结构形态是石油工业的重要课题。规整体分形岛的发现及其成因的研究，不仅为次生孔隙结构增加了新的内容，而且为次生孔隙结构发育机制提出了一种可能的途径。

参 考 文 献

[1] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer, Nature, Lond. 308(1984), 261.

[2] A. J. Katz and A. H. Thompson, Phys. Rev. Lett. 54(1985), 1325.

[3] P. Z. Wong, J. Howard and J. S. Lin, Phys. Rev. Lett. 57(1986), 637.

[4] 王域辉等，砂岩中准谢尔宾斯基海绵体的发现，江汉石油学院学报，14(1992)，108.

地壳内部剪切带阵列的分形几何学

索书田

（中国地质大学，武汉 430074）

自从 Mandelbrot(1967)将分形理论介绍到地质学里以来，分形理论已在地球科学的各个领域得到了广泛的结合与扩展（Manodelbrot,1982，1983，1989，King,1983，Scholz 和 Aviles,1986,Main 等,1990,Vignes-Adler 等,1991）。1993 年 4 月，在德国法兰克福召开了地球动力学系统中的分形国际会议，检阅了分形几何学及非线性系统在地质学上应用的研究成果，进一步推动了分形理论与地质学的更广泛结合。

分形几何学的基本特征之一是尺度不变性（Scale-invariance）。许多地质现象几何学上自相似性或尺度不变性，是地质学者早已熟悉的客观事实，而且，在科学研究和教学实践中，都在自觉或不自觉的应用它。从构造学（tectonics）的观点来看，分形几何学是从"形"和"量"两个方面对构造现象进行分解和组合，从更高层次上认识地壳结构、地壳运动及变形规律，并从流变学原理出发，认识和理解这些规律的内在联系。

一、剪切带阵列的尺度不变性

剪切带是平面状或曲面状的强应变带。从流变学意义上区分，有脆性剪切带（破裂、裂隙、断层及断裂带）、脆-韧性过渡型剪切带及韧性剪切带。在地壳不同层次及不同尺度上，都有剪切带的发育。从矿物晶格尺度上的位错、晶格扭曲和膝折带，到延长上千公里、宽几百公里板块尺度上的巨型剪切带或构造边界，相差可达十几个数量级，是组成地壳结构的主要成分。整个地壳乃至岩石圈的应变，主要是通过这些剪切带或断裂系统加以调整的，许多金、银及多金属矿床也主要是受不同尺度和不同性质剪切带控制的。因之，研究剪切带的组合格式（阵列），在理论和实际应用方面，都是非常重要的。

粗略看起来，不同尺度的剪切带空间分布是随机的或杂乱无章的，很难用定量的方法度量和分析。但是，变形实验研究和地质构造制图结果表明，不同尺度的剪切带阵列，具有明显的几何学相似性或近似的相似性（Tchalenko,1970, Turcotte, 1989, Main 等,1990），即尺度不变性。图 1A 是 4 个不同尺度上的一种脆性剪切带阵列格式，假如不标注比例尺或绘出标志体，就很难区别它们是在实验箱内用粘土材料作实验产生的毫米级剪切系统，还是板块尺度上几百公里级的破裂系统。这一类剪切带阵列的基本特点，是有一条主要的破裂面和伴生的为数重多的次级、小型破裂面，其标准化频率一长度分布图形如 1B 所示，呈负斜率 $D=-1$ 的幂律（实线）样式。虚线代表 $D=-2$。

在地壳中深层次上识别出来的韧性剪切带或脆-韧性剪切带的网结状组合格式（索书田，1991，1993），大到造山带尺度，小到显微镜下观察到的糜棱岩结构，也具有几何学上的自相似性和尺度不变性。近代遥感技术及电子显微镜技术的迅速发展并在地球科学上的广泛应用，地质及构造现象的尺度不变性，就更易被人们所理解了，也更便于准确的判别自相似性的上下边界。从卫星照片上解译出来的地球表面巨型尺度的破裂及线性构造组合样式，与露头尺度直接看到的构造现象，具有惊人的相似性。同样，扫描或透射电镜下观察到的矿物或晶体结构畸变样式，也会在中小尺度及大型尺度上找到类似的图象，并可用人工方法模

拟出来。

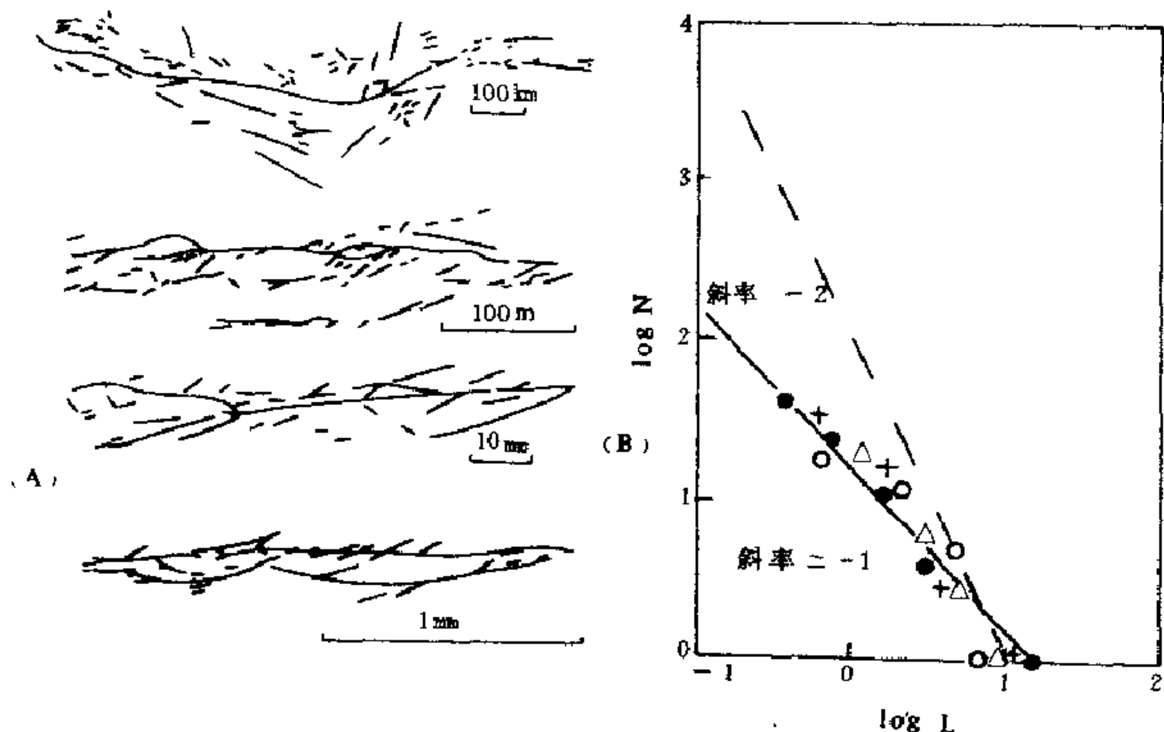


图 1 A—不同尺度脆性剪切带阵列几何学
B—标准化破裂面频律—长度分布图

二、分数维的地质和物理意义

分数维（fractal dimension）是定量描述构造分形特征的主要参数。有各种类型的维数，代表了不同的地质和物理意义。仅就剪切带阵列而言，最简单的分形取幕律形式.

$$N(l) = Cl^{-D} 或 N(l) = \frac{C}{l^{D}}$$

式中 N 示长度间隔 $l-\delta l/2<l<l+\delta l/2$ 内破裂或剪切带数量，C 是常数，幂律指数 D 即为剪切带阵列的分维数（Mandelbrot,1977, 1982, Turcotte, 1989, Main 等,1990）。在脆性域范围内，模拟实验作出的剪切带阵列分维数为 1<3，而大量的野外剪切带统计测量分析，其分维数为 1< D< 2（Hirata, 1989, Scholz 和 Aviles,1986,Barton 和 Larsen, 1985, Watanabe,1985）。实践证明，D≈1，代表了变形和运动集中于一个主剪切带或断层上。较大的分数维值，则反映变形分散于小型剪切带或破裂面上，不发育一条主剪切带，所以，从某种意义上讲，剪切带阵列的分数维 D，反映了剪切带阵列中大型剪切带与小型剪切带的相对重要性，也反映了应变局部化的程度。在应力作用下的剪切带发育过程中，初始分维数值较大（实验 D≈3，自然实例 D≈2）。随着变形过程的递进发展，应变局部化逐渐趋于明显，D 值减小。由于各种复杂的内部和外部原因，如含水量大小、变形机制等，剪切带阵列演化轨迹是很复杂的，岩石从弹-脆性行为到塑性行为，相应的 D 值也会变化。因此，我们可以通过剪切带制图、模拟实验和比较分析，用分维值定量的判别剪切带的空间分布特

征、变形物理环境及剪切带的演化过程．由实验模拟可知，D＞2，反映应变硬化作用(Strain hardening)，变形表现为碎裂流动，D＜2，代表应变局部化及应变软化（strain softening）过程．

滇、黔、桂"金三角"地区，近年来发现了许多超大型、大型卡林型金矿床，成为我国重要的黄金产地之一．研究表明，该区的地壳结构为"层、块、带"样式．由相继发生的六期变形一热事件所形成的构造组合而成．其中第二期构造为主期控矿构造，第四期构造的剪切带及破裂阵分数维趋近于 1，应变主要集中于巨型推覆构造的底基滑脱面（索书田等，1991），主断层线长 400 公里，推覆距离 28－80 公里．第五期变形事件形成网格状脆性剪切系统．在一个 800 平方公里范围内对 1－23 公里长的断层进行了统计，求出分维值 D＝1.3，表明应变局部化尚未达到形成一个主干断裂带的程度．

研究的尺度不同，求出的分维值也有一定的差异．因而，分形几何学的研究，应当与详细的构造解析工作紧密结合起来，首先对复杂的构造现象进行时间和空间分解，而后再分别进行统计、组合和计算分维值．否则，将不同变形机制、不同应力场内的剪切带或破裂混同起来统计和分析，可能会得出过大的 D 值，甚至所观察的构造不具分形特征．但从积极意义上说，又可利用分维值去认识构造的变形历史和规律性．广而言之，一个地区构造事件或期次越多，剪切带或破裂排列越紊乱或越具随机性，分形特点越不明显．

三、韧性剪切带阵列分形几何学

与上地壳脆性剪切带阵列一样，中下地壳层次上的以塑性流动为主要特征的韧性剪切系统也具有分形特点．据作者等的研究（索书田等，1987，1988，1991，1993），韧性剪切带有平行带状、楔形、共轭等阵列格式．其中，造山带内部的平行造山带方向的剪切带网结状格式，研究较为详细．这种线状强应变带与透镜状弱应变域规律组合型式，在几何学上具有自相似性或尺度不变性行为，在最简单和理想情况下，其经验分维数 D≈1.262－1.493．模拟和计算可知，透镜状弱应变域长轴（即有限应变椭球体 X 轴）愈长，D 值趋于减小，反映应变愈强烈．另一方面，透镜体越小，数量越少，D 值也有减小趋势，表明应变更加集中于强应变带内．这些特点，与上地壳脆性域内应变软化及局部化过程中 D 值变化规律是一致的．为了更准确计算网结状构造的分维值，也可用弱应变域的周长与其面积的对数值比，进行线性回归求之．

四、流变学解释

无论脆性剪切带阵列还是韧性剪切带阵列的分形特点或几何学上的自相似性，都是受共同的流变学体制影响的，包括（1）地壳结构的不均一性，（2）组成地壳岩石的相对粘度及强度差，（3）应变软化作用和应变局部化作用，（4）变形分解作用和（5）应力作用方式及变形的物理环境等．正是这些地壳变形过程中流变学特征的尺度不变性，控制了构造几何学上的相似性．

Hirata(1989)对日本国的活动断层的分形及分维值系统研究，具有很大的启发性．他的研究结果证明，2－20 公里尺度上的破裂的分形几何学 D 值的上限为 1.6．日本岛弧中心部位 D 值为 1.5—1.6，逐渐靠向日本岛弧边缘地带，D 值减小到 1.05，这种 D 值变化趋势，表明日本中部以密集分散的小型断层为主，而靠近沿海地带，则出现大型的主干断裂．从变形或应变分解原理（Bell，1985）论之，日本岛弧中部应变相对较弱，岛弧边缘为强应变

带，整体反映了一幅现代岛弧的应变分解图象．图2是一个糜棱岩显微照片素描图．中部的斜长石（Pl）为碎斑，应变较弱，同时出现脆性变形及塑性变形（边缘）；而主要由石英组成的基质域内则以塑性变形（动态重结晶及扩散蠕变）为主，调节了糜棱岩发育过程中的主要应变。钾长石（KF）的变形特点介于斜长石和石英之间．上述两种尺度的变形图象，几何学上非常相似，其内在联系是先存地壳结构及岩石组成的不均一性和不同矿物的流变行为．Handy（1990）利用两种（相）矿物集合体模拟的岩石固态流变特点，虽然是从矿物颗粒尺度上进行的，但可扩展到各种不同的尺度．尤其是布丁一基质域、碎斑一基质域的变形格式及流变学体制，都有明显的分形特征．

正确的认识构造现象的分形几何学特点，具有重要的理论意义和实际意义．桐柏 大别造山带的地壳结构特征，在研究尺度上与图2所示糜棱岩的结构非常相似．由晚太古代大别杂岩及早中元古代红安群片麻岩组成的造山带核部，可比拟为图2中的斜长石，在印支 燕山期碰撞造山阶段，应变相对较弱，且发育脆性剪切破裂系统，控制含金石英脉型矿床的形成．在这个弱应变域的南北两侧，由中晚元古代及古生代浅变质岩系组成的地体，属强应变带，金矿类型以构造蚀变岩型为主．桐柏 大别地区已发现的超大型、大型金（银）矿床，主要就位于这些强应变带内．在矿区及矿体尺度上，如湖北省黑龙潭金矿区，在透镜状弱应变域边缘剪切带内，发育蚀变岩型主矿体，而在透镜体内部的裂隙中，只发育含金石英脉．掌握这些规律性，可以指导不同尺度上的找矿和勘探工作．正如 Scholz 和 Mandelbrot（1989）所指出的、分形最显著的特征之一是，看起来很复杂的现象，确可以用很少数几个参数非常简单的进行模拟并用公式表示出来．地壳内部剪切带阵列的分形几何学，再一次证明了这一点．

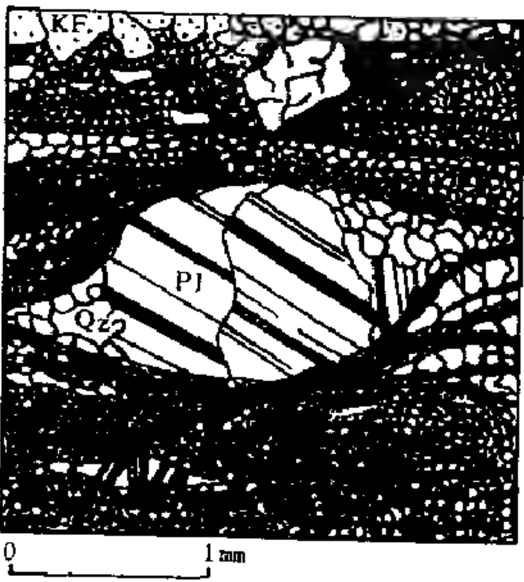


图2　糜棱岩显微照片素描图，示变形分解作用

分形结构因子的提出及其理论意义

沈步明

（中国科学院地质研究所，北京100029）

一、分形结构因子的提出

研究频率分布曲线的变化，或者说研究频率分布特征参数的变化是进行数据处理常用的一些方法。众所周知，常见的分布是正态分布和对数正态分布。由于自然界的复杂性，特别是地质过程的复杂性，许多地质体都是不均匀的，从中获得的数据也是变化很大的，它们往往偏离正态分布或对数正态分布。频率分布的峰偏系数和峰凸系数在一定程度上反映了某种频率分布偏离正态分布的程度。比如峰偏系数可以表征频率分布曲线的偏斜（不对称）程度，计算公式为：

$$C_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\mu_3\cdot\left[\sqrt{\mu_2}\right]^{-3} \tag{1}$$

如果Cs=0，分布曲线对称；如果Cs>0，分布曲线为正偏斜；如果Cs<0，分布曲线为负偏斜；Cs的绝对值越大，说明分布曲线偏斜程度越大。峰凸系数可以表征频率分线曲线的峰凸程度，计算公式为：

$$C_E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}=\mu_4\cdot\mu_2^{-2} \tag{2}$$

正态分布的C_E为3；C_E大于3，表示频率分布具有更尖峭的顶峰；C_E小于3，表示频率分布曲线的顶峰平坦或呈双峰。μ_2、μ_3、μ_4分别是二阶中心距、三阶中心距、四阶中心距，计算公式为：

$$\mu_\gamma=\frac{\sum(x-\bar{x})^\gamma}{N} \tag{3}$$

其中，γ是中心距的阶数，N为样品数，x为测量值，$\bar{x}$为测量值的平均值。

由于峰偏系数和峰凸系数的计算是以单峰频率分布为基础，不能表征多峰复杂的频率分布的变化，这就是本文提出分形结构因子的主要原因。

二、分形结构因子的计算方法

（1）首先将测量数据按从小到大的顺序排列，并把数据分布的总区间分成γ个子区

间，并把进入第i号子区间数据点频率记为$P_i(\gamma)$，总信息量$I(\gamma)$由下式求得.

$$I(\gamma)=-\sum_{i=1} P_i(\gamma)\cdot \log P_i(r) \tag{4}$$

（2）改变γ，可以求得一系数的I(γ)值。

（3）利用下式，可以求出D_I值：

$$I(\gamma)=I_0+D_I\cdot \log\gamma \tag{5}$$

D_I就是信息量维数，即信息量的变化率；I(γ)是系统的总信息量，是系统的熵。本文把D_I值定义为分形结构因子(Fractal structure Factor)，用FSF表示。

（4）因为分形结构因子不能确定频率分布是正偏斜还是负偏斜，为此，如果频率分布的峰偏系数是负值（即为负偏斜），也将其FSF值变成负值。

（5）由于公式（5）不是一个收敛的方程，当γ为无穷小时，I(γ)是无穷大。为了保证方程的有效性，要注意下列三点：第一，应使进入每个子区间的数据量平均不少于4个或5个，这样可以保证频率分布曲线有一个比较稳定的形态；第二，为了保证D_I的计算值的精度，I(γ)值的个数不应小于10；第三，γ的起始值应该大于2，因为γ值越小，损失的信息量就越多，往往使I(γ)与lg(γ)之间的线性关系变坏。为此，进行分形结构因子计算时，应根据数据量的多少，选择适当的γ的初值，终值和增量，以保证数据点基本上分布在一条直线上，换句话说，使计算局限在公式（5）的线性区间内进行。

如上所述，分形结构因子与信息维数的计算方法基本上是一致的，但也有一些差异，第一，信息量维数的计算是指将空间分成γ个小空间，而分形结构因子的计算是将数据总区间分成γ个子区间，显然，后者仅限于某个局部研究领域；第二，信息量维数D_I的计算值是负值，其计算式为：

$$I(\gamma)=I_0-D_I \log\gamma \tag{6}$$

很明显，公式（5）和（6）之间有一个负号的差别；第三，如上所述，根据公式（5）求出的FSF值是正值，为了表示频率分布曲线是正偏斜还是负偏斜，又像在上述第（4）项所说的那样：如果频率分布的峰偏系数是负值，也将其FSF值改为负值。为了以示区别。把利用公式（5）求出的D_I值定义为分形结构因子，用来表征频率分布曲线的微细变化。

三、研究分布结构因子的意义

（1）分形结构因子可以定量地表征各种频率分布曲线的的偏倚性，如果频率分布是一条水平线，其分形结构因子为1，如果频率分布曲线是一条垂直线，其分形结构因子为0；正态分布的分形结构因子大致分布在0.90-0.97之间；对数正态分布的分形结构因子大致分布在0.3-0.8之间，上述界线仅仅是一个相对界线，因为分形结构因子的大小与γ的取值范围有关，同一组数据由于γ的取值不同，其相应的分形结构因子也是不同的，另

外，正态分布和对数正态分布具一个严格的数学表达式，而自然界的分布很难通过严格的正态分布和对数正态分布的检验，只能说这种分布近似于正态分布或近似于对数正态分布。因而正态分布或对数正态分布的分形结构因子分布范围的边界应是一个相对的界线。

（2）分形结构因子是正值，表示频率分布是正偏斜，表示高于算术平均值的样品数比低于算术平均值的样品数少，如果FSF值比较小，可以推测：某些高于平均值的样品可能在局部地区聚集，或者局部样品的测量值显著地高于算术平均值。反之，如果FSF是负值，并且比较小，表示频率分布是负偏斜，可以推测某些低于平均值的样品可能在局部地区聚集，或者说局部样品的测量值显著地低于算术平均值。因此，分形结构因子可以定量地表征频率分布曲线的微细变化。这种微细变化在一定程度上反映了与这种分布有关物质空间分布的均匀性或测量值之间的相关性。如果样品采集是连续的随机采样，那么分形结构因子就表示该物质在空间分布均匀，聚集程度小。相反，分形结构因子小，表示这种物质空间分布不均匀，聚集程度大。如果样品的采集是不连续的，仍可以利用分形结构因子推测测量值之间的相关性，分形结构因子大，说明测量值之间的相关性小，分形结构因子小，说明测量值之间的相关性大。

（3）分形结构因子是利用0到1之间的数值表示各种频率分布的微细变化，而峰偏系统和峰凸系数不是分布在某一个数值范围之内，没有一个固定的上限值，因此，分形结构因子比峰偏系统和峰凸系数更方便进行频率分布的对比。

（4）因为分形结构因子可以表示物质空间分布的变化性，并且是一个无量纲的值，因而，它可以作为各种分类的参数，比如金品位的分形结构因子可以作为金矿床类型、勘探类型，勘探网度，采样间距分类的参数。

（5）分形结构因子可以作为判别频率分布理论模拟精度的一个参数。如果理论模拟分布的分形结构因子和峰偏系数接近，就可以认为其理论模拟较好。

四、分形结构因子在地质学上的应用

作者曾以一些实例详细叙述了分形结构因子在在地质上的应用[1,2]。从这些实例表明：分形结构因子是定量地表征矿物、岩石和矿床中各种组分变化特征强有力的工具，利用样品之间分形结构因子的差别，可以对样品或样品各组分进行分类，研究产生这种差异的原因，它对矿物的类质同像的替换，岩石的化学组成变化、矿床中有益组分的变化规律及其成因的研究具有重要意义，尤其是岩石中微量元素的含量很低，变化很大，往往很难看出它们的规律性，分形结构因子将是一个非常重要的工具。

参考文献

[1] 沈步明，王思敬，1993，一个新的频率分布的特征经参数－分形结构因子，科学通报，8，724-727。

[2] 沈步明，1993，分形结构因子及其在地质学上的应用，岩石学报，3，216-226。

变形条件下黄土微结构分形特征及其工程意义

胡瑞林　李向全　官国琳　叶浩

（中国地质科学院水文地质工程地质研究所）

黄土是我国黄河流域广泛分布的一种特殊土体，也是该地区人类——工程活动的最主要地质环境。黄土微结构是制约建筑地基工程行为之关键，也是黄土地区地基湿陷、滑坡、坝基渗透变形等工程灾害之根源。对此，人们已有充分的认识，并已投入了相当规模的人力和物力去探索其结构控制机理，亦取得了一大批有益的成果。但是，由于土体微结构是复杂自然环境的综合产物，具有显著的不确定性和非均质性，难以量化，因而至今的研究工作仍停留于定性分析水平，岩土工程基础理论——土力学也不得不长期地沿袭传统的连续介质模式，在许多情况下很难逼近于土体的自然状态。人们渴望微结构研究取得突破性进展，从而推动整个土力学理论与实践的飞跃发展。可喜的是，近年来分形理论在岩体结构非确定性问题研究方面取得了重大进展，这给土体微结构研究提供了新的思路、注入了新的活力。因而，人们又开始了新的一轮微结构研究热潮，并普遍认为分形理论很可能成为有效解决土体结构量化问题的突破点。为了推动结构研究工作的纵深发展、为老区经济的腾飞，作者在前人工作的基础上，以分形结构要素测定与计算为起点，对扰动黄土变形过程中的分形结构变化特征进行了初步分析，并取得了一定成果。这项工作仍在深化过程中，并得到了地质行业科技发展基金的支持。

一、微结构图象处理

作为土体微结构量化分析的第一步，必须具备有效获得土体结构定量信息的测试技术与手段。为此，我所与合肥工业大学合作，于1990年研制成功了微结构图象处理系统（MIPS）。该系统的设计思路主要由吴义祥博士、凌泽民研究员提供，作者作为主要参加者，重点参与了软件编程和系统改造工作。图1是该系统的硬件构成与工作原理图。

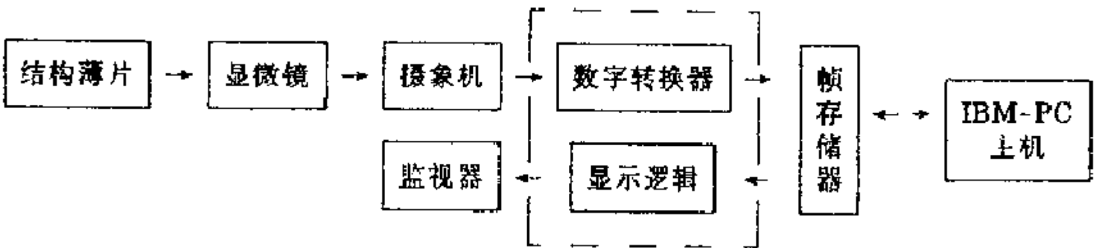


图1　微结构图象分析系统构成与原理

结构图象处理将大致按图2所示的流程进行。表1为该系统的主要输出项。不难看到，由结构图象处理得到的定量结构信息十分丰富，这十分有利于用户从不同侧面去探讨土体的工程地质性质、量化分形结构模式进而确定其岩土工程性状。可以认为，图象分析系统为进一

步探索土体结构奥秘开辟了新的途径。本次工作正是在这样一种坚实基础之上开展的。

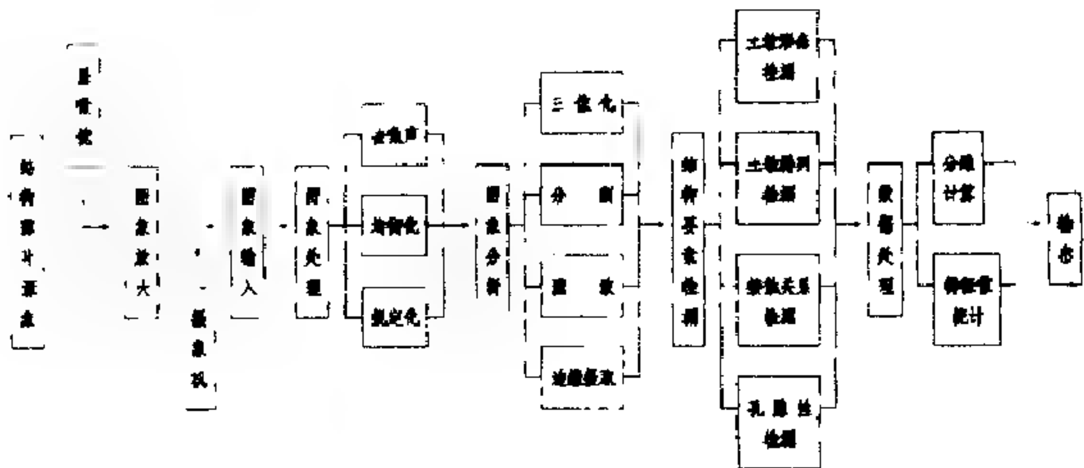


图2 微结构图象分析流程

表1 微结构图象分析系统主要输出项

<table>
<tr><td>颗 粒</td><td>边缘坐标</td><td>面积</td><td>弦长</td><td>周长</td><td>扁圆度</td><td>排列方向</td><td>粒间距</td><td>粒径</td><td>比表面积</td></tr>
<tr><td>孔 隙</td><td>边缘坐标</td><td>面积</td><td>弦长</td><td>周长</td><td>扁圆度</td><td>排列方向</td><td>孔隙比</td><td>孔径</td><td>连通率</td></tr>
<tr><td>解触带</td><td>宽 度</td><td>面积</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">结构要素分形</td><td colspan="3">结构熵</td><td colspan="4">结构参数统计值</td></tr>
</table>

二、微结构形态要素及其分维

（一）微结构形态要素

广义的土体微结构可以理解为固体颗粒集合体及相应孔隙的形态特征、集合体与集合体之间、集合体与孔隙流体之间的相互作用方式和联结强度大小。但是，就其微观形态而言，微结构实际上狭指土粒（或集合体）的形态、排列组合方式、接触关系及孔隙性等四个方面。组成或刻划这四个方面特征的基本元素，作者称之为结构要素，这些要素的层次性复杂集成构成了微结构形态的整体特性。

实际上，图2中右方的底层元素才是结构要素的实体，它是根据图象处理的可能结果选定的，虽然不够全面，但事实上包容了结构要素的主要方面，且均可取得相应的量化结果，因此具有重要的实用价值。这些要素的图像含义及其工程内涵请参见表2。

（二）结构要素分维算法

自然界存在着许多非确定现象，分形（fractal）就是其中一种普遍存在的特殊类型。这

种类型具有典型的自相似性，即局部(部分)与整体在形态、功能和信息等方面具有统计意义

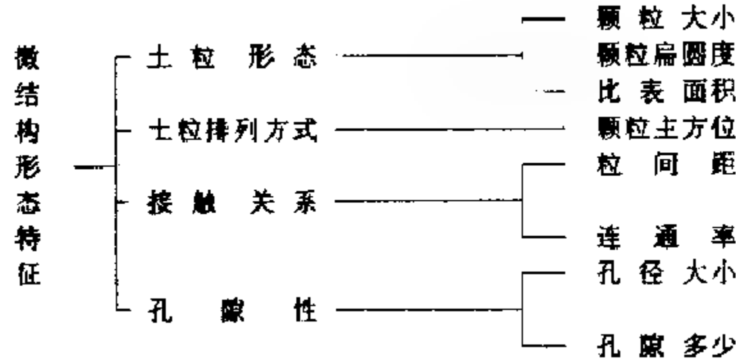


图3　微结构形态要素层次关系

上的相似性，适当改变分形对象的几何尺寸，其整体结构并不改变。这种自相似性可用分维加以定量描述。

我们知道，土体的工程性质实际上是土体结构单元体性质的综合表现，而结构单元体的

表2　微结构要素的涵义

结构要素名称	图象定义	工程涵义
粒径	颗粒最长弦	反映土粒的大小
颗粒扁圆度	垂直于最长弦之最大宽度/最长弦长度	反映土粒的形状
比表面积	颗粒周长/颗粒面积	反映土粒的吸着能力
颗粒方位	最长弦与水平扫描线的夹角	反映颗粒的定向性
粒间距	两相邻颗粒间的象素点数	反映土粒的密实度
连通率	粒间孔隙线宽度之和/粒间距	反映粒间孔隙比重或连接物多少
孔径	孔隙最长弦长	反映孔隙大小

性质又在很大程度上取决于土粒集合体甚至于单粒矿物的性质，因此，它们之间具有较为明显的层次性和自相似性，我们是可以利用分形结构来表征土体微结构的不确定性状的。所以，在结构要素分形处理时，我们可以在结构要素的值域范围内，通过改变其等分间距L_1(即标度)划分出相应的若干个(Ni)域值子域，并分别测定其分布概率P_1，然后利用信息维的概念按下式确定各结构要素的分维值(见表3)：

$$D=\lim_{Li\to 0} -\left(\sum_{i=1}^{N} Pi\cdot Ln(1/Pi)\right)/(Ln\ L_1)$$

结构要素分维刻划的是土体结构要素的整体特征，是与标度无关的参量，比常用的统计特征值要全面而深刻得多，十分有利于形态模式的量化。

表3　结构要素分维计算方法一览表

项目＼要素		粒径	颗粒方位	颗粒扁圆度	颗粒比表面积	孔径	粒间距	连通率
值域		[1,256]^{*1}	[0, Π]	[0,1]	[4/256,4]^{*2}	[1,256]^{*1}	[1 254]	[0 1]
间距	表达式	255×ZK_n	Π×ZK_n	1×ZK_n	3 984×ZK_n	255×ZK_n	253×ZK_n	1×ZK_n
(L_i)	说明	ZK=0 05 0 1, . ,0 95,1						
等分数(N_i)		255/L_i	Π/L_i	1/L	3 984/L_i	255/L_i	253/L_i	1/L_i
区间	通项	[(A0+L_ix(N_j−1)),(A0+L_ixN_j)]						
	A0	1	0	0	4/256	1	1	0
划分	j	j=1 2 , N_i						
总点数		M						
区间分布点数		M_i						
区间分布概率		$P_i=M_i/M$						
维	通式	$D=\lim_{L_i\to 0} -(\mathrm{Ln}\sum P_i\cdot \mathrm{Ln}(1/P_i))/\mathrm{Ln}(L_i)$						
数	A	$\mathrm{Ln}\sum P_i\cdot \mathrm{Ln}(1/P_i)$						
	B	$\mathrm{Ln}(L_i)$						
算法		作A、B双对数散点图 取中部或起始部分线型段数据点进行回归 得斜率Kd 那么,D=−Kd						

注 *1单位为象素点。最小粒径为一个象点 最大为整个区幅(256X256);*2最大值取单点圆的L表面积 最小值取方形精幅值.

(三)黄土结构要素分维

前面我们已就微结构要素的自相似性作了扼要的理论分析,并设计了相应的分维算法。为了证实结构要素分形的实际存在,我们按照图2所示的过程,对黄土高原(陕西黄陵)采集的黄土样品进行了图象处理,然后按照表3算法逐次进行了数据分析,最后得到了各要素的A～B

表4　结构要素分维值

粒径	颗粒方向	颗粒扁圆度	比表面积	孔径
0 303	0.367	0.26	0.186	0.389

注　由于未能取得连通率、粒间距的实验数据,因此本次未能计算其分维值

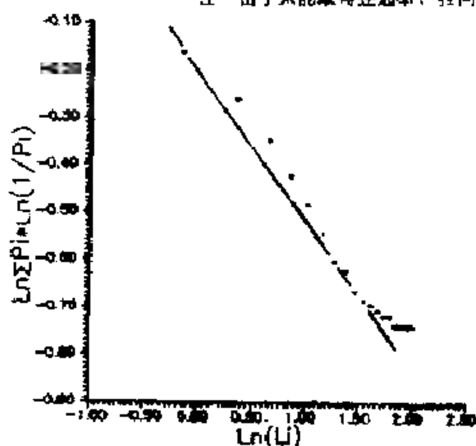


图4　(粒径)A-B双对数坐标散点图

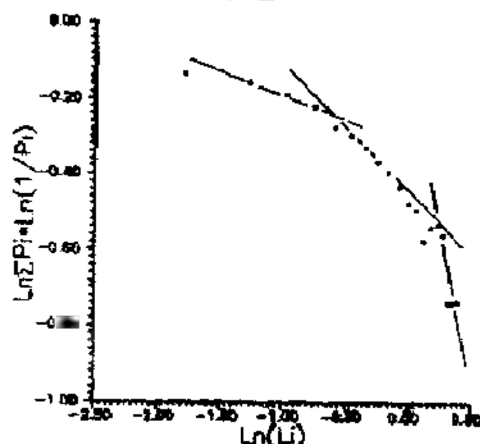


图5　(方位)A-B双对数坐标散点图

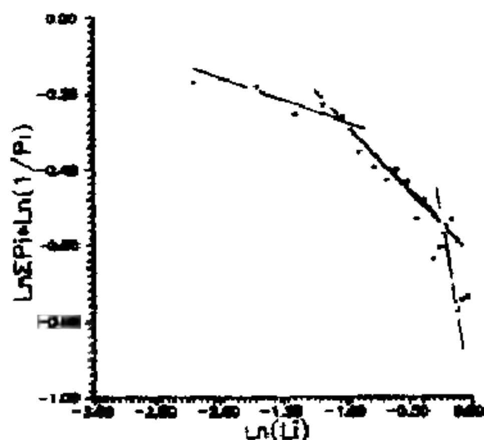


图6 （扁圆度）A-B双对数坐标散点图

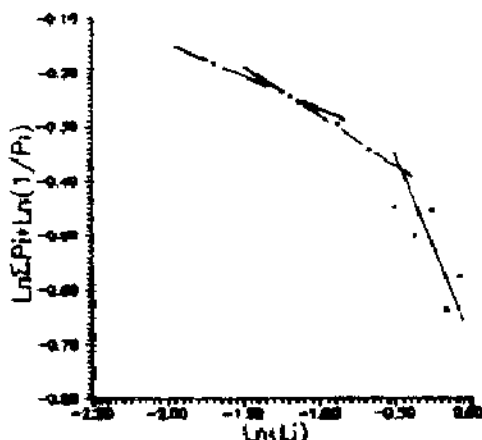


图7 （比表面积）A-B双对数坐标散点图

双对数座标散点图（图4 图8），取其中、上部直线段斜率可得到对应的分维值（表4）。其结果表明，天然状态（没施加外部荷栽时）黄土结构要素的分形结构是较为明显的，而且相当稳定，其分维值在0.1～0.4之间。因此，我们可以利用结构要素分维去研究黄土的结构特征，进而分析其工程特性。

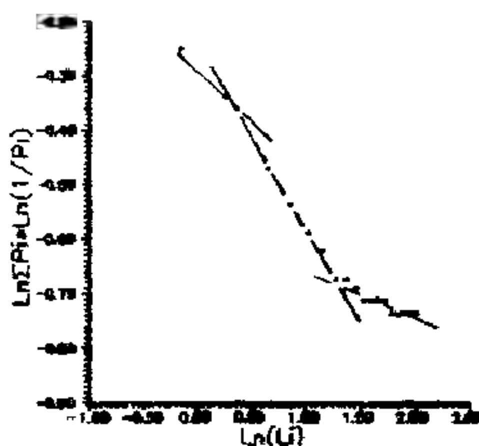


图8 （孔径）A-B 双对数坐标散点图

三、变形条件下黄土结构要素分维变化特征

为了探讨黄土微结构在压力作用下的变化规律，我们特地制作了人工扰动黄土样，以消除黄土不均一性产生的初始误差，使各结构分析样保持在同一初始状态之下。这些试样仍取自于陕西黄陵。试验方法采用常规压缩，共施加了6级荷载（P）：50，100，200，400，800，1600KPa，在每级荷载加压稳定后均进行了结构图象处理，并得到相应的结构要素分维值D。

1 D～P关系

根据各压力级分维值，我们绘测了各结构要素的D～P关系图（图9-图13），不难看到：随压力P的增大——

①粒径分维（D_1）将随之增大，增大幅度以初始阶段较为明显，当压力大致超过4KPa以后变化相对缓和下来。压力P与粒径分维值D总体上呈现对数变化关系.

$$D_1=0.007\times Ln(P)+0.374$$

这说明，随着压力的增大，粒径的复杂程度将显著加大，反映土体颗粒发生了分化或合并，不均匀程度有所提高。当然，这一结论仅适用于人工扰动土样，因为初始状态时土样已

进行过充分的均一化处理。而天然状态土样要复杂得多。

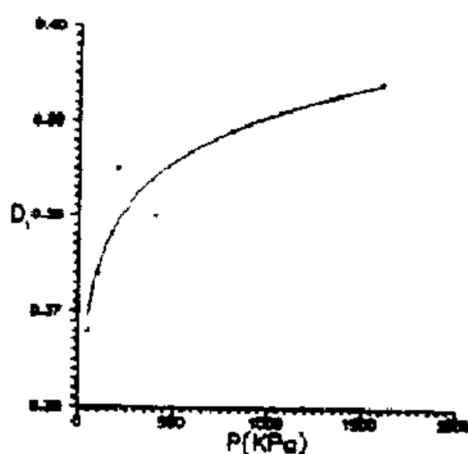


图9 D1-P关系图

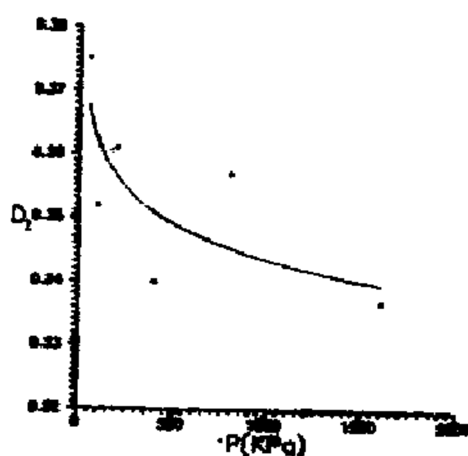


图10 D2-P关系图

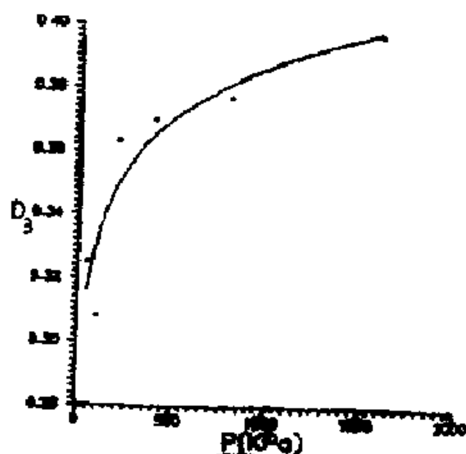


图11 D3-P关系图

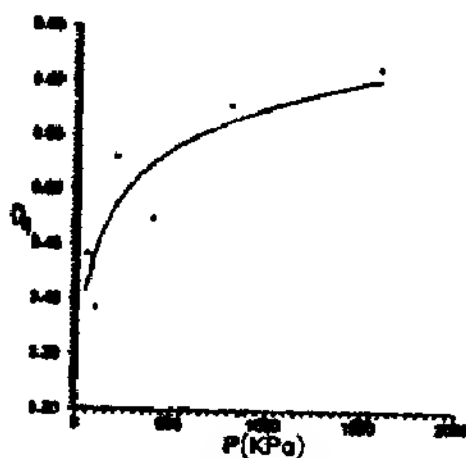


图12 D4-P关系图

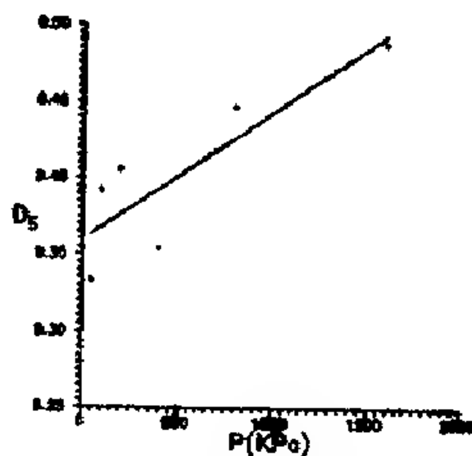


图13 D5-P关系图

②颗粒方向维数(D_2)将随之减小。初始阶段减小幅度较大，当压力大致超过400KPa时这种减小就不太显著了。颗粒方向维数与压力呈对数关系:

$$D_2=-0.0081\times Ln(P)+0.362$$

其工程涵义是 随着压力的增大，颗粒方向的复杂程度将呈对数降低，反映土体颗粒发生了转动，总体定向性有所增强。随着压力的进一步增加（超过400KPa时），定向性的改善将减缓下来。

③颗粒扁圆度维数（D_3）将随之呈对数增加，两者的关系为：

$$D_3=0.0237\times Ln(P)+0.332$$

反映黄土颗粒形状发生了相应的变化，这种变化是朝着复杂化的方向发展，这可能与初始状态下土粒得到了充分的分散有关。它与粒径的改变（复杂化）相适应。

④比表面积分维（D_4）亦将随之呈对数增大，压力与分维D_4的关系是：

$$D_4=0.0563\times Ln(P)+0.447$$

同样地反映了比表面积值的复杂程度提高，这是粒径、形状调整的综合反映。

⑤孔径分维（D_5）将随之稳定增大，呈现线性对应关系：

$$D_5=0.0084\times P+0.359$$

这说明，随着压力的增大，黄土孔隙大小发生了变化，并朝着复杂程度加大的方向发展。这一过程同样可能是由于初始状态下土粒得到了充分的分散、孔隙大小分布均一的缘故。

2. dD

从压力变化下的分维变化值（dD）来看（图14），各结构要素的差异也是相当明显的。其中，以粒径的变化最小，而比表面积和孔径的变化最大。这说明，在压力的作用下，土粒是一个相

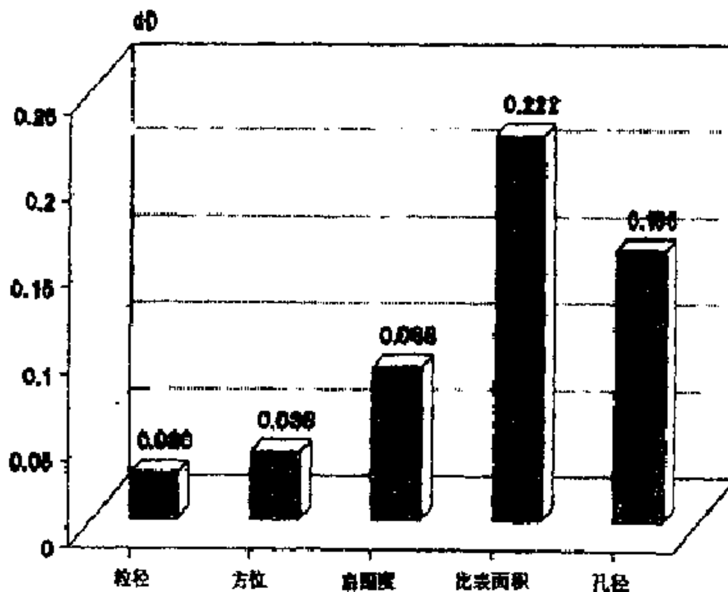


图14 结构要素分维变化值方图

对较为稳定的结构单元，而孔隙则相对较不稳定。因此，土体结构稳定性的改良应当以阻止孔隙形态变化为重点。这一点非常重要。

结　　论

通过以上分析，本文主要得到了如下几点结论：

1. 作为土体微结构定量信息获取的重要手段，我所研制的"微结构图象分析系统"具有重要的实用价值和可靠性。

2. 黄土结构状态可以用粒径、颗粒方位、扁圆度、比表面积、孔径、连通率和粒间距等7项结构要素加以定量描述，并具有明显的分形结构，其分维数在0.1～0.4之间。

3 人工扰动黄土在压力作用下，其结构状态将发生显著变化，除方向性外，其余结构要素在总体上朝着复杂程度增大的方向发展。

4. 在压力的作用下，土粒是一种相对稳定的结构单元，而孔隙却较不稳定，所以土质改良的重点应放在阻止孔隙变化上。

5. 分形理论对于解决土体微结构量化问题并进而分析土体的工程性质是一种行之有效的方法。

主要参考文献

1. 肯尼思.法尔科内，分形几何--数学基础及其应用，东北工学院出版社，1991.8
2. 洪时中、洪时明，地学领域中的分维研究：水系、地震及其它，大自然探索，1988,7(2)
3. 李后强、分形理论与生物学研究，大自然探索，Vol.7 No.24.1988(2)

JRC 尺寸效应分形的特征①

杜时贵　　章仁友
(中国地质大学)　　(浙江省水利勘测设计院)

摘　要

根据测度关系可将岩体结构面粗糙度系数 IRC 的尺寸效应规律描述为 $JRC_n/JRC_o=\left[\frac{L_n}{L_o}\right]^{-D}$，分维数 D 该划了 JRC_n 随 L_n 增大而降低的负指数衰减速率。实测统计结果表明，本文提出了一种揭示 JRC 尺寸效应规律的有效途径，这种方法既能体现 JRC 尺寸效应的各质异性和各向异性，而且表达形式简单，使用更方便，结果更符合客观实际。

关键词：JRC 尺寸效应　分维数 D　修正系数 α　各质异性　各向异性

八十年代以来，分形理论在岩体结构面粗糙度系数 JRC 研究领域得到了长足的进展，一批有价值的研究成果相继诞生[1-6]。无疑，分形理论的应用拓宽了 JRC 研究的新领域，其精采之处就在于实现了 JRC 描述的定量化。近年来，杜时贵等人用实测统计资料检验了 Fractal 方法研究 JRC 的实践效果[7]，从而为正确运用分形理论这个有力的武器正确确定岩体结构面的粗糙度系数 JRC 奠定了良好的基础。遗憾的是，迄今为止，Fractal 方法研究 JRC 仅限于描述给定轮廓曲线的粗糙度系数 JRC。

众所周知，JRC 存在尺寸效应[8]。因而，JRC 尺寸效应的正确认识对客观评价岩体结构面的粗糙起伏特征至关紧要。实测统计结果表明，JRC 尺寸效应具有各质异性，各向异性和非均一性[9]，是一个不规则的复杂系统。Fractal 方法在研究这种不规则的复杂系统中显示了显著的优越性。本文由 JRC 尺寸效应规律研究入手，由测度关系建立了 JRC 尺寸效应的理论分形式，并由实测统计资料论证了 JRC 尺寸效应的自相似性，最后用实例说明了 Fractal 方法描述 JRC 尺寸效应规律的优越性。

一、JRC 尺寸效应的复杂性

JRC 尺寸效应是指随着取样长度(即测量长度)的增大，结构面粗糙度系数 JRC 减小的现象(图 1)。Barton 和 Choubay (1977) 根据大量不同尺寸节理试样的直剪试验结果，建立了 JRC 尺寸效应近似关系式：

$$JRC_n \approx JRC_o\left[\frac{L_n}{L_o}\right]^{-0.02JRC_o} \tag{1}$$

式中，L_n 为实际结构面长度(cm)，L_o 为实验室尺寸结构面长度($L_o=10$cm)，JRC_n 为

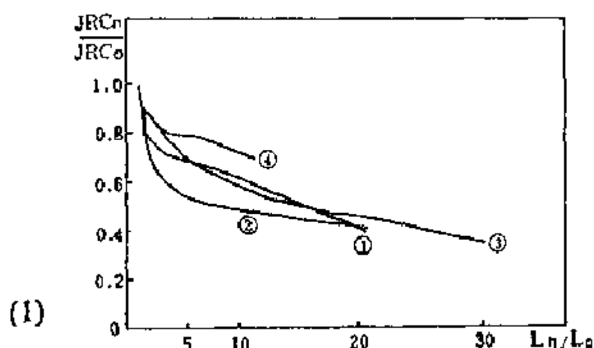


图 1　JRC 尺寸效应(由表 1 资料整理，据杜时贵 1992)

①国家自然科学基金资助项目

实际结构面粗糙系数，JRC_0为实验室尺寸结构面粗糙度系数。

杜时贵(1992)的实测统计结果表明，式(1)中指数系数 0.02 是统计平均值，它随结构面的壁岩成分、测量方向和测量部位的不同而变化。我们可用一个变化的系数 α(或定义为尺寸效应修正系数)替代(1)式中的常数 0.02，得到 JRC 尺寸效应规律的一般式：

$$C_n = JRC_o\left[\frac{L_n}{L_o}\right]^{-\alpha JRC_o} \tag{2}$$

由表 1 所列的 1157 条不同取样长度的 JRC_n 实测统计结果反算的 α 示于图 2。由图 2 可明显地看出，JRC 尺寸效应规律具有各质异性，各向异性和非均一性，是一个不规则的复杂系统。

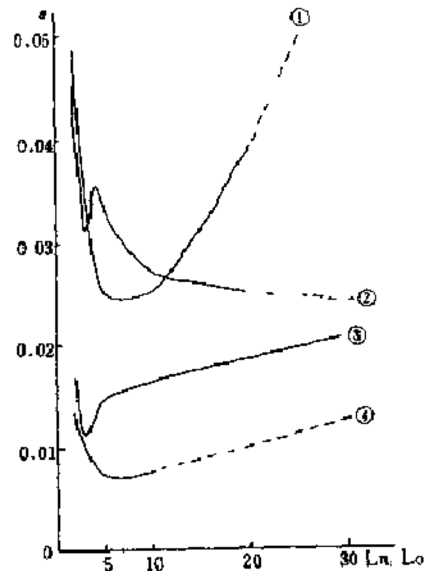


图 2　α 随 L_n/L_0 而变化 (据杜时贵,1992)

二、JRC 尺寸效应的自相似性

根据测度关系，我们设想把立方体的边长扩大 2 倍，则 2 维测度的表面积为 2^2 倍，3 维测度的体积为 2^3 倍，具有 D 维测度的量为 2^D 倍。因此，具有 D 维测度的量 X 与长度倍数 l 的理论分形方程可表示为：

$$X = k \cdot l^D \tag{3}$$

式中，测度 D 即分维数，它表征了 X 随 l 增大而增大的指数增长速率。

JRC 尺寸效应的具体表现是粗糙度系数 JRC 随取样长度的增大呈负指数衰减(图 1)，这种关系可概化为 $JRC_n/JRC_0 \sim L_n/L_0$ 关系：

$$\frac{JRC_n}{JRC_o} = \left[\frac{L_n}{L_o}\right]^{-D} \tag{4}$$

对比式(3)和式(4)可知，D 即为测度(JRC_n/JRC_o)的分维数。将 JRC_n/JRC_o 和 L_n/L_o 投影到双对数坐标纸上，若为直线则说明 JRC 尺寸效应规律具分形特征。

表 1 列出了小浪底水库风雨沟西侧边坡岩体 SSE 组节理(走向 162°，倾向 252°，倾角 84°)1157 条不同取样长度轮廓曲线的 JRC_n 实测统计值。图 3 是据表 1 实测统计结果绘制的$lg\left(\frac{L_n}{L_o}\right) \sim lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_o}\right)$关系图。由图 3 可以看出，$lg\left(\frac{L_n}{L_o}\right) \sim lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_o}\right)$近似服从直线规律，因此，可以认为，JRC 尺寸效应具有统计意义上的自相似性。

表 2　SSE 组节理不同测量方向不同取样长度曲线 JRC_n 测实结果

JRC_n/JRC_0		L_n/L_0	1	2	3	4	5	10	20	30
整岩岩性	测量方向	样本数	88	84	83	87	43	35		12
T_1^3 粘土岩	走向 ③	JRC_n	15.6	12.5	12.0	12.4	11.0	8.4		5.2
		$\frac{JRC_n}{JRC_0}$	1.000	0.8013	0.7692	0.7949	0.7051	0.5385		0.3333
	倾向 ④	样本数	82	76	77		41	36		
		JRC_n	19.6	16.4	16.2		15.5	12.8		
		$\frac{JRC_n}{JRC_0}$	1.0000	0.8367	0.8265		0.7908	0.6531		
T_1^{2-3} 细砂岩	走向 ①	样本数	35	32	34	34	36	36	18	
		JRC_n	8.56	6.22	6.09	6.01	6.06	5.11	3.12	
		$\frac{JRC_n}{JRC_0}$	1.0000	0.7266	0.7114	0.7021	0.7079	0.5970	0.3645	
	倾向 ②	样本数	31	29	30	26	28	29	18	
		JRC_n	11.90	7.86	8.00	6.30	7.10	5.90	5.10	
		$\frac{JRC_n}{JRC_0}$	1.0000	0.6605	0.6723	0.5294	0.5966	0.4958	0.4286	

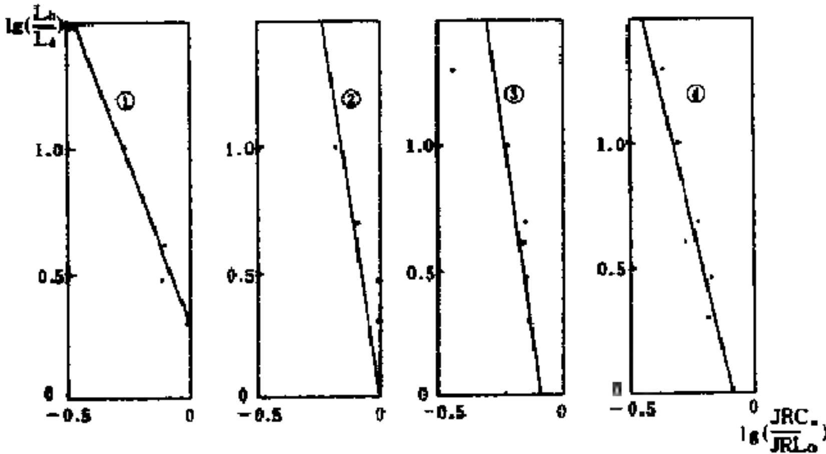


图 3　$lg\left(\frac{L_n}{L_0}\right) \sim lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_0}\right)$ 关系图

三、JRC 尺寸效应的分维数 D

式(4)两边取对数得:

$$\frac{1}{D}=-\frac{lg\left(\frac{L_n}{L_o}\right)}{lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_o}\right)} \tag{5}$$

可见，$\frac{1}{D}$ 即 $lg\left(\frac{L_n}{L_o}\right)\sim lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_o}\right)$关系直线斜率的负值．而 D 表征了粗糙度系数 JRC_n 随取样长度增大而减小的负指数衰减速率．D 值越大，JRC_n 随取样度增大衰减越快；D 值越小，JRC_n 随取样长度增大衰减越慢．

上述实测统计结果求得的 SSE 组节理 JRC 尺寸效应分维数 D 列于表 2．由图 3 和表 2 可知，虽然 JRC 尺寸效应分维数 D 仍存在各质异性和各向异性，但按 JRC 尺寸效应分维数 D 描述的 JRC 尺寸效应规律消除了非均一性，它比 JRC 尺寸效应修正系数 α 更容易地刻划了 JRC 尺寸效应规律，便于直接应用．

表 2　SSE 组节理各测量方向的 JRC 尺寸效应分维数 D

节理壁岩	测量方向	$lg\left(\frac{L_n}{L_o}\right)/lg\left(\frac{JRC_n}{JRC_o}\right)$	D
T_1^{6-1} 粘土岩	走　向	−2.7302	0.3663
	倾　向	−5.6352	0.1775
T_1^{5-1} 细砂岩	走　向	−6.7595	0.1479
	倾　向	−4.6439	0.2154

四、JRC 尺寸效应分维数 D 的各向异性

表 3 是根据杜时贵研制的简易纵剖面仪[10]，在小浪底水库 2#导流支洞围岩 T_1^{5-2} 硅钙质细砂岩 SSE 组节理(含有两个羽饰构造的 I 型断裂面，产状 255°∠88°)上野外现场绘制的 1023 条取样长度为 10cm、20cm、50cm 和 100cm 的结构面表面轮廓曲线，用直边法实测统计的各方向 JRC_n 值。据表 3 的实测统计结果，按式(2)和式(5)反算的各方向 JRC 尺寸效应系数 α 和分维数 D 列于表 4．表 4 结果可绘制 D 和 α 随方向变化图(图 4)。由图 4 不难看出，虽然 D 和 α 都存在不同程度的各向异性，但 α 的各向异性远比 D 显著．因此，用分维数 D 描述的 JRC 尺寸效应规律稳定性更好．

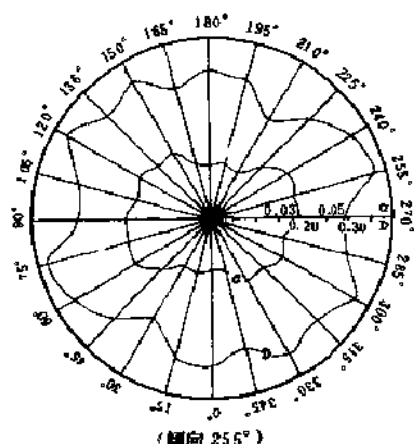


图 4　分维数 D 和修正系数 α 随方向变化图

表 3　SSE 节理各测量方向 JRC_n

取样长度 (cm)	实测统计平均值 \ 测量方向	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
10	样本数	89	39	42	38	38	38	52	[illegible]	38	40	32	33
	幅度(mm)	3.45	3.15	2.70	2.47	2.26	2.48	1.94	2.34	2.52	2.56	2.61	3.05
	相对幅度	0.0345	0.0315	0.0270	0.0247	0.0226	0.0248	0.0194	0.0234	0.0252	0.0256	0.0261	0.0305
	JRC_{10}	13.8	12.6	10.8	9.8	9.1	9.9	7.[illegible]	9.4	10.1	10.3	10.4	12.2
20	样本数	48	19	17	19	20	19	44	20	10	20	22	22
	幅度(mm)	5.65	5.07	4.70	3.90	4.00	3.04	3.41	4.15	4.61	4.25	4.95	5.25
	相对幅度	0.283	0.0254	0.0235	0.0195	0.0200	0.0152	0.0171	0.0208	0.0233	0.0213	0.0248	0.0263
	JRC_{20}	11.1	10.1	9.4	7.8	8.0	6.1	6.8	8.3	9.2	8.5	9.9	10.5
50	样本数	28	10	8	10	10	9	28	10	10	8	9	10
	幅度(mm)	10.7	9.2	8.6	7.4	7.6	6.0	6.3	7.0	6.5	6.6	8.7	10.3
	相对幅度	0.0214	0.0184	0.0172	0.0148	0.0152	0.0120	0.0126	0.0140	0.0130	0.0132	0.0174	0.0206
	JRC_{50}	9.0	8.0	7.5	6.4	6.6	5.1	5.3	6.0	5.7	5.8	7.8	8.8
100	样本数	14	5	5	5	5	3	14	5	5	5	4	5
	幅度(mm)	13.6	14.8	13.4	10.6	8.2	9.0	8.6	9.8	8.7	11.6	11.3	13.4
	相对幅度	0.0136	0.0148	0.0134	0.0106	0.0082	0.0090	0.0086	0.0098	0.0087	0.0116	0.0113	0.0134
	JRC_{100}	6.0	6.1	5.8	4.7	3.4	3.7	3.6	4.4	3.6	5.0	4.9	5.8

表 4　各实测方向的分维数 D 和修正系数 α

D 或 α \ 实测方向	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
分维数 D	0.3249	0.3134	0.3493	0.3057	0.3560	0.3749	0.2962	0.3057	0.3642	0.3211	0.3443	0.2924
修正系数 α	0.0235	0.0249	0.0231	0.0320	0.0391	0.0379	0.0385	0.0325	0.0361	0.0312	0.0331	0.0234

通过以上分析，我们得到以下几点结论：

(1) JRC 具有尺寸效应的特性，JRC 尺寸效应存在自相似性，具有分形结构。

(2) JRC 尺寸尺寸效应分维数 D 真实地刻划了 JRC_n 随取样长度 L_n 增大而降低的负指数衰减速率，物理意义明确。

(3) 用分维数 D 描述 JRC 尺寸效应规律比用修正系数 α 更简便，应用更方便，所以，JRC 尺寸效应的分形特征研究具有广泛的应用前景。

参考文献

〔1〕 Carr James R. and Warriner James B., Rock mass classification using fractal dimension, 28th US symp. on Rock Mech., 29 June—1 July,1987.

〔2〕 Turk V., Greig M. J. , Dearman W.R.and Amin F.F., Characterization of rock joint surfaces by fractal dimension, 28th symp. on Rock Mech ., Tucson, 29 June—1 July,1987.

〔3〕 Huang S.h., Oelfke S.M. and Speck R.C., Applicability of fractal characterization and modelling to rock joint profiles, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. Vol.29, No.2,PP 89—98.1992.

〔4〕 Sakellariou M.m Nakos B. and Mitsakai C., On the fractal character of rock surfaces , Int. J. Rock Mech. Min.Sci.and Geomach. Abstr.Vol.28,No.6,PP.527—533,1991.

〔5〕 Chelidze T.and Gueguen Y., Evidemce of fractal fracture, Int.J.Rock Mech.Min.Sci. and Geomech.Abstr.Vol.27,No.3,PP.223—225,1990.

〔6〕 谢和平，Willian G. Pariseau,节理粗糙度系数的分形估算，地质科学译丛，第9卷，第1期，1992.

〔7〕 杜时贵等，Fractal 法研究JRC的实践检验，第一届全国分形理论与地质科学学术讨论会论文选集，1992，

〔8〕 Barton N. and Choubey V., The shear strength of rock joint in theory and practic, Rock Mechanics, Vol .10, PP.1—54,1977.

〔9〕 杜时贵、潘别桐，黄河小浪底水库风雨沟西侧边坡稳定性研究，地球科学，1992 年第 6 期.

油藏岩石孔隙结构的分形描述及其应用

李克文　沈平平　贾芬淑

（中国石油天然气总公司北京石油勘探开发研究院）

摘　要

油藏岩石的孔隙结构特征对原油的采收率、油田开发的效果有较大的影响，许多研究人员曾经提出了多种参数来描述孔隙结构的特征，不过，仍有不足之处。本文采用分形几何的理论来描述油藏岩石的孔隙结构特征取得了良好的效果。在研究孔隙结构对水驱油采收率影响的基础上，初步证明了采用孔隙结构的分形维数预测水驱油采收率比采用其他描述孔隙结构的参数预测水驱油采收率的效果要好。

关键词 孔隙结构；分形维数；采收率；岩心分析

1、引言

石油采收率是评价油田开发效果的重要指标之一，其影响因素十分复杂。对于注水开发油田，总希望能够预测油田注水以后剩余油饱和度的变化或油田的无水期采收率与最终采收率。在确定油田的开采方案以后，影响采收率的主要因素是油水粘度比、岩石的润湿性和砂岩的孔隙结构。前两个因素对采收率的影响规律已经比较明确，在一般情况下，油水粘度比越小，水驱采收率越高；油层岩石表面优先水湿的，水驱采收率比优先油湿的要高。关于孔隙结构的研究，国内外也有大量的文献报道。[1]-[6]为了寻找孔隙结构与采收率的相关关系，许多研究人员提出了各种各样的参数来描述孔隙结构的特征，如孔隙度、渗透率、孔喉比、配位数[3]、孔隙几何因子G、难度指数、微观均质系数、相对分选系数以及半径相对分选系数等参数[1]。上述参数的确都可以在一定程度上描述孔隙结构的特征，不过，仍有较大的局限性。上述参数有的难以确定（如配位数）、有的计算比较复杂而有的参数在用来表征对采收率的影响时具有不确定性，其规律不明显。例如渗透率，当渗透率增加时，采收率（特别是无水期采收率）可能增加、减小，也可能不变。

总之，关于孔隙结构的研究，目前主要的问题是采用什么样的参数来描述孔隙结构的特征及其对采收率的影响。孔隙结构的特征之所以很难描述，主要是因为其不规则性和复杂性。

分形几何学[7][8][9]是近几年迅速发展起来的描述不规则物体、随机现象和过程的一门新型学科。本文利用分形几何学的基本理论研究了砂岩孔隙结构的特征及其对采收率的影响规律。

2、砂岩孔隙结构的分形特征

不同的沉积环境以及不同的成岩作用与成岩过程将形成具有不同特征的孔隙结构，如前所述，由于孔隙结构的极不规则性，很难采用常规的参数方法来较好地描述其特征。为了利用分形维数来描述孔隙结构的特征，首先必须确定孔隙结构具有自相似性。为此，将胜利油田和中原油田部分砂岩岩心制成两种测试样品，即柱塞岩样和铸体薄片（本文采用灌注染色环氧树脂的制片工艺）。柱塞岩样用来进行水驱油实验，求得水驱油在不同阶段的采收率；铸体薄片用来进行分形特性的测定其大致过程是在一定倍数的显微镜下将铸体薄片拍成彩色照片，再将彩色照片输入图像处理系统(英国 MAGISCAN2 型)进行分析。

在本文中采用变方格尺度法来进行分形特性的测定，其计算公式如下[7]：

$$N(R)=\frac{C\cdot A}{R^{D}} \qquad (1)$$

试中 C 为比例系数，A 为被研究对象的测度 R 为方格的长度，N(R) 为包含有被研究对象的方格数，D 为分形维数。

若方程1 成立，即在双对数座标纸上 N(R)与 R 呈线性关系，则被研究对象具有自相似性，是一种分形体。

对胜利油田和中原油田部分岩心铸体薄片的测定结果表明其 N(R) 与 R 在双对数座标中呈很好的线性关系，线性相关系数均在 0.99 以上，具有很好的自相似性。图 1 是一个实例，表示 R1—1 号岩心铸体薄片的孔隙结构是一种分形结构。

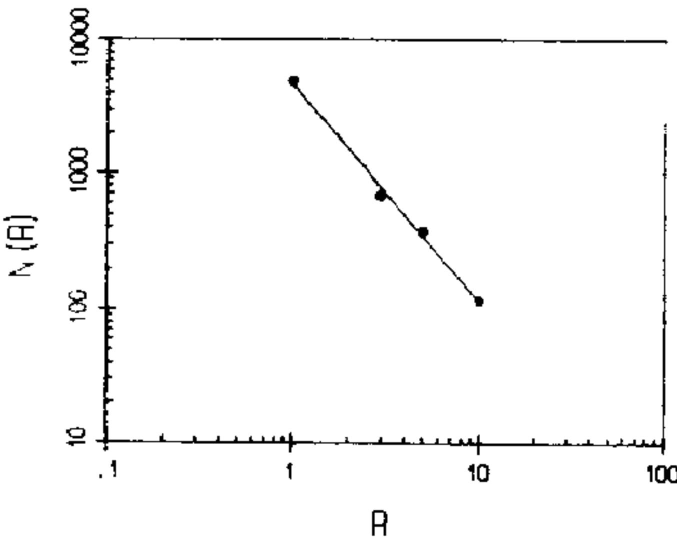


图 1：R1—1 号岩心铸体薄片孔隙结构的分形特性

胡聿国等[8]人以及 Bale[10]等人的研究结果表明其他多孔介质的孔隙结构也具有分形特性。关于砂岩孔隙结构分形维数的变化规律及其对水驱油采收率的影响将在后面详细讨论。

3、水驱油实验

为了寻找孔隙结构的分形维数与水驱油采收率之间的相关关系，在柱塞岩样中进行了水驱油实验。本文中所有的水驱油实验是在相同油水粘度比 3.94 以及基本相同的润湿性条件下

进行的，以便突出孔隙结构对采收率的影响。所用柱塞岩样洗油后在400℃ 下烘烧，使岩样变成强亲水岩样。

先测定岩样的孔隙度与渗透率，再将岩心100%饱和模拟地层水后装入岩心夹持器，用模拟油驱水至束缚水状态，最后用水驱油并测定不同时间或不同注入体积倍数(PV)条件下的采收率。

4、孔隙结构对水驱油采收率的影响

对于胜利油田和中原油田部分岩心的铸体薄片以及对应的柱塞岩样所作的分形研究与水驱油实验研究结果如图2所示。

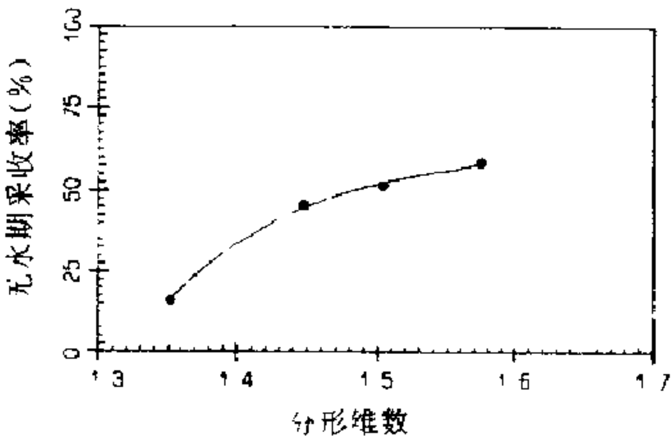


图2：无水期采收率与孔隙结构分形维数的关系曲线

从图2中可以看出，分形维数越大，则对应的无水期采收率越大。无水期采收率与油藏岩石孔隙结构的分形维数具有良好的相关关系。

在温度、驱替速度、油水粘度比岩石润湿性基本相同的条件下，水驱油采收率的大小主要取决于油藏岩石的孔隙结构特征。以往大量的实验结果表明：一般条件下，孔隙结构的均质性越好，则无水期采收率越高，反之亦然。图2所示的结果与上述规律是吻合的，这从另一方面也说明了分形维数是一个较好的描述孔隙结构非均质性特征的参数。

如前所述，水驱油采收率的预测是十分重要的，以往为了找到水驱油采收率与孔隙结构的相关关系，主要采用均质系数α、孔隙几何因子G、有效孔隙度φ以及半径相对分选系数CCR来表示油藏岩石的孔隙结构。然而，这些描述孔隙结构的特征参数与水驱油采收率的相关系数比较低，在预测水驱油采收率的实际应用中存在较大的局限性，在本文中将采用分形维数来描述孔隙结构。在实验条件以及样本数相同的条件下，几种主要的描述孔隙结构的参数与水驱油无水期采收率的相关系数γ列于下表1所示，为了对比方便，表1的相关系数都是线性相关系数。

表1、孔隙结构描述参数的比较

	α	φ	G	CCR	D_f(分维)
相关系数	0.30	0.35	0.55	0.70	0.92

从上表 1 中不难看出，描述孔隙结构的分形维数与水驱油无水期采收率的线性相关系数最高，为 0.92。这说明分形维数能够更好地描述孔隙结构的特征。

5、讨论

如上所述，孔隙结构的分形维数对无水期采收率的影响十分明显，相关程度高。这可能主要是因为无水期采收率受砂岩孔隙结构特征及其非均质性的影响很大，而分形维数正是较好的描述孔隙结构特征及其非均质性的定量参数。

本文对砂岩孔隙结构的分形研究是在铸体薄片上进行的，我们正在研究直接从砂岩岩心测得其孔隙结构分形维数（$2<D<3$）的方法，这一方法的实现可能提高本研究成果的可靠程度和普适性。

6、结论

从本文的研究情况来看，大致可以得出如下结论：

(1)砂岩油层孔隙结构具有较强的自相似性，是一种分形结构。分形维数能够较好地定量描述砂岩孔隙结构的特征及其非均质性；

(2)砂岩孔隙结构的分形维数对无水期采收率有显著的影响，其相关程度很高，可以利用孔隙结构的分形维数作为预测水驱油时无水期采收率的参数；

(3)关于油藏岩石孔隙结构的分形特征与岩石沉积特征的关系、微观分形特征与客观分形特征的关系，很有必要进行深入的研究和探讨。

致　谢

本文研究工作的完成得到了李军、刘宝桦和王蕙荣等人的大力协助，在此表示感谢。

参 考 文 献

(1) 沈平平、李秉智、涂富华，砂岩孔隙结构对水驱采收率的影响及其分类，国际油田开发技术会议论文集(在大庆油田举行)，1982 年。

(2) 杨普华，孔隙结构对水驱油机理影响的研究，石油学报，1980 年增刊。

(3) 李克文、秦同洛、沈平平，根据孔隙的概率分布计算油气水三相相对渗透率曲线的方法研究，石油学报，V10，NO. 4，1989。

(4) F. A. L. Dullien and G. K. Dhawan, Characterization of Pore Structure by a Combination of Quantitative Photomicrography and Mecury Poroimetry, Journal of Colloid and Interface Science, V47, NO. 2, P. 337, 1974。

(5) 高雅明、沈平平，利用数字图象处理系统研究孔隙结构及其应用，第二次国际石油工程会议论文集(北京)，SPE14872，1984。

(6) 李方明，沈平平，用椭球模型和图像处理技术研究油藏岩石，第三次国际石油工程会议论文集(天津)，SPE17849，1988。

(7) 李克文等，分维几何及其在石油工业中的应用，石油勘探与开发，V17，NO. 5，1990。

(8) 胡尊国等，多孔介质孔隙的分形特征与分数维计算，水文地质工程地质，1992 年第 1 期。

(9) T. A. Hewett, Fractal Distribution of Reservoir Heterogeneity and Their Influence on Fluid Tra－nsport, SPE 15386, 1986。

(10) H. D. Bale and P. W. Schmidt, Small－－Angle X－Ray Scattering Investigation of Submicroscopic Porosity With Fractal Properties, Phys. Rev. Lett., V. 53, P. 596, 1984。

用分形理论和小波变换相结合的方法来选择油气田的勘探井位

段　虞　荣　　　　　　高如曾　何光明

（重庆大学系统工程及应用数学系）（四川石油管理局地质调查处研究所）

摘　　要

根据岩石断裂力学和石油、天燃气的地质结构理论石油、天燃气一般存储在地层断层的岩石裂缝里，特别是在"背斜层"里，因此利用物理勘探，即采用人造地震的办法，通过搜集地震波沿地壳不同地质年代岩石传播，经吸收、折射和反射后得到的信号进行分析并通过复杂程序的物理解释，可预测石油、天燃气的储层位置和储量，但由于地震波的波长很长，由此预测出的储层范围过大，往往导致选择勘探钻井的位置不够精确，命中率不高或漏掉矿源，造成人力、物力、财力和时间上的极大浪费。本文利用地震波在地层断层剖面上的时间分形和能量分形，利用它们在统计上的自相似性，可以用不同的尺度(标度)在无标度域内，适当放大或缩小分形对象的几何尺寸，这样就可以不断缩小钻井的范围，即提高选择钻井位置的精度。同时，本文又尝试将分形理论与高分辨率地震波的小波变换(wavelet transform)有机地结合起来更准确地选择油气井的钻井位置。在地震波资料的最新分析里，小波变换能将信号作为一个既是时间又是频率的函数。因此小波变换可作为研究分形客体（天燃气、石油储量质量分布)在不同的长度标度的自相似性的一种合乎自然规律的工具.地震波信号的一个适当的图象时标表示是小波变换的平方模。它是一种能量表示，标模图(scalogram) 提供了地震波信号的能量在时标平面上传播的一种图象形象。由于地层断层岩石的各向异性，地震波通过时波形被扩张或压缩而变形，因此地震波能量分形具有自仿射相似性，从而可将小波变换作为一个数学显微镜，它非常适宜于研究具有分形性质的油气田储层的勘探钻井定位。

引　　言

根据岩石断裂力学和石油、天燃气的地质结构理论，石油、天燃气一般存储在地层断层的岩石裂缝里，特别是在岩层倾斜褶皱严重的"背斜层"里．因此利用物理勘探，即采用人造地震的方法，通过搜集地震波沿地壳不同地质年代的岩石(例如花岗石和玄武岩)传播经吸收、折射和反射(特别是在关联维的高值区，即含油气区，该产层顶底会有新的反射系数出现，表明地震反射系列十分复杂)后得到的信号进行分析并通过复杂程序进行物理解释，可预测石油、天燃气的储层位置和储量。但由于地震波的波长较长，导致地震定位精度不小于0.2度，约为22km.由此，预测出的储层范围过大，往往导致选择勘探钻井的位置不够精确，命中率不高或漏掉矿源，造成人力、物力、财力和时间上的极大浪费。有鉴于此，我们想利用地震波在地层断层剖面上的时间分形和能量分形，利用它们在统计上的自相似性，可用不同的尺度(标度)在无标度域内，适当放大或缩小分形对象的几何尺寸，这样就可以进一步缩小钻井的范围，即提高选择钻井位置的精度.同时，我们又尝试将分形理论与高分辨率地震波的小波变换(或称弱波变换、子波变换、wavelet transform，缩写为ＷＴ)有机地结合起来更准确地选择油

气井的钻井位置。在地震波资料的最新分析里，小波变换能将信号作为一个既是时间又是频率的函数，因此小波变换可作为研究分形客体（天然气、石油储量质量分布）在不同的长度标度的自相似性的一种合乎自然规律的工具。地震波信号的一个适当的图象时标表示是小波变换的平方模，它是一种能量表示。标模图（scalogram）提供了地震波信号的能量在时标平面上传播的一种图象形象。由于地层断层岩石的各向异性，地震波通过时波形被扩张或压缩而变形，因此地震波的能量分形具有自仿射相似性。从而可将小波变换作为一个数学显微镜，它非常适宜于研究这种具有分形性质的油气田储层的勘探钻井定位。

§1、多重分形理论的应用

从四川省天燃气、石油有一部分是储集在碳酸盐岩沉积的储层，其储集空间主要是由于构造作用，溶蚀作用产生的缝洞发育带，具有典型的裂缝性特点，可以推测天燃气、石油的储量质量分布是极不规则和极不均匀的。可以认为一个地区天燃气、石油质量分布可能这样分布在一个区域内，其质量集中程度变化很大。如果质量的集中程度具有一个给定的密度，比如说，对于很小的 r 有 $\mu(B_r(x))\approx r^\alpha$ 成立，并且不同的集对应于不同的 α，这就显示了类似于分形的特征。一个具有这类性质的质量分布或测度 μ 称为多重分形测度，μ 的分布的不规则性包含了这个系统的更多的信息，并且可以十分方便地利用多重分形理论来记录和分析。有时多重分形测度也被当成是产生分形谱的一种手段。

设 μ 是一个由 R^n 中的有界域支撑的测度，且总质量经规范化后为 $\mu(R^n)=1$. μ 的支撑自可能为一分形（如一地区的天燃气、石油储集空间的几何形状为一分形），也可能不是分形。

对每个 $0<\delta<1$，设 $\{B_i\}$ 是与 μ 的支撑相交的 δ-坐标网超立方体.数出测度"适当大的"那些 δ-网超立方体的个数，对于 $-\infty<\alpha<\infty$，设

$$N_\delta(\alpha)=\#\{i \mid \mu(B_i)\geqslant\delta^\alpha\} \qquad (1)$$

虽然 $N_\delta(\alpha)$ 是由"计盒"得到的，而且研究当 $\delta\to0$ 时 $\log N_\delta(\alpha)/-\log\delta$ 的极限状况也是很自然的。在所有 δ-网超立方体上定义和：

$$S_\delta(q)=\sum_i\mu(B_i)^q \qquad (-\infty<q<\infty) \qquad (2)$$

因为 $S_\delta(0)=N_\delta$（支撑 μ），即复盖 μ 的支撑所需的 δ-网超立方体的个数，所以在某种意义下，极限 $\lim\limits_{\delta\to0}\log S_\delta(q)/-\log\delta$ 是盒维数概念的推广。

多重分形的理论依赖于以下的事实：在许多情况下，$\delta\to0$ 时，$N_\delta(\alpha)$ 和 $S_\delta(q)$ 服从幂定律，同时，在幂定律的指数之间有一些基本的关系。假定下面的双重极限存在：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\log(N_\delta(\alpha+\varepsilon)-N_\delta(\alpha-\varepsilon))/-\log\delta=f(\alpha) \qquad (3)$$

定义

$$\tau(q)=\sup_{0<\alpha<\infty}(f(\alpha)-q\alpha) \qquad (4)$$

则

$$\tau(q)=\lim_{\delta\to0}\log S_\delta(q)/-\log\delta \qquad (5)$$

(5)式给出了幂定律指数

$$S_\delta(q)\sim\delta^{-\tau(q)} \text{和} N_\delta(\alpha+\varepsilon)-N_\delta(\alpha-\varepsilon)\sim\delta^{-f(\alpha)} \qquad (6)$$

假定 $f(\alpha)\in C'(\alpha)$，$f(\alpha)>0$ 并且是严格凸的。

$$d(t(\alpha)-q\alpha)/d\alpha=0,\qquad (7)$$

$$q=df(\alpha(q))/d\alpha\qquad (8)$$

$$\tau(q)=f(\alpha(q))-q\alpha(q),\qquad (9)$$

$$d\tau(q)/dq=-\alpha(q)\qquad (10)$$

这条曲线$f(\alpha)$有时被称为测度μ的多重分形的谱。

$$\alpha(1)=-d\tau(1)/dq=\lim_{\delta\to 0}\sum\mu(B)\log\mu(B_i)/\log\delta\qquad (11)$$

表达式$-\sum\mu(B)/\log\mu(B)$中的和号是对所有边长为δ的网超立方体遍取的，该表达式称为由δ-网超立方体定义的测度μ的部分熵。它表示由μ来测量的在点x的局部平均信息量，此信息是由x属于哪一个B的情况给出，称$\alpha(1)$，这个熵与$\log\delta$的比值，为μ的信息维数.

数值$\alpha(1)=f(\alpha(1))$有进一步的重要解释——它反映了测度μ浓缩集的大小.这意味着测度μ凝聚在使$\mu(B)$很接近$\delta^{\alpha(1)}$的δ网超立方体B上.于是"尺度为δ时的μ的浓缩集"可以由$N_\delta(\alpha(1)+h)-N_\delta(\alpha(1)-h)\approx\delta^{-f(\alpha(1))}=\delta^{-\alpha(1)}$个边长为δ的网超立方体复盖。

希望把多重分形的谱扩展到允许$f(\alpha)$取负值(较高维测度的低维截口的测度)。

多重分形的上述大多数特征通过标度指数α及其密度$f(\alpha)$的连续谱的确定已给出标度性质的一个完整描述.虽然$f(\alpha)$的连续谱与广义分维D_q紧密有关，但不幸它对某些具有奇点的空间定位则显得无能为力，在信号分析中也会面临一种类似的情况。从时间序列记录中抽出来的功率谱也存在一个类似的缺陷，功率谱识别基频并且量化它们的相对贡献，但无法告之它们的瞬间位置，这就迫使我们应用下节将介绍的小波变换来克服这一本质性的困难。

§2 小波变换与分形理论的结合

在地震资料和声学信号的最新分析里，Fourier变换业已被高分辨率地震波的小波变换所代替。这种变换能将信号作为一个既是时间又是频率的函数来表示。本文的目的是引入小波变换作为研究分形客体在不同的长度标度的自相似性的一种合乎自然规律的工具。小波变换由哪些展布在诸基小波上的函数所构成，而基小波则由一个函数g经过扩展和平移而构成.让我们考虑由一实函数f表示的分形。设g为一正则的复值函数，它在零的周围被局域化而它的某些矩为零[g应该至少是均值为零$\int g(x)dx=0$]，则f关于小波g的小波变换定义为

$$T(a,b)=\int g[(x-b)/a]f(x)dx/a,\quad a>0,\quad b\in R\qquad (12)$$

这个变换可以视为一个位于b而大小为1/a的数学显微镜，而其光学性质由特殊选择的小波g给出，没有丢失关于f的任何信息。因为这种变换对于一大类函数f是可逆的。对于一个分形测度$dm(x)$，我们定义其变换为

$$T(a,b)=\int g[(x-b)/a]dm(x)/a^{\alpha},a>0,\ b\in R\qquad (13)$$

其中规范化因子$1/a^{\alpha}$可以选择为最佳揭示所论分形测度的标度结构.分形的一个典型性质是它们在小长度标度下的渐近自相似性。这样，在一个任意点x_0附近，在不同标度下进行观察，我们总是发现同一函数，倘若不计较一个标度因子。定义$f_{x_0}(x)=f(x_0+x)-f(x_0)$，于是有

$$f_{x_0}(\lambda x)\sim\lambda^{\alpha(x_0)}f_{x_0}(x)\qquad (14)$$

对于一个在无穷远处衰减充分快的小波，f的标度性态是由标度象

$$T(\lambda a,x_0+\lambda b)=\lambda^{\alpha(x_0)}T(a,x_0+b)\qquad (15)$$

那样的小波变换所反映，即如f一样具有同一的指数$\alpha(x_0)$.因此f的每一个局部奇点在小波变换中产生一个指向半平面的边界上的点($a=0,b=x_0$)的类锥结构。一个漂亮的一般理论结果是该函数的一个高度正则性，当取极限$a\to 0^+$时$T(a,b)$中系数迅速衰减在小波变换里得到反

映一次直接积分表明 dn(x)的局部标度指数 a(x)依次变为小波变换里的一个指数a(x)=a(x)-n,其中n为方程(13)中的规范化指数。

通常关系式(14)并不是对于所有的λ∈R都成立，而仅是对一个无穷序列$\lambda_n \sim \beta^{-n}, m\in Z$成立。因此指数a是复数分形显示振荡标度性态。在小波变换里有围绕一条当 ln T(a，x)是按lna为横坐标作图而具有斜率为a的直线作周期为lnβ的振荡存在。

地震波信号的一个适当的图像时标表示是小波变换的平方模，它是一种能量表示。标模图(scalogram，提供了地震波信号能量在时标平面上传播的一种图象形象。

一个古典的线性时间频率表示称为短时Fourier变换(STFT)或窗口Fourier变换.自从Gabor引入它以来已大量地用于非稳定信号分析，这个概念是将Fourier变换用于时变信号x(τ)，当x(τ)是从一个中心在时间位置t的有限宽度的窗口h(τ)看它时，

$$F_x(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h^*(\tau-t)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \qquad (16)$$

这个直观的定义有一些有趣的结论。例如，只要窗口具有限的能量， 短时Fourier变换与原始信号之间就存在一个一一对应关系，并且保持有一个精确的逆变换公式成立。

近几年来,另一种表示，称为小波变换，其基本概念是将出现在短时Fourier变换中的频率移位运算用时间(或频率)标度运算来代替

$$T_x(t,a)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h^*((\tau-t)/a)d\tau/|a|^{1/2} \qquad (17)$$

其中函数h(t)（称为基小波)在时间上是被局域化的。这个定义依赖于扩张／压缩（或标度)参数a,局部频率和时间标度在扩张或压缩下，即在对射型仿射变换下，是协变量。由于地层断层岩石的各向异性，地震波通过时波形被扩张或压缩而变形。因此地震波的能量分形具有自仿射相似性。从而可将小波变换作为一个数学显微镜，它非常适宜于研究这种具有分形性质的油气田储层的勘探钻井定位。这在数学上是一个反问题。

参　考　文　献

1 O.Rioul and P. Flandrin,Time-Scale Energy Distributions：A General Class Extending Wavelet Transforms.IEEE Trans. on Signal Processing. Vol.40.No.7.July.1992.pp.1746-1757.

2 K.法尔科内著．曾文曲，刘世耀等译。分形几何——数学基础及其应用，东北工学院出版社，1991.

3 A.Arneodo and G.Grasseau.Wavelet Transform of Multifractals.Physical Review Letters.Vol.61,No.20,14 Nov.1988.pp.2281-2284.

4 I.Daubechies.The Wavelet Transform,Time-Frequency Localization and Signal Analysis,IEEE Trans.on Information Theory.Vol.36,No.5,Sep.1990,pp.961-1005.

5 S.G.Mallat.A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation.IEEE Trans.on Pattern Analysis and Machine Intelligence.Vol.11,NO.7.July.1989.pp.674-693.

6 S.G.Mallat.Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models.IEEE Trans.on Accoustics,Speech,and Signal Processing.VOl.37.NO.12.Dec,1989.pp.2091-2110.

7 高安秀树著，沈步明，常子文译．分数维，地震出版社．1989.

8 李后强、程光钺编，分形与分维——探索复杂性的新方法——。四川教育出版社，1990.

9 林鸿溢．李映雪编著，分形论——奇异性探索，北京理工大学出版社，1992.

土壤水分渗透的相变模型

孙爱萍

（四川大学物理系　成都　610064）

摘　　要

土壤水分渗透是水分沿着土壤孔隙的一种流动过程，其孔隙排列具有随机性，属于多孔介质流体问题，可用渗流理论研究。降雨时，渗透速度开始很大，逐渐减小，直到稳定渗透。此时，地面径流量很快增加，可将此时看作渗流的相变点。本文研究了土壤水分渗透达到稳定时的一些特征，得出可调节影响渗透的几个因素，以尽量减少地面径流，防止土壤流失。并在 286 机子上，用 Basic 语言模拟了，土壤孔隙排列形状为正方形的水分渗透过程。

关　键　词

渗流模型、相变点、临界概率

一、土壤水分渗透特征

当降雨到达地面以后，其分配可以简化为下列水量平衡方程。

$X=Y+Z$

X——降雨量，Y——地面径流量，Z——降雨渗透量[1]

雨水在渗透过程中，土层内干土与湿土之间有一明显移动的界面叫湿润锋面，在降雨初期阶段，Z 值很大，当渗透达到某一深度，渗透强度开始小于降雨强度，地表开始积水，并产生径流。随着渗透强度的降低，产流量逐渐加大，当湿润锋面到达某一深度时，渗透强度出现稳定的趋势，产流量很快增加[2]。

从渗透水流的动力平衡看，其将受到重力、毛细管张力，土壤水分的摩擦阻力作用，渗透初期，毛细管张力起主导作用，随着渗透的进行，其值越来越小；当锋面到达地下水毛细管活动层上限，水分完全在重力的作用下向下渗透，此时全剖面的土壤含水率接近于饱和，水分完全在重力作用下向下渗透，渗透达到稳定[1]。

从入渗机理看，土壤水分渗透必须具备两个条件，一是要有水源、二是要有土壤孔隙，其渗透是水分沿着土壤孔隙的流动过程，而土壤孔隙的排列具有随机性，因此，可看作流体沿多孔介质的流动问题，可用渗流理论来研究。

二、土壤水分渗透模型

渗流理论是处理强无序和随机的几何结构的系统的理论方法。它是数学家 J. M. Hammersley 于 1957 年提出的统计几何模型，当时他考虑的是流体在一个由许多通导组成的网络中流动，而某些通道（无规地）被堵塞了[3]。现在已应用到许多学科，特别是物理科学上临界与相变方面的研究，最近李后强等将其应用于泥石流的发育研究[3]。渗流与通常的随机过程不同之处在于流体本身不具有随机性，而介质具有随机性。

最简单的渗流有点渗流和键渗流，此外还有点键混合渗流，现已将其推广到多色渗流、扩程渗流、高密度渗流[4]。点渗流考虑的是点是否联结的（占据的），键渗流考虑的是键是否联结的，相邻的联键（点）是彼此相联的。一组相联的键（点）称为一个集团。若两条键可以通过至少一条由联键连成的路径联结起来，则称这两条联键属于同一个集团。令网络的联键概率为 P，

则随着 P 的增加，会突然出现一个阈值 Pc，系统的长程联结性突然出现，即出现一个扩张到整个网络的集团。这个集团称为跨越集团。Pc 叫做临界概率，在临界点附近，系统具有一些重要的分形性质。Pc 随空间维数和结构的不同而不同，表 1 列出了一些点阵的 Pc 值[④]。

表 1　不同点阵上的键渗流与点渗流临界概率：P_c^b 与 P_c^s

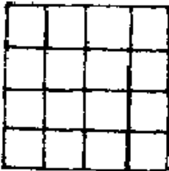
维数 d	点阵或结构	P_c^b	P_c^s	配位数 z	填充因子	ZP_c^b	$VP_c^s=\varphi_c$
1	链	1	1	2	1	2	1
2	角形	0.3176	0.5000	6	0.9069	2.08	0.45
2	正方形	0.5000	0.593	4	0.7854	2.00	0.47
2	Kagone	0.45	0.6527	4	0.6802	1.80	0.44
2	蜂房形	0.6527	0.698	3	0.6040	1.96 2.0±0.2	0.42 0.45±0.03

在土壤水分渗透中，配位数 Z 与土壤物理性质有关，主要是土壤质地和团聚程度及其稳定性，土壤有无裂缝，土表有无坚实的结壳等，土壤越疏松，孔隙越大，特别是大孔隙越多，越容易渗透到土壤深层，但大孔隙不利于水分保持。

影响土壤水分渗透的因素有时间、土壤物理性质、土壤起始含水量、降雨强度、植被状况[③]。土壤渗透速率随时间按指数规律减小，这是由于渗透过程中土壤基质吸力梯度逐渐减小，最后趋近于 0。土壤起始含水量愈小，渗透最初速度愈快。植被能截留雨水，使渗流量增大。假设土壤孔隙总数为 N 个，在某一时刻，充满水的孔隙数为 N_1，则称 $P=N_1/N$ 为此时水的浸渗率。可以看出 P 为时间、土壤物理性质、土壤起始含水量、降雨强度、植被状况的非线性函数。在渗透初期，渗透速度很大，P 增加很快，时间越长，充满水的孔隙越多，P 值越大。在其它条件相同条件下，由于植被覆盖度越高，植被的雨水截留量越大，从而减少了流向土壤表面的水流，并且难于形成击实层或击实层不明显，因此植被覆盖度越大，P 值越大。在渗透后期，由于土壤水分接近饱和，P 值主要受时间和降雨强度的影响。

三、土壤水分的渗流模拟

假设土壤孔隙呈正方形排列，如图(1)所示，每一个键代表一个土壤孔隙，由于孔隙大小排列随机，在下渗过程中，大孔隙水渗透快，因此渗透是随机的，不均匀的。随机地赋给每一个键一个 0～1 之间的值 A，给定一个概率值 P，当 A<P 时，则此键所代表的孔隙此时充满水，即是连通的。相互连通的一组孔隙称为一个渗水集团，每个渗水集团所含孔隙的数目称为此集团的含水量 S



图(1)

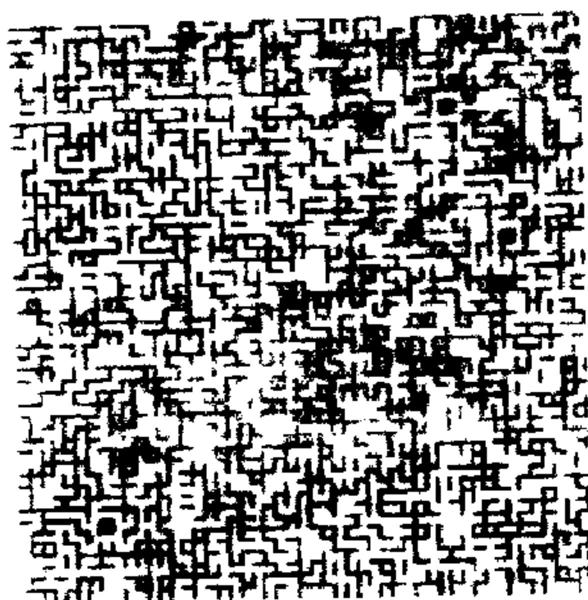
$Sav=\sum_{s=1}^{\infty}s^2n(s)/\sum_{s=1}^{\infty}sn(s)$，　n(s)定义为含水量为 s 的渗水集团除以总的孔隙数目，L 为渗水集团的特征长度，取为一个集团两键之间的最大距离，则接近 $P=P_c$ 时，具有关系式[④]

$$Sav(P)\sim(Pc-P)^{-\gamma}$$

$$Lav(p)\sim(Pc-P)^{-\nu}$$

$$L(s)\sim s^{1/D}$$　(D 为分维)

本文在 286 微机上，用 Basic 语言模拟了水分渗透的过程，如图 2 所示，记录了 P－Pc＝0.50 时的 S 和 L 值(表 2)



图(2)　50×50 个格点的模拟　P—0.5

表 2(P—0.50)

S	1930	106	69	49	36	
L	67.897	15.182	13.892	9.014	8.201	

根据关系式 $L(s) \sim s^{1/D}$，以 S 为横坐标，L(S)为纵坐标作 LgL(s)～Lgs 图，如图(3)，求得分维 D=1.876。可见，当土壤水分渗透达到稳定时，具有分形特征，分维 D=1.876

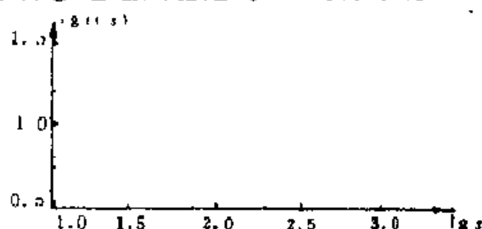


图 3　lgl(s)～lgs

参考文献

①任鸿遵、杨克定，禹城试验区降雨入渗补给地下水的试验研究，地理集刊第 15 号，P52－59。

②周国逸、潘淮俦，林地土壤的降雨入渗规律，水土保持学报，第 4 卷第 2 期，1990 年 4－6 月，P 79－83。

③李后强等，段家河流域泥石流发育的渗流(Percolation)模型，中国地灾害防治学报 1993NO2(待刊)。

④P·泽仑著，黄畇等译，“逾渗模型”，非晶态固体物理学，P153～231，北京大学出版社，1988 年。

⑤姚贤良、程云生等，“田间土壤水分循环”，土壤物理学，P326～345，农业出版社，1986 年 12 月。

指导老师：艾南山、李后强

泥沙淤积物颗粒排列结构的分形模式研究

杨铁笙 张正红
(清华大学水电工程系)

以河道、水库泥沙淤积物孔隙率问题为背景，本文研究了以最大泥沙颗粒为核心，多园相切形成的“颗粒紧密排列模式”即CAPP（Close Arrangement Pattern of Particles）的准自相似结构。

（一）问题的提出

干容重γ'_s是淤积物单位体积包容的泥沙重量，它反映了淤积物的密实程度，在水库、河道冲淤研究和计算中是很重要的物理量。影响γ'_s大小的有泥沙颗粒组成，淤积历时、淤积埋深等因素。

孔隙率是泥沙淤积物本体以外的空隙容积V' 与淤积物总体积V之比：

$$\lambda = V'/V \quad 或 \quad \lambda = 1 - \gamma'_s/\gamma_s \qquad (1)$$

γ_s为泥沙容重。由（1）知，孔隙率λ也反映了淤积物密实程度，其大小归根结底取决于颗粒的排列方式，泥沙颗粒形状不规则，其相对排列方式有很大随机性。按照惯例，将泥沙颗粒简化为园形，研究以最大颗粒为核心，周围紧密排列半径相同的次大颗粒形成的“颗粒紧密排列模式”即CAPP（Close Arrangement Pattern of Paticles）的特殊情况下，淤积物孔隙率与颗粒排列方式的关系。

（二）CAPP图的生成

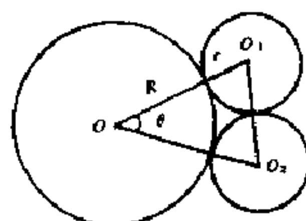


图1 紧密排列模式示意图

假设以半径为R的最大泥沙颗粒O为中心，周围紧密排列着N颗半径均为r的较小泥沙，如图1所示，则有

$$r = R\frac{\sin(\pi/N)}{1-\sin(\pi/N)} \qquad (2)$$

由式（2）知，r／R随周边颗粒数目N的增大而减小，当N＝7时，得到符合假设条件（即R）r）的r_{max}，此时$r_0 = r_{max} = 0.7664R$。核心颗粒与周边颗粒之间形成完全相同的7个曲边三角形，现只取其中一个研究其内部结构。

称园O，园O_1，园O_2为零级园；它们之间的曲边三角形称为零级孔隙。零级孔隙内还可填入一个与三个零级园相切的更小颗粒，称为1级园，它的半径r_1可由下式确定：

$$[r_0Rr_1(r_0+R+r_1)]^{0.5}+[r_0Rr_1(r_0+R+r_1)]^{0.5}$$
$$+[r_0r_0r_1(r_0+r_0+r_1)]^{0.5}=[r_0r_0R(r_0+r_0+R)]^{0.5} \qquad (3)$$

同时，1级园与零级园之间又分别产生了三个较小的曲边三角形，称为1级孔隙，它们与零级孔隙的面积比称为1级孔隙率λ_1，重复上述填充过程，就生成了由不同级别的园和曲边三角形交错排列的CAPP图案。如图2－a所示。

（三）CAPP图案的准自相似结构与Hausdorff维数估计

根据上述生成CAPP图形的几何规则，作者编制了CAPP软件，以计算各级园的半径、中心位置和各级孔隙率，并绘制CAPP图案。



图2－a　1级园的CAPP图
核心园编号：1



图2－b　3级园的CAPP图
核心园编号：1LM

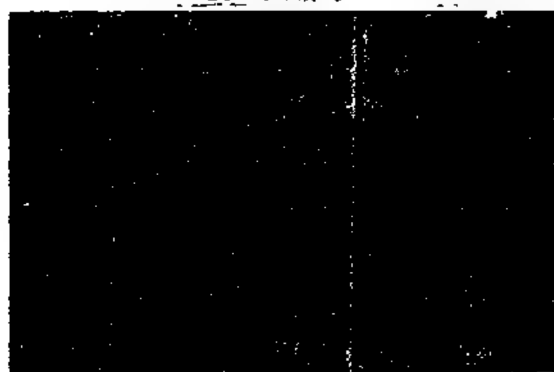


图2－c　4级园的CAPP图
核心园编号：1MRL

图2－a画出了1～7级共1093个园的全景图（k＝7）．图2－b是第3级园（编号1LM）的CAPP图；图2－c是第4级园（编号1MRL）的CAPP图。以1级、3级、4级园为核心得到的三幅CAPP图呈现出十分相似的颗粒排列格局：高级园的周围都排列三个次级园和三个曲边三角形，同级曲边三角形间、同级园间互相隔绝，不同级园交错相切．这些园由确定的填充规则产生，其半径、数目、位置也是确定的，但填充时半径缩小的比率不是定常值．这一系列特点都使得CAPP图比纯随机过程形成的统计自相似分形更有规则，却又比简单几何分形显得复杂，故称为准自相似．

对于简单分形图，其Hausdorff维数D_H值可以用下式计算

$$D_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{4}$$

其中，ε是覆盖D_H维几何对象的高维球半径，而$N(\varepsilon)$是所需球数最小值[1]．前已述及，CAPP图有准自相似性，填充园半径r相当于ε，它是一个随中心位置而变化的量，不易确定．为此作者提出了一种估计CAPP图Hausdorff维数的方法，即孔隙率衰减过程类比法．其基本前提是：按照两种不同规则分割的两个分形集，若孔隙率λ（即剩余部分占原始整体之比）的衰减过程相近，它们的D_H也相近．以图3所示的a－e五种

Serpinski "海绵" 为例，我们可以得到孔隙率λ及D_H为：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{图3-a}: \lambda_a=(3/4)^k, & D_H=\ln 3/\ln 2=1.5800\\ \text{图3-b}: \lambda_b=(8/9)^k, & D_H=\ln 8/\ln 3=1.8930\\ \text{图3-c}: \lambda_c=(24/25)^k, & D_H=\ln 24/\ln 5=1.9746\\ \text{图3-d}: \lambda_d=(48/49)^k, & D_H=\ln 48/\ln 7=1.9894\\ \text{图3-e}: \lambda_e=(80/81)^k, & D_H=\ln 80/\ln 9=1.9943\end{array}\right\} \quad (5)$$

其中k是填充次数。图4以 Hausdorff 维数为参数，绘出了图3中a－e五种分形集的孔隙率衰减过程，可以看出：孔隙率衰减过程接近的曲线c，d，e，其D_H值也很接近．如果能找到两个维数D_H已知的分形集，它们的孔隙率衰减过程曲线恰能把CAPP孔隙率衰减过程曲线夹在中间，就可用它们的分维值D_H作为估计CAPP分形维数D_H的上下限．

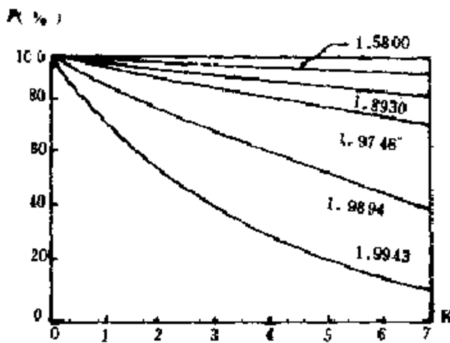


图4 Serpinski "海绵"

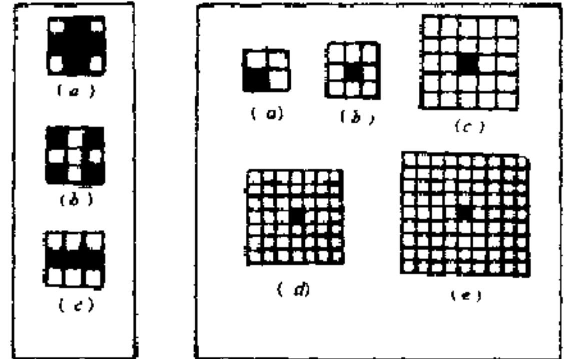


图5 CAPP的类比"海绵"　　图3 Serpinski "海绵"

图5a－c三个分形集与CAPP图的孔隙率变化过程对比如下表：

图形	分形尺度	孔隙率λ通式	λ变化过程(%) k=1	2	3	4	5	6	7	分形维D_H
图6-a	$(1/3)^k$	$(4/9)^k$	44.0	19.8	8.8	3.9	1.7	0.8	0.3	1.2619
图6-b	$(1/3)^k$	$(5/9)^k$	55.6	30.9	17.1	9.5	5.3	2.9	1.6	1.4649
图6-c	$(1/3)^k$	$(6/9)^k$	66.7	44.4	29.6	19.8	13.2	8.8	5.9	1.6309
CAPP			53.4	30.4	18.0	11.1	7.0	4.6	3.1	

由表可以看出CAPP图的λ变化曲线夹在图5－a与图5－c中间，故D_H估计区间为

$$1.2619<D_H<1.6309 \quad (6)$$

可用图5－b的D_H作为估计值：$D_H\approx1.4649$

(四) CAPP的粒径级配特点

紧密排列的泥沙颗粒级配曲线如图6所示。图中R表示颗粒半径，P%是按颗粒截面积，即粒径平方计算的"重量"百分数。其中直方图是概率密度。它的特点是概率密度直方图不连续，形成几组峰谷相隔甚远的数值．这是使淤积物最为密实，孔隙率λ最小的"最佳"

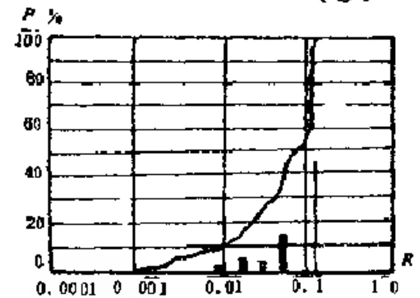


图6 重量百分比曲线

级配曲线。它表明，如果泥沙颗粒级配不满足CAPP给出的级配曲线，则不能达到紧密排列，其孔隙率就相应的比较大。

实测资料[2]表明，天然淤积物的孔隙率为46.8%~18.1%，上述关于CAPP级配曲线的研究，可从理论上解释天然沙淤积物孔隙率较大的原因，即：天然沙淤积物颗粒组成不符合紧密排列模式给出的"最佳"级配曲线，特别是与几组峰谷值粒径的含量百分数不吻合。

（五）结论

紧密排列模式中的泥沙颗粒构成一幅具有多层次嵌套的自相似图案。它区别于只在统计意义上有自相似结构的、由随机性因素形成的分形集，又有别于Serpinski"海绵"之类的严格"确定性"分形体。总之，由完全的确定性的几何规则产生，有自相似却又不那麽"正规"，这就是CAPP分形的最大特点，即准自相似性。

在CAPP分形变化（即孔隙率衰减过程）的数值模拟基础上，作者提出了CAPP分形集Hausdorff维数D_H的估计方法即孔隙率衰减过程类比法，得到了CAPP的D_H在1.2619与1.6309间，其较好的估计为D_H=1.4649。

本文还研究了紧密排列的模式中颗粒级配的特点即粒径概率密度直方图的峰谷相间现象，并以此对天然沙的孔隙率变化范围作了初步的理论解释。

参考文献：

(1) Sagdeev, R.Z et.al(1988)
"Nonlinear Physics from the Pendulum to Turbulence and Chaos",
P.297-298
(2) 中国水利学会泥沙专业委员会(1992)
"泥沙手册"，P 386-389

随机水系的计算机模型及其分维

孙博文(哈尔滨机电专科学校)
洪时中(成都市地震局)

[摘要]我们依据水系的随机模式,在计算机上设计了一个新的水系随机模型,并通过此模型求出水系结构参数之间的关系,此关系与自然水系完全相同,而且计算了不同坡度下的水系的分维 D_0、并发现 D_0 有很大的普适性。

关键词:分枝比、平均长度比、分维

"呈树状结构的水系网络中,在其形成过程中,严格地遵守着一规则,即水系形成的背后,纯粹是一种随机条件的结果。在网络中的分支,不论所在地域是什么样的自然环境,只要它服从水流总是朝着主斜坡的下方运动,那么这种随机条件就在起作用,其结果也就必然是:水系网络的内部等级系列,完全独立于水系流域所具有的各种不同的自然条件。"[1]

水系网络的随机模拟,是流域地貌学的一个经典的模拟方法,其模拟的结果与天然水系网络的特征极为相似,能够有效地对自然水系进行分析。为此,我们在计算机上设计了一个水系网络的随机模型(DHF 模型),并得出了一些新的结论。

模型的原理是:在一平面上设一个 M×N 点阵,点阵上每一点以随机的方式分别设置向左(〈)向右(〉)、向下(∨)三种可能的水运动方向。由于真实水流中不存在〉〈的对流情况,所以在设置水流的可能的方向时,要必免这种情况。然后依据连通性原则,从水系的出口向水系的入口反向寻找水系的源头,从而建立了一个完整的水系流程图(图 1)。图中左边、右边上边为分水线,下边为出口, 当我们在下边选择一个特定的出口时,计算机就会自动画出所需的水系分布图来(如图 1 中重色部分),同时算出水道级数(采用 Strachler 原则),每级水道数目,每级平均长度等参数,并可以求出不同级数下的水道数目的对数值,以及不同级数下的水道平均长度的对数值与水道级别的关系(图 2),显然此关系显线性,这与自然水系的分布结构关系相同。

由 Horton 第一定律(水道数定律):

$$N_u = r_b^{(s-u)} \tag{1}$$

式中,u 为水道级别,N_u 为第 u 级水道的数目,s 为最高水道级别,r_b 为分枝比,可得:

$$\mathrm{Log}\ N_u = (s-u)\mathrm{Log}\ r_b \tag{1'}$$

从而用最小二乘法可以求得 $\mathrm{Log}\ r_b$,以及分枝比 r_b。

根据 Horton 第二定律

$$\bar{L}_u = \bar{L}_1 r_l^{(u-1)} \tag{2}$$

式中,$\bar{L}_1$为第一级水道的平均长度,$\bar{L}_u$为第 u 级水道累积平均长度,r_l为水累积平均长度比,可得

$$\mathrm{Log}L_u = (u-1)\mathrm{Log}\ r_l + \mathrm{Log}\ \bar{L}_1 \tag{2'}$$

用最小二乘法可求得 $\mathrm{Log}\ r_l$ 以及平均长度比 r_l 并可根据式

$$\hat{D}_0 \approx \frac{\text{Log } r_b}{\text{Log } r_l} \tag{3}$$

求出水系容量维数估值 $\hat{D}_0$。[2]

当我们调节向下的水流(V)的分布概率时(同时"(" 、")"的概率也将改变),我们可以理解为水系在不同坡度上形成。现设水流方向向左的概率为 P_1、向右的概率为 P_2,向下的概率为 P_3,并 $P_1+P_2+P_3=1$,则我们可以根据下式

$$P_1=P_2=kk_3 \tag{4}$$

k 为比例系数,调节 k 值,从而改变水系的坡度,当 k 不同时(我们选择了 5 个 k 值,即 F=1—5),分别算出 $\hat{D}_0$(每一 k 值下选用 10 个水系的 $\hat{D}_0$ 且 s 相同,求其平均值)(表 1)。然后看 k 与 $\hat{D}_0$ 间的关系,发现 $\hat{D}_0$ 与 k 没有明显的对应关系,说明水系的分维 D_0 与水系的其他结构参数一样,有很大的普适性,至少 D_0 与水系的坡度无关。

参 考 文 献

[1]牛文元,《现代应用地理》,科学出版社 1987

[2]洪时中等,地学领域中的分维研究:水系、地震及其它,大自然探索 1988、2

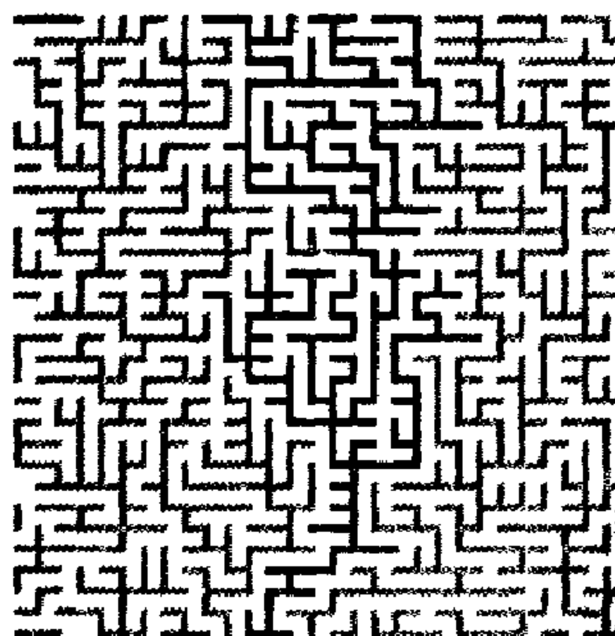


图 1

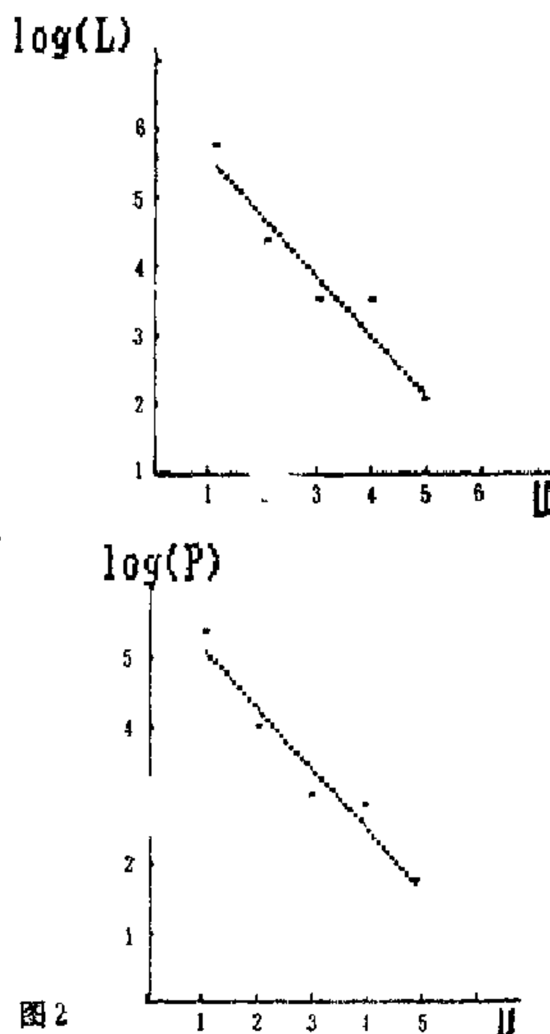


图 2

$F=1$ $m=40$ $n=70$ $s=5$

$p_1=12.64286\ \%$ $p_2=12.95238\ \%$ $p_3=74.40476\ \%$

$\mathrm{Log}\ r_b=0.4937076$ $r_b=1.638383$ $r=0.8817988$ $s_b=0.2640581$

$\mathrm{Log}\ r_l=0.3256615$ $r_l=1.384947$ $r=0.9863569$ $s_b=0.0543522$

$D=1.516021$

$F=2$ $m=40$ $n=70$ $s=5$

$p_1=14.26786\ \%$ $p_2=15.21429\ \%$ $p_3=70.51785\ \%$

$\mathrm{Log}\ r_b=0.6359791$ $r_b=1.888871$ $r=0.9870068$ $s_b=0.1035335$

$\mathrm{Log}\ r_l=0.3085640$ $r_l=1.361469$ $r=0.9849082$ $s_b=5.422392e-02$

$D_0=2.061093$

$F=3$ $m=40$ $n=70$ $s=5$

$p_1=16.89286\ \%$ $p_2=17.87857\ \%$ $p_3=65.22857\ \%$

$\mathrm{Log}\ r_b=0.6120666$ $r_b=1.844239$ $r=0.9530430$ $s_b=0.1989021$

$\mathrm{Log}\ r_l=0.3279682$ $r_l=1.388145$ $r=0.9923431$ $s_b=4.082057e-02$

$D_0=1.866238$

$F=4$ $m=40$ $n=70$ $s=5$

$p_1=23.05357\ \%$ $p_2=23.94196\ \%$ $p_3=53.00447\ \%$

$\mathrm{Log}\ r_b=0.6351284$ $r_b=1.887264$ $r=0.9161928$ $s_b=0.2778017$

$\mathrm{Log}\ r_l=0.3382691$ $r_l=1.402518$ $r=0.9830530$ $s_b=6.308101e-02$

$D_0=1.877584$

$F=5$ $m=40$ $n=70$ $s=5$

$p_1=25.86072\ \%$ $p_2=26.78214\ \%$ $p_3=47.35715\ \%$

$\mathrm{Log}\ r_b=0.6095826$ $r_b=1.839663$ $r=0.9421911$ $s_b=0.2167889$

$\mathrm{Log}\ r_l=0.2813198$ $r_l=1.324877$ $r=0.9823464$ $s_b=5.357252e-02$

$D_0=2.166867$

表 1 F－－序号，r_b－－分枝比，r_l －平均长度比，r－－方差，s_b－ 均方根

甘肃中部及邻区水系分维值与滑坡灾害[1]

邹谨敞　邵顺妹

（国家地震局兰州地震研究所）

一、引　　言

水系是由地表水的侵蚀、搬运和堆积作用形成的地貌景观，也是所在地区内外地质营力作用的产物。水系的形成和发育与气候、地层岩性，地质构造等诸因素有关。进行水系分形几何学的研究可以定量地比较、分析水系的形态特征及其在不同区域的差异。滑坡是土体或岩体沿着一定的滑移面作整体滑动的地质地貌现象。滑坡的产生也受到气候、地形地貌、地质构造的制约。甘肃中部及其邻近地区，大部分为黄土覆盖，为我国黄土高原的一部分。在这一地区，黄土滑坡灾害时有发生，如1920年海原8.5级大震和1927年古浪8级大震都产生了大量的地震滑坡，综观本区的滑坡分布，具有分区性和成群性的特点，并主要为黄土滑坡，因此研究滑坡的分布规律，进而判定甘肃中部及其邻区滑坡的危险度和进行滑坡灾害，包括地震引起的滑坡灾害的预测是非常必要的。本文据水系的分形几何学研究结果，对本区水系分维值与滑坡灾害的关系进行了尝试性的探索，这对于减轻地质灾害给人民生命财产造成的损失有一定的实际意义。

二、求水系分维值的原理和方法

自然界存在许多不规则的形态和现象，如弯弯曲曲的海岸线，遍及地表的河流和山脊等，它们具有令人感叹的尺度不变性和自相似性特点，通常人们把这种不规则但具有尺度不变性和自相似性形变称为分形[1]，分形的特点是由分数维来描述的。

水系遍布地表，河流的弯曲和分枝状态，不论从支流还是全体看都没有太大的变化，即它们具有自相似性及尺度不变性，是典型的分形，研究区各流域水系均具此特点，故可用分形理论对其展布形态加以研究。分形的方法是对于某一流域的河流用间隔为r的格子把平面分割成边长为r的正方形网格（即粗视化网格），并且数出包含河流的正方形格子数，记为N(r)当对r进行变化时，标绘在双对数轴上的N(r)与r的数值之间经验关系，用最小二乘法可拟合出一条直线，并用下式表示[2]：

$$\lg N(r) = A - D\lg r$$

式中D实际上就是上式直线斜率的大小，D值愈大，则N(r)增加得越快，分形结果说明较大的值可以直接与较复杂的水系相联系。

---

①地震科学联合基金资助项目

三、资料的选取与处理

研究时使用的资料取自 1:50 万地形图上蓝线所标绘的水系，按水系的分布范围，不同的流域划分为不同的统计区域，但相似的流域归并为同一区域；统计区域的划分还考虑到地质构造特点，即隆起的基岩山地（隆起区）和沉积物覆盖区（盆地）的分界线也是统计区域的界线。据以上两点，将甘肃中部及其邻近地区共划分为 25 个区域（图 1）。

按这种方法选取资料，水系的遗漏少，资料可靠性高，统计水系的粗视化网格尺度时采用的正方形网格边长分别相当于实地的 2.5 公里、5 公里、10 公里、20 公里、40 公里（见图 1 左下角）。由于水系的尺度不变性，所以不同尺度的系列统计，对统计结果无影响。同样，用同一尺度系列统计规模不等的水系时，其结果是可比的。各区域的水系统计结果的处理，如前所述标绘在双对数轴上，用最小二乘法拟合时，25 个区域的直线性都较好，可见所获得的结果是可信的，因此各区域分维值的大小真实地反映了每一区域内水系的形态特征。为研究滑坡分布情况与水系分维值的关系，提供了较好的基础资料。

四、分维值与滑坡灾害的关系

各区域水系分维值分布图（见图 1）显示，甘肃中部及邻区的分维值总体看来具有趋势性变化的特点。从西南向东北，或者从东南向西北，分维值 D 都有递减趋势，显示为南高北低，以中部和北部为最低。从图 2 看，滑坡点的分布也是以本区东南部和西南部为最密，北部和中部最少。

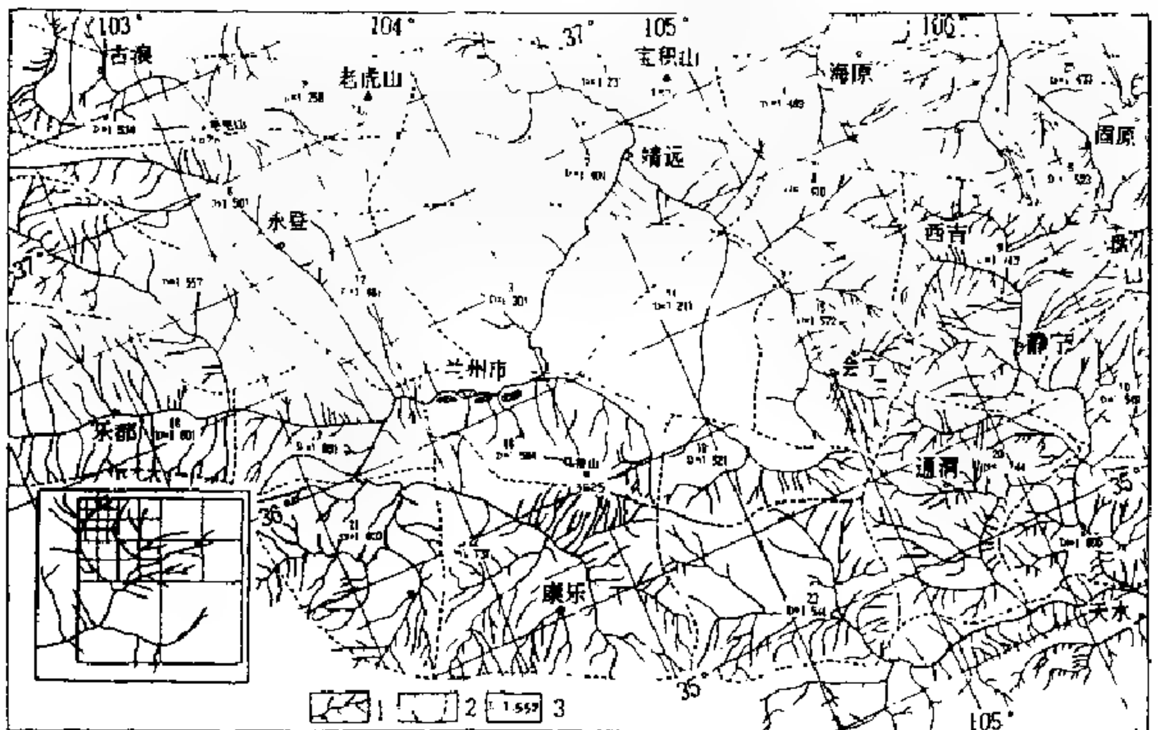


图1 甘肃中部及邻区区域划分及水系分维值分布图 （图中左下角为水系统计的不同网格示意图）

1. 水系； 2. 区域划分及编号， 3. 区域水系分维值

由图1和图2可知，各区域分维值D的大小与滑坡点的分布数量相吻合，大体上滑坡点分布较多的区域D值大于1.5，而D值小于1.5的区域滑坡点很少。

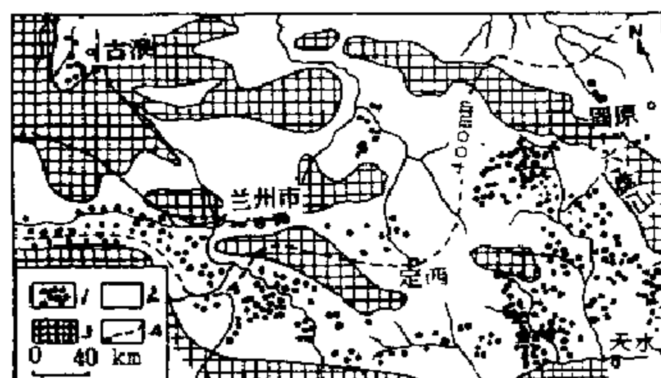


图2 甘肃中部及邻区滑坡分布图

1 滑坡分布点；2. 黄土分布区；3. 基岩山地；4. 降雨量等值线

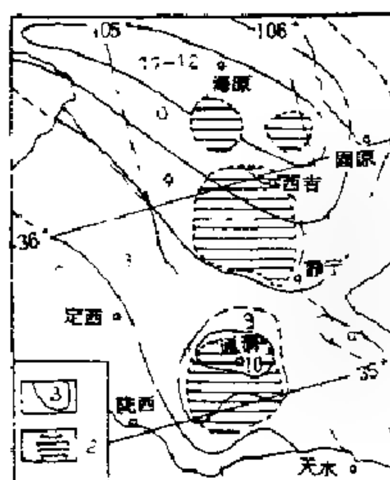


图3 1920年海原8.5级地震滑坡分布图

1 地震烈度及等烈度线；2. 地震滑坡集中区

以往在分析滑坡灾害的分布特点时，总是以某一区域严重，另一区域较轻等进行定性描述，缺少更能说明滑坡灾害分布状况的定量指标，分维值D的引入则提供了这样一个指标，水系分维值D的大小定量地反映了发生滑坡的区域分布数量的多少，因此可以用D值的大小对各区域发生滑坡灾害的状况作进一步的描述，就甘肃中部及其邻区而言，分维值与滑坡灾害的关系，主要有以下几点：

1、分维值D大于1.7的区域，是发生滑坡灾害最严重滑坡点数量最多的地区，如本区西南部属黄河支流的洮河流域，即22区域，水系分维值D=1.737，为甘肃省发生滑坡灾害最严重的区域之一。1983年3月发生的中外有名的洒勒山大滑坡即是其中一例。又如本地区东南部的20区和9区，D值分别是1.744和1.743，滑坡灾害反复发生，且数量多规模大。D值为1.6—1.7的区域，滑坡灾害也较为多见，但密集成群的现象不明显。D值小于1.6的区域，滑坡灾害相对小得多，滑坡主要发生在黄土地区主干河流两侧高阶地陡坎附近及地震的高烈度区。

由此可知D值大小与滑坡分布数量具有正相关性特点。

2、本区大部分地区为黄土覆盖的干旱、半干旱区，据气象资料，年降雨量由南向北递减，南部降雨量为500mm左右，北部为200—400mm，而水系分维值大体上以年降雨量为400mm为分界线，显示了南高北低的特点，其南D值多大于1.6，也是滑坡灾害的主要分布区。由此可见，至少在黄土覆盖区降雨量对水系形态特征和滑坡的分布都有重要的影响（参见图2）。

3、地震滑坡，即地震活动诱发的滑坡，其分布情况，不仅与地震烈度有关，而且与水系分维值的大小也有一定的关系。如1920年海原8.5级大震，震中烈度达12度，地震诱发了大量滑坡，据历史地震资料记载达800余处，其中有许多大型滑坡，并形成几处滑坡灾害集中区[3]（图3）。

由图3可知，滑坡集中区的烈度最低为8度，但滑坡集中区并不与地震烈度等值线一致，即烈度大于8度的地区并非就是地震滑坡集中区。对照图1的D值区域分布，可以发现，烈度相等的区域内，地震滑坡主要发生在D值较大的区段。如距震中区达150公里的烈度为8度的20区域（通渭），由于水系分维值高（D=1.744），而形成地震滑坡集中区，被定为烈度异常

区，即烈度为8度区内的9—10度异常区。换言之，水系分维值高是海原大震烈度异常区形成的主要原因，这也是对海原大震烈度异常的最新的解释。

从以上的分析可见，滑坡灾害、包括地震滑坡，在黄土覆盖的甘肃中部及邻区，均受到水系分维值的制约，其正相关性十分明显。究其原因，主要是水系发育的影响因素和滑坡形成条件基本相似。本区的地层岩性相似，大部分地区为黄土覆盖，气候条件均为干旱、半士旱地区；地形地貌特点则为黄土地貌，地质构造上现今隆升明显的地区。本区以上这些条件大致相同，为水系分形分析与滑坡灾害关系研究的基础。

必须指出，水分维值与滑坡灾害的关系，在不同的地质一气候环境区，不能用相同的水系分维值来评价滑坡灾害的危险性，例如基岩山地和黄土覆盖区则不能用同一水系分维值来评价滑坡灾害的危险性。

五、结　语

1、水系分维值的大小反映了区内水系分布的复杂程度，就甘肃中部及其邻区而言，各区域水系分维值的大小与已发生的滑坡灾害的数量成正相关关系。

2、地震滑坡也受到水系分维值的控制，在相同的烈度区内，分维值高的区域是地震滑坡灾害集中的区域。

3、由于影响水发育的因素和滑坡产生的基本条件有相似的机制，所以用水系分维值的大小可以定量地描述滑坡灾害发生的数量，但是不同的地区，例如岩性、构造条件不同时，不能用相同的水系分维值来评判滑坡灾害发生的数量。因为影响水发育的因素和滑坡产生的条件不同。本区大部分地区为黄土高原，属干旱、半干旱地区有相似的地形地貌，滑坡也主要发生在黄土覆盖区。所以研究结果基本上反映了黄土高原水系分维值与滑坡灾害的关系。

4、利用水系分维值研究滑坡灾害是一种新方法，研究结果表明，这一方法的引入，对判定本区滑坡灾害的危险度及进行滑坡灾害、包括地震滑坡的预测是一种值得采用的方法。

参 考 文 献

(1) Mandelbrot, B. B., 1977, Fractals: Form, Chance, and Dimensions, W. HFreeman, San Francisco.

(2)孔凡臣、丁国瑜，1991，山西及邻区水系与黄土冲沟的分形几何学分析结果及其与构造活动的关系，地震地质，第二期。

(3)国家地震局兰州地震研究所、宁夏回族自治区地震队，1980，一九二〇年海原大地震89—93页，地震出版社。

大气大型涡旋的自组织临界态

曹鸿兴　　　　封国林 卢志恒 景海荣

（中国气象科学研究院 100081）　　（北京师范大学物理系 100088）

本文概述了自组织临界态理论的基本原理和特征，基于自组织临界态，分析了热带气旋发生频数与其最大风速，温带气旋发生频数与其深度之间的关系，其间明显地存在负幂律关系。为自组织临界态在大气科学中的应用提供了观测证据。

一个热带扰动在海洋上形成后，是否会发展成热带气旋，取决于大气—海洋环境的动力、热力学条件，在合适的环境下就能迅速发展成为一个强烈的热带风暴。就小范围而言，在对流发展旺盛时会形成具有破坏力的飑线。这类现象都可称为系统的自组织。又如人类社会一次突然触发事件导致了一场大规模的政治风暴，千百万人被卷进去了。自组织是系统自发形成的有充分组织性的有序结构，它与军队作战在命令指挥下统一进行这类有组织现象是不同的。

一、自组织临界态理论的基本原理

当灾难性事件发生后，人们往往归因于外因的冲击，或是几种环境某些强有力的外因的综合作用。但自组织临界态理论提出了一种新的观点认为，大的相互作用系统会自然而然地朝着一种自组织临界态演进，其结果，小事情冲击会引起连锁反应而可能导致一场大灾难。自组织临界态理论是一个整体理论，即它所描述的整体性不取决于微观机制。因此不能通过分析系统中的各个部分去了解系统的总体特征。根据这一理论，许多复合系统自然地朝着一种临界态演进，在这种临界态下，小事件引起的连锁反应能对系统中的任一组元产生影响，从而使系统不能达到平衡态，而是从一个亚稳态向另一个亚稳态进化。

负幂律分布是自组织临界态理论的证据。自组织临界态理论给出一个相当一般性的解释，1/f噪声是具有各种尺度和各种持续时间的信号的叠加，即当一个处于临界态的系统在产生所有各种尺度和所有各种持续时间的连锁反应时所出现的信号。

在混沌中，微小的初始不确定性随时间按指数增长，而在弱混沌中，微小的初始不确定随时间按幂律增长，系统在混沌的边缘上进化。这种称为弱混沌的行为特性是自组织临界态理论的一个特征。弱混沌与完全混沌的行为特征有显著的区别。完全混沌系统的预报只能存在一个时间尺度，超越这个时间尺度，就不可能进行预测，弱混沌系统不存在这样一个时间尺度，因而可以进行长期预报。这对因大气混沌性而陷入困窘的大气预报来说看到了希望的曙光。

二、热带气旋发生频数与其最大风速之间的关系

数据来源于1975—1985年《台风年鉴》，我们把它们分成三组，即1975—1980年，样本量为205；1981—1985年，样本量为150；1975年—1985年，样本量为355。

分析了热带气旋最大风速Vm与频数N之间的关系。我们统计了1975—1985年热带气旋发生的频数，在Vm为30m/s和35m/s，我们取平均值32.5m/s，频数也取平均值。然后取Vm、N的自然对数进行绘图得到一条直线，用最小二乘法算出一条直线的斜率。a线为1975—1985年的，斜率为-1.104，β为1.104，b线为1975—1980年的，β为1.149，c线为1981—1985年的，β为1.050

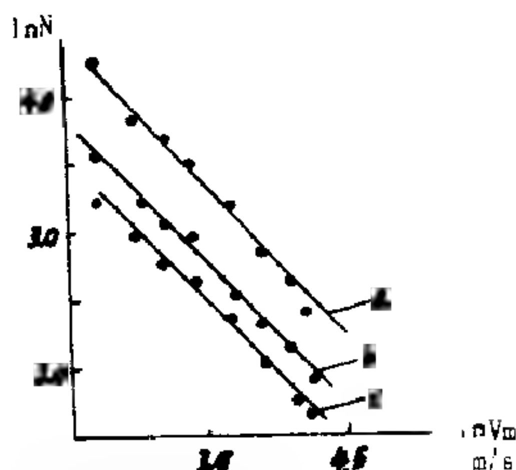


图1 热带气旋数发生频数N(次)与最大风速Vm(m/s)之间的关系

这样，我们得到了热带气旋发生频数N与最大风速Vm之间的关系，

$$N \propto Vm^{-\beta}，\beta 为 1.050 \sim 1.149$$

呈负幂律关系。另外有$E=1/2\ m\ Vm^2$，这里E为与最大风速相当的气旋能量，Vm为最大风速，m为气旋质量，因此，可以推测热带气旋的能量与其发生频数之间也是负幂律，即$N \propto E^{-\alpha}$，α为0.55左右。它反映了热带气旋动力过程中的能量分配。从图1可以看出热带气旋亦具有自组织临界态特征。

二、温带气旋发生频数与其深度之间的关系

我们引用了文献[2]中的表4，对表中的等压圈数1--2，3--5，6--8，9--11，≥12，为了作图方便我们取中间值1.5，4，7，10，12.5，并经过重新组合见表1。

表1　各季度各类气旋出现频数

月份	等	压	线	圈	数	β
	1 5	4 0	7 0	10 0	12 0	
3-5	6 8	306	165	5 7	1 5	1 852
6-8	8 7	131	5 4	8	4	1 750
9-11	7 4	214	9 7	2 3	1 3	1 787
12-2	6 3	130	3 7	1 6	7	1 942
1 12	342	881	353	114	3 9	1 963

然后根据表中数据，取等压线圈n和气旋频数N的自然对数分别为横轴和纵轴作图2-6，然后再用最小二乘法，得到各条直线的斜率，其值分别为：3—5月，β=1.852，6—8月β=1.750，9—11月，β=1.787，12—2月β=1.942，就全年而言，β=1.963。

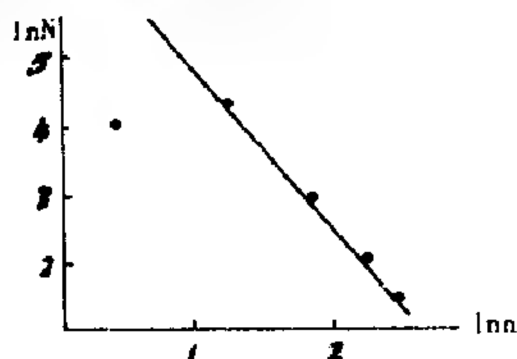


图2　3-5月等压线圈数与频数的关系

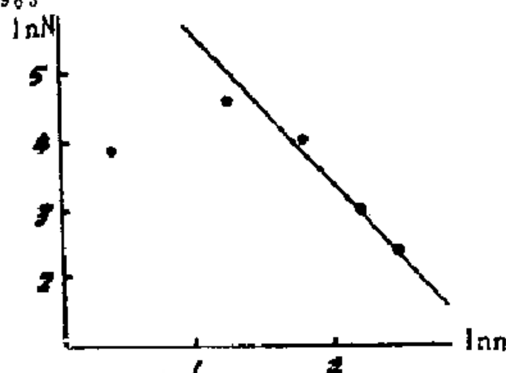


图3　6-8月等压线圈数与频数的关系

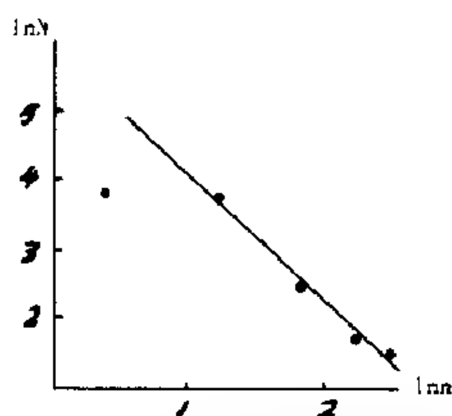


图4　9-11月等压线圈数与频数的关系

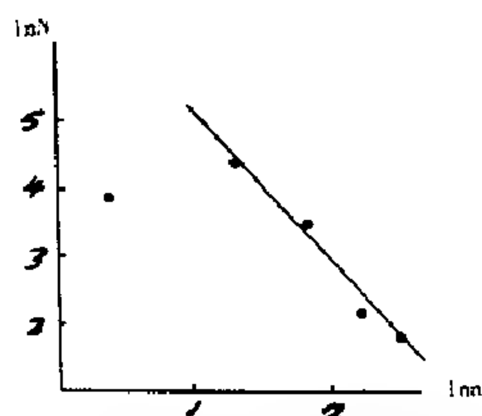


图5　12-2月等压线圈数与频数的关系

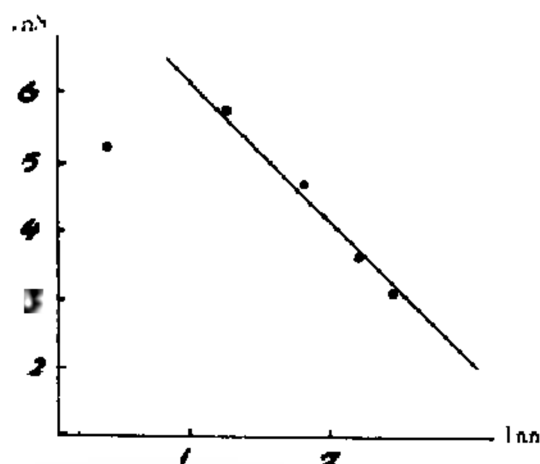


图6　全年等压线圈数与频数的关系

我们若将热带低压绘制了图，就发现该点偏离直线较远，说明热带低压是与温带气旋完全不同的动力系统。这样得到了气旋深度I与频数N之间的关系是负幂律关系

$$N \propto I^{-\beta}，\beta 值介于1.750～1.963$$

我们分析了热带气旋出现频数N与中心最大风速Vm有很好的负幂律关系，即 $N \propto V_m^{-\beta}$，β值接近为1.0；温带气旋出现频数N与气旋深度I之间也呈负幂律 $N \propto I^{-\beta}$，β值约为1.8。所以无论热带气旋无论温带气旋都可作为一个自组织临界系统。自组织临界系统是弱混沌系统，从理论上讲，对它们进行长期预报是有可能的。

参考文献

[1]　Per Bak, Kan Chen, 自组织临界态, 科学, 1991年第5期, 8 6

[2]　林明智等, 我国东方气旋的大气候分析, 气象, 第18卷第5期, 1991, 20-25

自仿射分形应用于地震前兆资料处理①

陈棋福　　马　丽　　陈建民　　李志雄

(国家地震局分析预报中心)

摘　　要

本文应用自仿射分形方法来处理地震前兆观测资料．对部分水氡和地电阻率资料进行的处理分析说明：水氡资料和地电阻率资料都存在长程相关的负效应行为，但水氡资料更为显著．分维值（或 H 值）可反映观测资料的结构变化特征，其作为一个无量纲量来综合对比分析各类前兆现象，探讨地震前兆场的复杂性特征提供了有效的途径．

一、引　　言

地震前兆观测资料的处理、分析和研究是地震监视预报的基本途径．我国 20 多年的预报实践和探索研究，积累了大量的震例资料并观察到了丰富的前兆现象，充分认识到地震前兆的复杂性和地震预报的难度．

研究复杂现象的非线性科学的迅速兴起，特别是分形几何理论的出现，对地震预报研究有着巨大的吸引力．国内外许多学者将分形理论应用于研究地震活动性资料，取得了不少进展[1]．本文将应用自仿射分形方法对地震前兆观测资料进行分析处理．

二、自仿射分形

分形几何学中的无规分形（random fractals）给出了许多自然景象的真实模拟，由布朗运动引伸出的分数布朗运动（fractional Brownian motion）是无规分形中最为实用的数学模型．分数布朗运动（fBm）$V_H(t)$是变量 t（通常意义下可当作时间）的单值函数．参数 H $(0<H<1)$ 刻划了 fBm 的运动形态，即 H 值表征了$\triangle V_H=V_H(t_2)-V_H(t_1)$相应于$\triangle t=t_2-t_1$的变化规律（自仿射标度律）·

$$\triangle V_H \propto \triangle t^H \tag{1}$$

满足（1）式这种在不同方向上具有不同标度因子的自仿射变换的分形称为自仿射分形．而自仿射标度律存在的尺度范围，与自相似分形相一致亦称为无标度区．对于自仿射分

---

①地震科学联合基金资助（9000016）．

形，标度因子 H 和局域分维值 D 满足[2] $D=2-H$.（本文将统一用标度因子 H 值来进行分析讨论，而不化为分维值来讨论）.

fBm 过去与未来之间的时间相关为[3] $C(t)=2^{2H-1}-1$，与时间无关．当 $H=0.5$ 时，fBm 为布朗运动，$C(t)=0$ 表明是一个独立的随机无规过程．当 $H>0.5$ 时，$C(t)>0$，存在着正效应，过去的增长（或衰退）倾向将会持久保持．当 $H<0.5$ 时，$C(t)<0$，存在负效应，过去的增长倾向将会造成将来的减少趋势，反之过去的衰退会促使将来发生增长．

分数布朗运动所具有的时序分形和强烈时间相关效应特征，可用于分析处理许多实际问题，特别是大量具有各种物理机制的复杂的地震前兆观测时序资料[4]．文献[4]从数值模拟和应用方面探讨了对少样本点的地震前兆时序观测资料的适宜处理方法，分析结果表明：在尺度法（ruler method）、谱指数法（spectral method）、R／S 分析法（rescaled range analysis）和 RL 方法（Roughness-Length method）四种分维量测方法中，以 R／S 分析法和 RL 方法的效果较好，且 RL 方法的工作量较少，而计算的样本点数有 512 点左右就可满足基本计算要求，当然样本点数越多越好．

三、应用分析

采用 RL 方法对怀来 3 号井水氡资料（1986—1991 年）、阳原台地电阻率资料（1983—1989 年）和昌黎的水氡及地电阻率资料（1983—1989 年）等进行处理．以 512 天的资料为处理的样本点数，30 天为滑动步长滑动计算，计算结果依据自反射标度律进行线性拟合．拟合标准取为能通过统计检验的相关系数超过 90%的最大区间的 H 值（在此拟合标准下得不到 H 值时，则适当降低相关系数的界限，但最低保持在 70%以上），将分析时段内拟合给出的 H 值以分析时段的结束时间为标志．

分析得到的 H 值所跨越的无标度区大都覆盖了统计窗长的变化范围，相关系数基本都达到了 90%以上．仅有部分无标度区变窄（占 2%）、相关系数降低（占 9%）．对比分析原始日变观测曲线和分析所得的 H 值变化曲线可见，H 值基本反映了所分析资料的结构变化，变化幅度的大小与原始观测曲线的相对变化存在一定的关系，其所显示的不同程度的结构变化可能反映了观测点附近发生 M_S4.5 级以上地震活动的震兆．虽然水氡和地电阻率二个方向资料的差异比较明显，但图 1 和 2 中的 H 值都同步显示出昌黎台资料所历经的以 1985 年 7～8 月和 1987 年 7～8 月为划分标志的二种结构变化状态．很可能反映了该观测地区地壳应力在统一构造运动中的调整变化过程．

处理得到的 H 值都小于 0.5．表明水氡和地电阻率观测资料都存在长程相关的负效应行为．水氡资料获得的 H 值小于地电阻率资料得到的 H 值，说明水氡资料有着相对显著的相关负效应．这与原始观测曲线的变化形态相一致，反映了所处理的资料本身所具有的物理背景，即水氡资料反映短临震兆信息较好，而地电阻率资料反映一些趋势变化信息较好．

示图 1 和 2 中所反映的水氡资料的 H 值变化幅度较小和地电阻率资料的 H 值可能带有年变影响因素的问题，以及普遍存在的与所处理资料的相对显著变化相关联的无标度区变窄和拟合之相关系数降低的内涵，及其 H 值可能具有的震兆意义和在昌黎资料上所显示的物理意义等，都有待于进一步的工作．

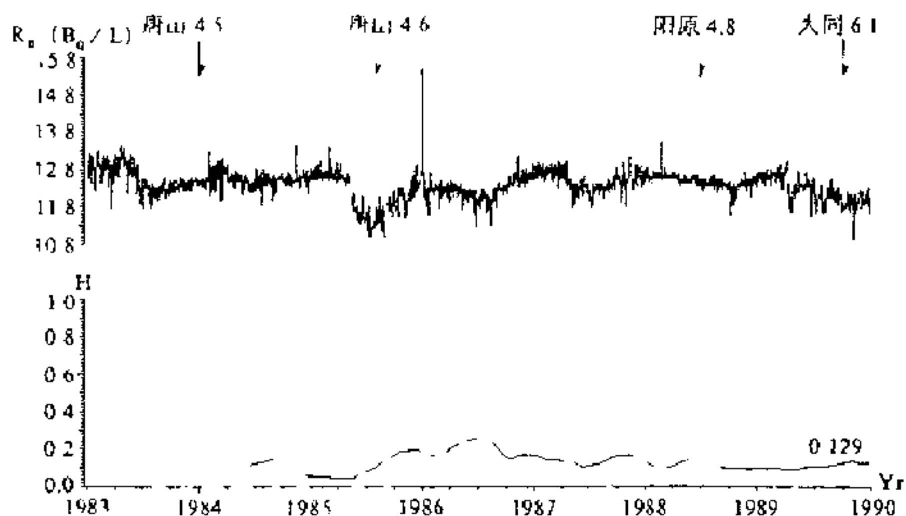
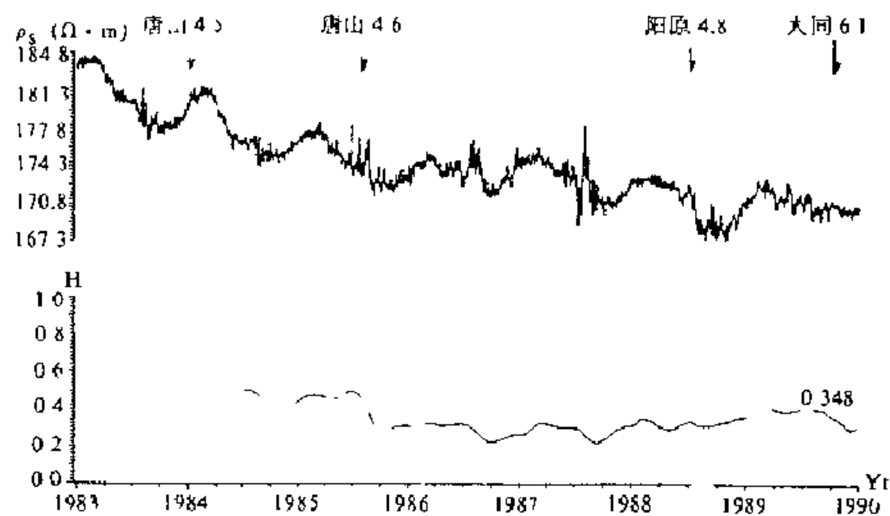
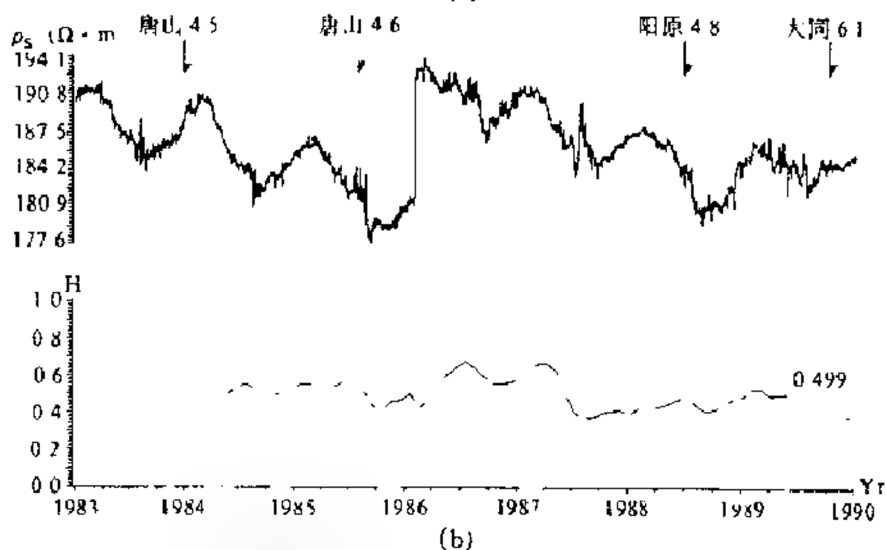


图 1. 吕梨水氧观测曲线和分析所得的 H 值曲线



(a)



(b)

图 2、吕黎台地电阻率观测曲线和分析所得的 H 值曲线 (a) 东西方向 (b) 南北方向

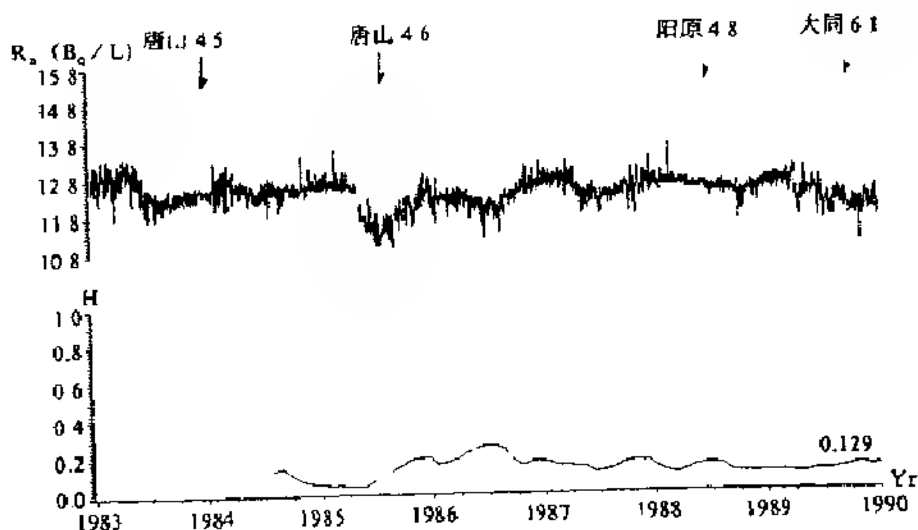


图1、吕黎水氡观测曲线和分析所得的H值曲线

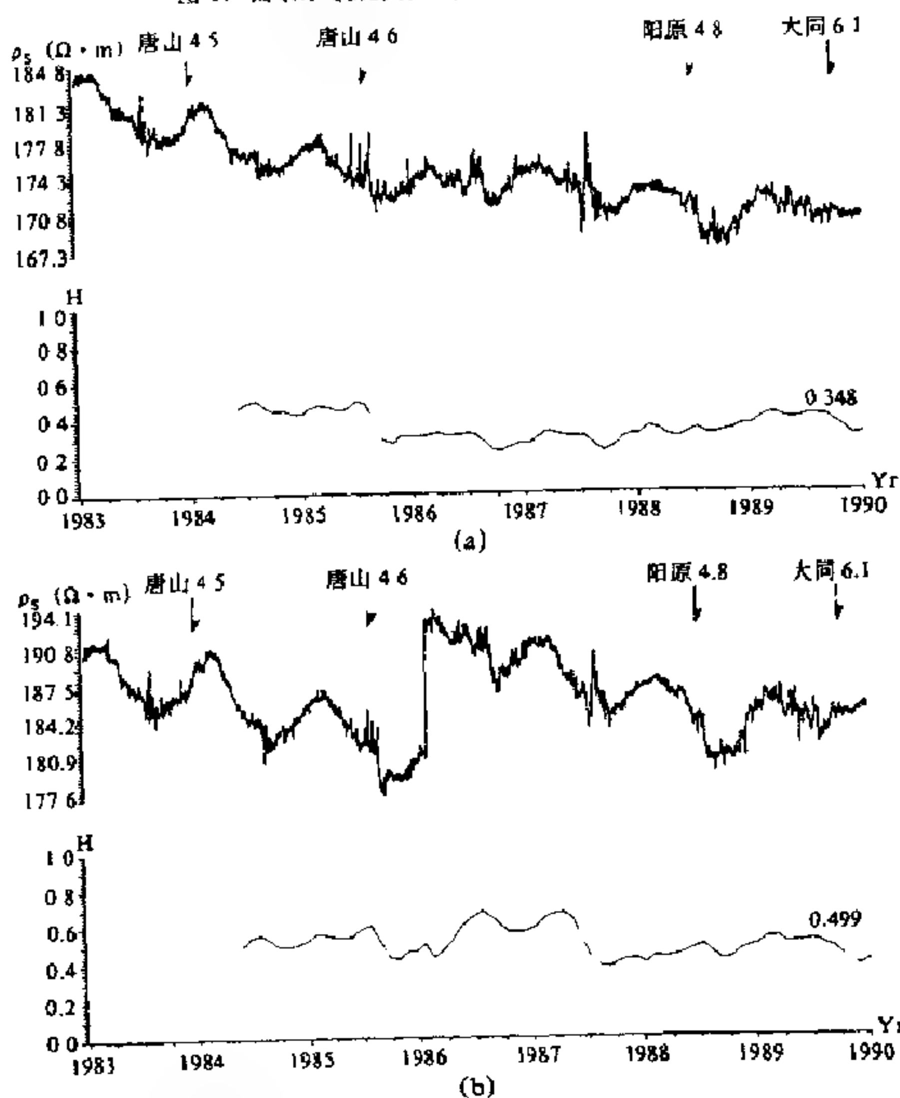


图2、吕黎台地电阻率观测曲线和分析所得的H值曲线（a）东西方向（b）南北方向

四、小　　结

本文从自仿射分形的角度，应用 RL 方法对部分水氡和地电阻率资料进行了分析处理，得到以下有益的结论:

1、分维值反应了地震前兆时序观测资料的结构变化特征，具有一定的物理意义。

2、分维值（或 H 值）在地震前后有着一定的变化，作为一个无量纲量来综合对比分析各类前兆现象，探讨地震前兆场的复杂性提供了有效的途径。

3、水氡和地电阻率资料都存在长程相关的负效应行为，但水氡资料较为显著。

以上仅仅是一些初步的分析，关于地震前兆观测资料所具有的相关效应问题，利用 H 值这一无量纲量来综合对比分析各类前兆现象、探讨地震前兆场的复杂演化特征和物理机制等问题，都有待于对更多的样本资料进行分析研究。

参 考 文 献

〔1〕韩渭宾，统计分形在地震预报研究中的进展与存在问题—非线性科学在地震预报中的应用，陈禺页等编，地震出版社，1992.

〔2〕Peitgen, H O , et al , THE SCIENCE OF FRACTAL IMAGES, 312pp., Springer−Verlag, World Publishing Corp, 1990

〔3〕Feder, J , FRACTALS, Pergamon, Plenum Press, 1988.

〔4〕陈棋福，马丽，陈建民，李志雄，地震前兆观测资料的分形处理方法，中国地震，9，4，1993.

分形与浑沌理论在地震学中的应用与探讨*

安镇文

（国家地震局地球物理研究所，北京 100081）

摘　要

分形与浑沌理论的研究与发展，揭示了自然界中一大类无规几何形体物理过程的内在规律性及其动力演化过程的内在随机性。这给我们探索自然界中分形客体的几何形态以及它与内部物理本质的关系提供了一条暂新的途径。特别是这一理论给我们探讨地震问题：例如探讨地震活动时空分布的确定性图像、地震演化过程的动力学行为、临界特征以及未来大地震的发生等问题带来了某些希望。

本文较详细地综述了近年来分形与浑沌理论在地震学中的应用研究。全文共分 5 部分。第 1 部分是孕震过程的一般概述。第 2 部分描述单分形与多分形在地震学中的某些应用。文中第 3 部分介绍了浑沌动力学中的某些研究在测震学与模型中的应用。第 4 部分综述了自组织临界现象和闪变噪声的研究。最后是分形理论与浑沌动力学在地球科学中的应用前景与展望。

关键词：分形与分维；多重分形；浑沌；闪变噪声；自组织临界现象

一 引言

大地震孕育过程中，由于孕震系统与周围介质不断有物质和能量的变换，显示出很强的耗散作用和复杂的动力学行为。从时间域看来，孕震过程表现为一种有时间箭头的进化。这意味着震过程的时间是不可逆的。从付里叶方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

可以看到，若把时间反演 $t \to (-t)$ 代入，则有：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-K\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

这说明时间方向起着不同的作用。我们知道，这两个方程的物理意义是不同的。我们认为大地震孕育过程是一个向不稳定发展的过程；而大震后孕震系统解体，介质处于急剧调整阶段，虽在较长时间其时空活动可能有较大起伏，但这种过程的总趋势是一个趋向稳定平衡的过程。若以大震发生时刻划分，显然这是两个不同的物理过程。它们各自表现出来的动态行为也应该是不同的，但它们又紧密联系在一起。我们知道，动力学中的时间对称性破缺与因果律之间必然存在着某种联系。但是，对称性破缺又超出因果律的范围，因果律使得需要借助于时间方向确定微分方程来描述自组织的自发过程。我们认为，大地震的发生应该是从无序走向有序，从简单走向复杂。但我们知道一切有序化都不具有时间反演对称性。因此，我们期望，大震发生前、后，可以找到某种不同的时间结构特征。

---

* 地震科学联合基金会资助项目

国家地震局地球物理研究所论著 930046

虽然目前尚不能用非线性微分自治方程定量描述地震活动的时、空、强变化，但是地震孕育过程的复杂性机理还是可以用非线性动力学探索的。特别是如何从测震学的实际资料中提取地震时间序列中或多或少地隐藏着的与未来大震发生有关的信息，或从中找到可能蕴藏着参与未来系统突变的痕迹；如何应用分形和浑沌理论定量描述地震活动的时空复杂性，寻找大地震发生的临界行为等一直是人们探索地震预测行为的主攻方向。近年来，人们在地球物理学和地震学获得的较重要的结果及应用分形和浑沌理论对地球科学的深化认识等增强了人们应用非线性科学探索地球科学的信心。尽管目前物理学家和地球物理还不能预测地震的发生，也不甚了解其具体的演化过程，但是，他们正在探索这一切……

二 分形的研究

多年来，地震活动在时间域和空间域的活动行为一直被定性地描述，从而难以分辨大震前、后的动力学行为。非线性动力学理论告诉我们，即使简单系统也可以表现出难以置信的复杂行为，特别是可以定量刻划它的复杂行为与结构。众所周知，大震前后地震活动的时空分布结构明显不同。大震前，其活动的分布较为分散，结构稀疏，主震后，其分布密度加大和密集。虽然，这种特征受控于介质条件和观测精度。然而，一旦区域和震级限确定，便可得到某一层次上的分布结构。不管震级限选得多么少，统计自相似结构也不可能布满整个时间流，而只会在更小的时间尺度上留下各种层次的空隙。但可能包括许多更小的时间层次。应用经典分形方法，我们得到海城，唐山和松潘三大地震的容量维，均发现主震前有一个明显的降维过程。而在空间域的研究中得到同样结果。特别是，在信息维研究中，也得到有一个稳定的下降过程。当信息维达到极小值后，转而上升，直至大震发生。对唐山地震来说，从最低点到大震发生时间约半年左右，变化幅度为 0.2。海城地震的最低点距大震发生时间一年左右，变化幅度为 0.4。特别值得注意的是，我们在对岩石模拟实验中得到非常类似的结果，声发射活动与天然地震活动符合得很好。这的确说明，大地震前地震活动的规律确实是从无序走向有序。

当然，问题并非如此简单，对于地震问题的复杂性，很可能单重分形并不定能完全刻划它的复杂性。因此，人们提出应用多重分形探讨地震的复杂性。Hirabayashi 等人研究了加里福尼亚、日本和希腊等地区的地震活动的多重分形特征。通过计算 D_q-q 曲线表明。地震是多分形的。他们发现日本的地震是最不均匀，但加里福尼亚的地震的非均匀程度在几个地区中却是最低的。而 D_q-q 曲线在每一个地区都显示出明显不同的两种类型：缓变与陡变型。陡变对应极不均匀的分形。它出现在发生大震时的地震活跃期。朱令人等人研究了渤海和唐山地震活动的多重分形特征。分们发现大震孕育的不同阶段，$f(\alpha)-\alpha$ 曲线具有不同的形态。一般大震前，$f(\alpha)-\alpha$ 曲线的左端值显著下降。$f(\alpha)-\alpha$ 曲线的顶点是右偏的。他们认为端点值的急剧下跌可能是一种很有预报意义的前兆现象。

多分形工作在地震学的研究还处于刚刚开始阶段，特别是负 q 段可能存在着相变等问题，这方面工作急待进一步的研究与探索。

三 浑沌动力学研究

分形的研究表明地震活动在某一层次上存在着幂律标度。本质上只反映了地震活动的静态特征。对于探讨地震孕震过程来说，我们还必须了解其动态行为，才能把握其演化过程，为预测提供信息。通过对关联维数的研究，我们得到海城、唐山和龙陵大震前地震活动有一个低维

浑沌过程。同时得到辉长岩AE活动在失稳破裂前，其频次分布也是浑沌的。这表明两种系统具有惊人的相似性。1990年罗久理等人于测震资料中得到大震前地震有一个浑沌过程。那末地震究竟是不是浑沌的呢？如果是，则说明短期预报还是可以探索的，而精确预报则是不可能的。关于这个问题，美国地质调查局的Julian，1990年在自然杂志刊登了一篇短文"地震是浑沌的吗？"他认为地震是一个复杂过程，而且地震是由断层上的快速，不稳定滑动造成的。当摩擦力随滑动或滑动速率增大而减小时便产生这种滑动。由此引起很多人用弹簧连接滑块以及滑块与驱动滑块沿表面缓慢移动"驱动器"系统来模拟断层。虽然这种研究中很多是复杂的，且涉及许多滑块与空间不均匀等种种物理效应，但令人惊异地看到即便是简单的模型也能展示出复杂的性态。Nussbaum和Ruina考虑了相同驱动弹簧连接并受简单的静动摩擦定律支配的两块相同耦合的滑块。当时间和距离定标后，模型可由一个参数描述。然而，这种静动摩擦对称两滑块模型的状态并不是浑沌的。对所有的耦合比和初始状态，运动最终都要变为周期的。Huang和Turcotte将非对称性引入两滑块的摩擦系数里，从而，两滑块系统就可展现出稳定滑动，周期性滑动或浑沌运动。如果参数初始是对称的，然后在摩擦中渐渐引入非对称性，则滑块运动将出现一系列次谐频率，从而导致复杂的周期性、最后到达浑沌状态。这种周期倍化级联过程正是非线性系统从周期通向浑沌的最普适的道路。然而，这是物理模型中的浑沌运动。

与模型不同的是真实的地震是否真是浑沌的呢？至今尚未有公认的结论。但是，Horowitz最近研究了1980至1986年中期帕克菲尔德地区的15196次少地震的目录。他用这些数构造了15维的状态空间，最后找到一个仅有6个自由度的基本结构。从而，可以得出结论，仅用6个变量构造的系统就能模拟该地区的地震性状。如果，这样简单的一个系统的确能产生出与实际地震资料一样复杂的时、空性状，则将提供一个强有力的证据，地震的确存在一种浑沌过程。

四 自组织临界现象的研究

地震现象中，已有多种幂次定律通过经验为人们所知，比如大森公式。一旦大震发生后，随后就不接连不断地余震发生，且频次逐日衰减并符合下述经验公式：

$$N(t) \sim K(t+c)^{-p} \tag{4.1}$$

C为一很小的常数。可见余震的频次是按时间的负幂衰减的。第二个经验公式是G－R公式。小震次数相当多而大震次数少，则其分布为：

$$\log N(>M) = a - bM \tag{4.2}$$

这里a、b均为常数。若将震级M换成能量，则有幂律公式：

$$N(>M) \sim E^{-2/3} \tag{4.3}$$

第三是地震活动的空间分布。若以某地震为中心，假定在半径为r的范围内发生的地震次数为N(r)，若取所有地震的统计平均〈N(r)〉，则：

$$\langle N(r) \rangle \sim r^{d} \tag{4.4}$$

这里d一般为1.0－1.6。这又是一个幂律形式。

应当指出，具有少数自由度的简单动力系统在广义平衡统计系统中，很少出现幂律分布。为了得到幂次律关系，需要精心调节诸如动力耦合或温度这样的参数，使其达到某个临界点。但是，自然界中的动力系统是无法调节的。因此，这种表现临界性从何而来？Bak和Tang曾发现某些大的相互作用系统自然地朝着一种临界状态进化。在这种情况下，小事件能够导致大灾难。重要的是系统是耗散的，而且它们在空间上能扩展到"无限"的自由度，其能量直接或间接通过边界进入这巨大的体积并以均匀方式供给系统。承受构造板块运动压力的地壳可以视为

这种系统。这种系统在临界状态，没有特征时间、空间或能量的标度。因此，所有的时空关联函数都是幂次的。孕震系统中，幂律大小分布与活动地震区域的几何自相似性密切相关，并假定系统是巨大的，驱动力即构造板块运动是缓慢的。这就是 Bak，Tang 和 Weisenfeld(BTW)提出的自组织临界状态理论(SOC)。近年来，人们就这一理论研究了大量地震、经济市场和生态系统的动态特征，并应用计算机模拟这种系统的演化过程，成功地解释了很多自然现象。

地震作为构造板块的一种运动形式，是一种非常丰富和复杂的自然现象。地震孕育过程中，中小事件引起的连锁反应很可能导致大系统的失稳，产生大地震。正象美国地质调查局的 Shaw 所怀疑的那样：即使远离圣安德烈斯断层的小的应变也可能触发大的滑动。为探索系统的临界行为，我们应用测震学数据，通过求数学期望比的办法，导出了一个新的时间序列 $U_i(i=0,1,2,\cdots)$，然后对其进行功率谱分析，从而得到幂律关系 $f^{-\beta}$，由此导出 Hursf 指数。

通过我们对唐山、海城、澜沧等 7 个大地震的研究，初步结果得到：大震前 β 值有明显增高的趋势。主震前一年以及当年，β 值几乎均落在 $0.8<\beta<1.4$ 之间。这正是闪变噪声的带宽。科学家早就知道，闪变噪声表示一个系统的动态特征受过去事件的强烈影响。这说明孕震系统到了这个阶段，每个事件之间有明显的关联关系。显然，这意味着孕震系统的不稳定性。也许这就是孕震系统的临界行为。这与 BTW 等人和 Pomeau 等人在研究接近临界分叉点时，得到阵发行为显示为 $1/f^{\beta}$ 谱的结果是一致的。Chrisfensen 等人应用简单的动力学模型，试图俘获 1/f 噪声潜在机制的实质，讨论并证明 1/f 噪声是一种自然出现在带有很多自由度，相互作用的耗散动力系统，确定性的自组织临界现象。其幂律谱的指数依赖于守恒水平。

唐山大震前幂指数值较高，超过了闪变噪声的带宽，为一种褐色噪声。就相关意义讲，这表明各事件关联性更强。从而更强烈地揭示了系统动态不稳定的特征。两种情况都表明孕震系统可能有许多自由度，也许是有限的。Theiler 指出，只要具有 4 个自由度，这种系统的动力学行为就可能显示为 $f^{-\beta}$ 谱。而我们在距大震发生时间较远的地震活动研究中，发现 β 值几乎都波动在 $0\leqslant\beta\leqslant0.4$ 范围内。这表明在远离大震发生时，地震活动本质上为一种随机噪声，表明各事件的发生是独立的，没有关联关系，具有无穷多个自由度。通过 β 值，我们导出了表征局部曲线弯曲程度的指数 H 值总是波动在 $-0.5\leqslant H\leqslant0.1$ 范围内。目前知道，仅在地球物理领域 H 值才有负数。同时我们发现，当接近大震发生时，H 变为正值。这一方面预示着长期孕震过程的结束，另一方面表明了预报大震发生的可能性。当然上述结果是否带有普适性，尚需大量进一步的工作。

背景地震活动类似于一随机现象，这与人们的一般看法是一致的。当距大震发生时间较近时，事件活动的谱密度为一种没有尺度标度的幂律形式，这是否暗示了孕震系统低维浑沌过程的存在！我们知道，真实的 $f^{-\beta}$ 谱不能在某种有界的低维怪引子上的浑沌运动上产生。但实际上，在整个很宽的频率范围内，显示 $1/f^{\beta}$ 标度的幂律谱是很普遍的。由此看来，Osborne 和 Provenzle 的结果的确是与可能起因于时间序列低维浑沌维数的估算有关。

五. 前景与展望

非线性科学在地球物理学和地震学的引进与发展，深化了人们对许多地球物理问题和地震问题的认识与了解。诱发了某些新的科学生长点，揭示了和正在揭示着一些根本问题。目前，这一理论在地学领域蓬勃发展。然而，这些领域又向非线性科学提出了许多新课题。例如小数据量问题、非稳定数据的分析与处理、离散非均匀的数据处理等。这些构成了探索地球科学的关键。

我们相信，非线性科学的发展在地球科学中有着光明的前途和挑战性的未来！

主要参考文献

[1] 安镇文，探索复杂的地震现象，国际地震动态，4，1－6，1992.

[2] Huang, J., Turcotte, D. L. Are earthquakes an example of deterministic chaos? Geophys. Res. Leff. 17, 223－226, 1990.

[3] Horowitz, F. G., Slip patterns in a spatially homogeneous fault model, J. Geophys. Res., 94, B8, 10279－10298, 1989.

[4] Horowitz, F. G., Nonlinear friction and chaos in seismicity: Speculations about a geometric framework for predicting earthquake, EOS, 69, 44, 1437, 1988.

[5] Rundle J. B., Derivation of the complete Gutenberg－Richfer magnitude—frequency relation using the principle of scale invariance. J. Geophys. Res. 94, B9, 12337－12342, 1989.

[6] Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise, Phys. Rev. Leff., 59, 381, 1987.

[7] Hirata, T. and Imoto, M., Multifractal analysis of spatial distribution of micro earthquakes in the Kanto region, Geophys. J. Int., 107, 155－162. 1991.

[8] Hirabayashi, T., Ito, K. and Yoshii, T., 地震的多分形分析，世界地震译丛，5，60－70. 1992.

[9] 安镇文，姚林华，陈颙，岩石声发射和地震活动的信息维，中国科学(B辑)，7，736－742，1992.

[10] 罗久理，刘冬燕，地震活动究竟是浑沌现象还是决定性的——地震再生吸引子探讨，大自然探索，9，31，26－31，1990.

[11] Julian, B. R., Are earthquakes chaotic? Nature, 345, 481－482, 1990.

[12] 朱令人，周仕勇，地震多重分形标度指数谱 f(α)的研究，西北地震学报，14，2，30－35，1992.

分形几何学在地震综合预报中的应用

平建军
（河北省地震局）

摘　要

本文应用分形几何学理论研究了1975年至1992年6月河北省及其邻近地区M_s≥5级地震前地震前兆异常的群体特征，并给出了用来描述这一群体特征D值的异常判据指标，这无疑对该区的地震综合预报具有一定的实际意义。

引　言

地震的发生是一个极其复杂的自然现象，地震的孕育、发生势必导致地壳介质各种物理、化学的变化，反映到地震监测手段上则显示出多方面的异常现象。因此我们说单项手段的地震预报是从某个学科的侧面来探索与地震的关系，而综合预报则是研究各种前兆现象之间的关联、组合、整体特征及其与地震的关系，所以就报震的效能而言，综合预报较之单项预报更应有所作为，但是由于各种观测手段所测的物理量不同，其异常的种类和形态亦各异，且映震机制更是千姿百态，故如何将这些地震异常有机地统一起来进而开展地震综合预报是多年来地震界一直探索的难题之一。

然而自70年代兴起的分形几何学给我们解决这一复杂问题提供了一种途径，因为它并不需要对地震异常作高深的数学转化，而只需将其不加任何修饰地标记在时间轴上，通过研究其时间分维结构，就有可能提取地震异常群体震兆信息，从而达到地震综合预报的目的。本文正是按照这一思路对河北省及其邻近地区地震异常分数维D的映震能力展开分析研究的。

方法简介

测定分数维的方法有多种，这里我们采用文献[1]介绍的标度变换法来计算地震异常时间结构的分数维，其原理为：

假设地震异常在时间轴上是处处稀疏的点过程，类似于著名的康托尔不连续集合，令所研究的某时间段为1个单位，称之为原标度值，然后分别取一系列越来越小的新时间标度值ε作为时间尺子，去量取有地震异常的时间段数N(ε)，从而得到两个对称的数组，即：

ε：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$……

$N(\varepsilon)$：$N(\frac{1}{2})$，$N(\frac{1}{4})$，$N(\frac{1}{8})$……

将各$\lg(\frac{1}{\varepsilon})$和$\lg N(\varepsilon)$点在双对数坐标系上，即得分维图，其实例见图。

从图可知$\lg N(\varepsilon)-\lg(\frac{1}{\varepsilon})$曲线由三部分线段组成，即由斜率为1的oa段、斜率为分数的ab段及斜率趋于0的bc段组成。

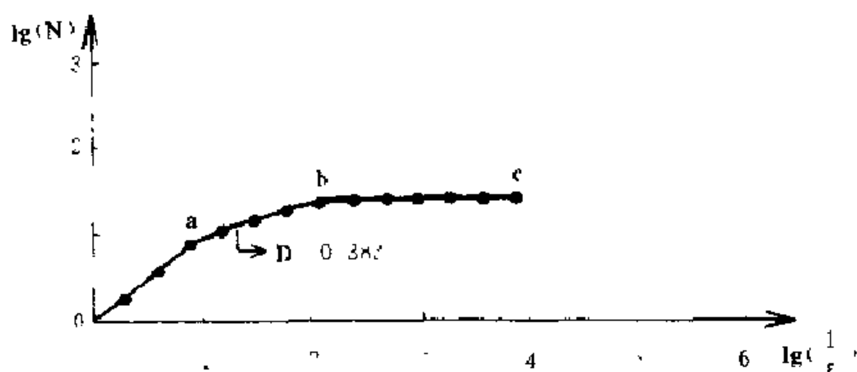


图 1984.7.1 198 6 河北省及邻区地震异常时间分维图

斜率为1,表示在所研究的原标度时间内,有地震异常的时段处处充满,或称其分布完全均匀没有结构。斜率为0,意味着随着ε逐渐变小,N(ε)趋于饱和,即趋于地震异常总数。斜率为分数,则预示着在原标度时间内一定存在无地震异常时段,亦即地震异常在该时间内的分布一定不均匀,或曰其具有有序性。线段ab在分形几何学中被称之为无标度区,其斜率即为我们欲求取的分数维D,它可用数理统计方法求取。

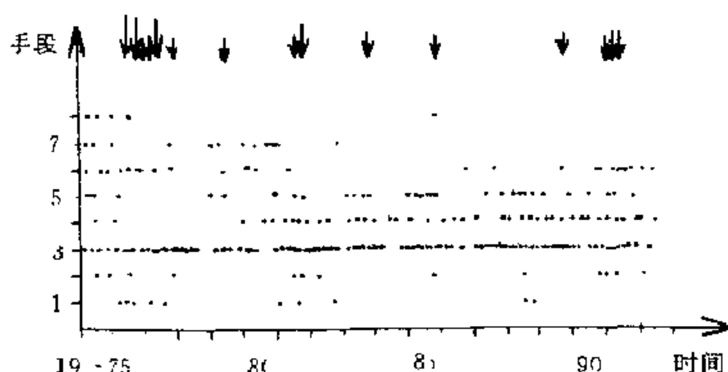
一般地计算分数维D应遵循以下2条原则:

1. 无标度区始点$\varepsilon_{始}$比终点$\varepsilon_{终}$至少要大一个数量级,反映在分维图上(图1)即ab线段至少应有三个点构成,否则自然就失去了意义。

2. 由于分数维D是ab线段的回归方程系数,因此我们采用文献[2]介绍的相关系数检验法,取$\alpha=0.05$,对其进行统计检验,以证明它是否可信,要求计算得到的相关系数ρ必须大于查表得到的相关系数ρ_α。

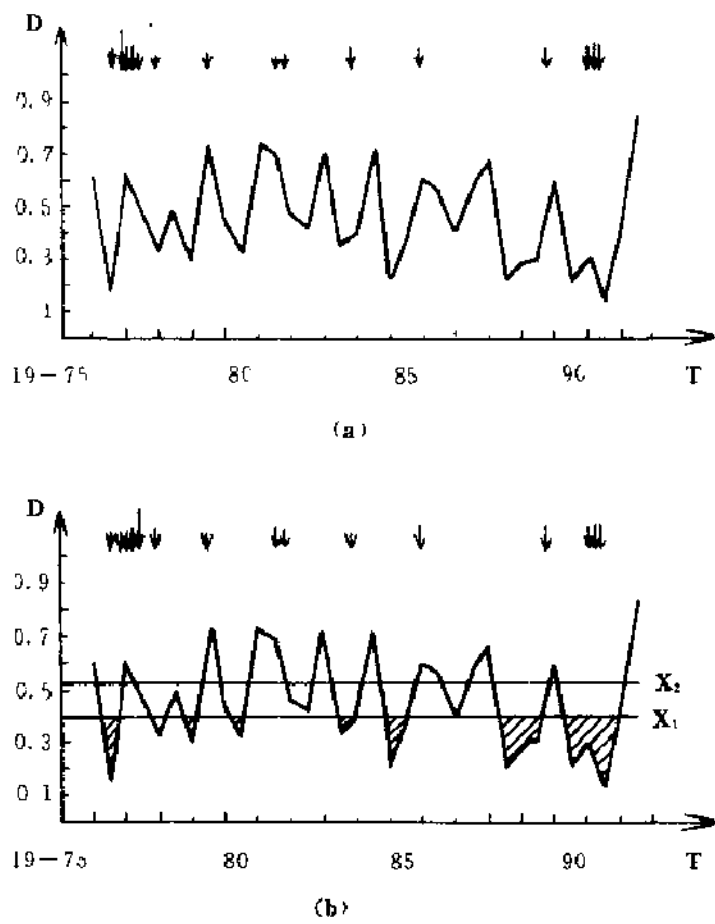
计算及分析

我们核实收集了1975年至1992年6月河北省全部及邻区个别台站的地电、应力、水位、地磁、形变、水化、测震等监测手段所出现的地震异常328条,在此基础上,又参考文献[3,4]给出的地震异常资料对其进行补充,最后形成我们计算分数维所用的地震异常样本数据(见图2),因此这些样本数据是比较可靠、齐全的。



1—地电 2—应力 3 水位 4 地磁
5—形变 6—水化 7 测震 8 其它
图2 河北省及邻区地震异常时序图

依照上述求取D值的方法和原则，对图₂采用以一年为尺窗、半年为步长滑动计算各时间尺窗内的D值，并将其标记在尺窗的末尾，这样共得到1975年至1992年6月的D值34个，将这些D值连同在此期间河北省及其邻近地区发生的$M_s \geq 5$级地震(据国家地震局分析预报中心全国地震目录数据库)一并点画在图₃ₐ上。



图₃ 河北省及邻区地震异常D—T图

从图₃ₐ可知，虽然D值曲线忽高忽低很不平稳，但在河北省及其邻近地区绝大多数$M_s \geq 5$级地震前，都有D低值异常出现，那么D值低到什么程度方能被视为异常呢？这就需要我们给出其异常判别标准或异常警戒线，以便提取震兆信息。

假定各D值为互独立、同分布的N(ξ,σ)变量，其中ξ为D值的真值，σ为其均方差，本文中我们是以ξ区间估计的下限值作为D值异常判据指标的，具体求取步轴为，作统计量：

1. D值的均值

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \qquad (1)$$

2. D值的子样均方差

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2} \qquad (2)$$

由文献[2] t检验的分布可得，ξ的(1－α)置信区间为：

$$\left(\bar{D} - t_{\frac{1}{2}\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{D} + t_{\frac{1}{2}\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

其中 n 为 D_i 的子样个数，α 为选取的显著水平，$t_{\frac{\alpha}{2}}$ 为 t 检验用分位值，可由表查取。

我们令：

$$X_1 = \overline{D} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

$$X_2 = \overline{D} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

其中 X_1 即为我们欲求取的 D 值异常警戒线值。

取 α＝0.05，据自由度（n－1＝33）及 α，查取 $t_{\frac{\alpha}{2}}$＝2.03（见文献[7]），把它们及各 D_i 值代入（3）～（4）式得：X_1＝0.391，X_2＝0.524，将 X_1、X_2 点画在图[illegible]上。

对图[illegible]分析之前我们约定：当某时段（指 1 年）计算得到的 $D<X_1$，且在该时段内并无 $M_s \geq 5$ 级地震时，就视其 D_i 值为低值异常，据此就预报未来 6 个月内河北省及邻近地区将有 $M_s \geq 5$ 级地震发生。

根据此约定从图[illegible]我们共可得到 D 值低值异常 7 次，除 1980 年 6 月 30 日 D 值异常为虚异常外，其余 6 次异常即：1976 年 6 月 30 日、1978 年 12 月 31 日、1983 年 6 月 30 日、（1984 年 12 月 31 日～1985 年 6 月 30 日）、（1988 年 6 月 30 日—1989 年 6 月 30 日）、1990 年 12 月 31 日的异常分别对应了 1976 年 7 月 28 日唐山 7.8 级、1979 年 6 月 19 日介休 5.1 级、1983 年 11 月 7 日荷泽 5.9 级、1985 年 11 月 30 日邢台 5.2 级、1989 年 10 月 19 日大同 5.8 级、（1991 年 1 月 29 日忻州 5.1 级、1991 年 3 月 26 日大同 5.8 级、1991 年 5 月 30 日陡河 5.2 级）等 6 组 8 次（不含图[illegible]上标出的同一地震的余震和前震）$M_s \geq 5$ 级地震（详见表 1），对震率为 85.7%，漏报 1981 年 8 月 13 日丰镇 5.5 级和 1981 年 11 月 9 日邢台 5.8 级这组地震。

由图[illegible]我们还可发现 D 值异常的幅度似与未来地震有关，即其异常幅度越大，对应未来地震或震级越高、或次数越多、或距离河北越近。

表 1　D 值异常统计表

项目 / D值异常时间点	D 值	对应地震			最后一个 D 值异常点距发震的时间
		时间	地点	震级 (M_s)	
1976.06.30	0.159	1976.07.28	唐山	7.8	28 天
1978.12.31	0.292	1979.06.19	介休	5.1	170 天
1980.06.30	0.324				
1983.06.30	0.354	1983.11.07	荷泽	5.9	130 天
1984.12.31 1985.06.30	0.159 0.383	1985.11.30	邢台	5.2	153 天
1988.06.30 1988.12.31 1989.06.30	0.224 0.268 0.304	1989.10.19	大同	5.8	111 天
1990.12.31	0.289	1991.01.29 1991.03.26 1991.05.30	忻州 大同 陡河	5.1 5.8 5.2	29 天 85 天 150 天

预报效能鉴定

为了对上述D值报震效果作出科学的评价，我们采用文献[5]介绍的R值评分方法对其进行评判，公式为：

$$R=\frac{\text{报对的地震次数}}{\text{应预报的地震总数}}-\frac{\text{预报占用时间}}{\text{预报研究的总时间}}=\frac{n_1}{n_1+n_1^0}-\frac{t}{T} \quad (5)$$

据(5)式对图$_{3b}$曲线评分结果列于表2，从表2可知我们实际计算的R值为$R_{实}=0.554$，而据文献[5]有关公式算出97.5%置信度所对应的最低R值为$R_0=0.436$，$R_{实}>R_0$，说明D值异常预报地震是可行的，能够反映一定的震兆信息。

表2　D值异常预报效能鉴定表

名称＼项目	n	$n_1+n_1^0$	t（半年）	T（半年）	$R_{实}$
图$_{3b}$曲线	6	7	10	33	0.554

讨　论

本文通过计算分数维D，研究了河北省及其邻近地区$M_s\geq5$级地震前地震异常的群体特征，取得了比较好的预报效果，其原因在于：从图$_2$可看出在我们所研究的整个时间域里，地震异常总是"层出不穷"，表现为平时随机分布不均匀震前分布丛集不均匀性加剧，由求取分数维D的原理可知，它们的D值不仅应该存在而且震前的D值较之平时一定要小，所以我们说震前大量的短临地震异常出现是导致D值呈现低值下降的直接原因，换言之，D值描述了地震异常整体特性与地震的关系。

另外如前所述，由于我们是采用半年为步长滑动计算D值的，因此当其出现异常时就进行为期6个月的短期地震预报，这无疑增加了预报占时率，从而使得R值相应地减小，如果将计算步长缩短，则可望能提高R值，不过这样以来计算的工作量必然会增加好多倍，如何恰当地选取滑动步长有待今后作进一步深入研究。

参考文献

[1]洪时中等，分数维及在地震科学中的应用前景，四川地震，1，1987。

[2]李庆海、陶本藻，概率统计原理和在测量中的应用，测绘出版社，1982。

[3]陈绍绪，地震前兆异常的合成，地震，5，1992。

[4]李文英等，信息综合集成方法在短期地震预报中的应用，地震，待刊。

[5]陆远忠等，地震预报的地震学方法，地震出版社，1985。

地震活动性的模糊时空分维分析及其应用

刘喜兰　冯德益　（天津市地震局）

一、前言

由于地震活动性一般不具有严格意义下的分形结构，近年来我们引进模糊分维分析方法来进行研究，并在其时间分维 $\underset{\sim}{D}_0^{(1)}$（一维问题）和空间分维 $\underset{\sim}{D}_0^{(2)}$（二维问题）分析方面取得了有意义的结果，见文献[1-3]。本文把这一分析方法推广应用到地震活动性的模糊时空分维 $\underset{\sim}{D}_0^{(3)}$（三维问题）分析研究上来，以便取得能更全面反映地震活动性时空演化过程的，应用价值更大的研究结果。为了简化符号，本用 $\underset{\sim}{D}_0$ 代替 $\underset{\sim}{D}_0^{(3)}$

二、（强震及中强震）模糊时空分维的定义与确定方法

在由地面坐标（纬度 ψ 和经度 λ）和时间 t 组成的三维空间（ψ,λ,t）中，每一次地震都是一个点子。地震大小可用模糊集"强震和中强震"$\underset{\sim}{A}$ 的从属度 μ 值来确定，本文选用的 μ 值见表 1。

表 1　模糊集"强震和中强震 $\underset{\sim}{A}$ 的从属度 μ 值

华北地区震级 M	≥6.0	5.5—5.9		5.0—5.4		4.5—4.9	4.0—4.4	<4.0
西南地区震级 M	≥7.0	6.5—6.9	6.0—6.4		5.5—5.9	5.0—5.4	4.7—4.9	≤4.6
μ 值	1.0	0.9	0.8	0.7	0.65	0.5	0.3	0

强震及中强震模糊时空分维仍可定义为[1-3]：

$$\underset{\sim}{D}_0 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}, \qquad C(\varepsilon) = \sum\mu_i \tag{1}$$

式中 μ_i 为（ψ,λ,t）空间中第 i 个图象和以 ε 为标度构成的单位标度图象模糊自相似的程度，即"相象"的程度。

模糊时空分维 $\underset{\sim}{D}_0$ 的具体确定方法如下。用 $\triangle\psi\times\triangle\lambda$ 的尺度把某一研究地区划分成若干个面积相等的小方块，第一个小方块的边长为 $\triangle\psi=\triangle\lambda=1/\varepsilon=L$；同时，选定适当的时间单位，把某一时间段也用 $\triangle t=1/\varepsilon=L$ 划分成一些小的时间段。在所有边长为 $L\times L\times L$ 的立方体中寻找出最大地震震级 M，再按表 1 查出 μ_i，然后求和即得 $C=\sum\mu_i$。改变尺度 L，可算出相应的 C 值。最后得出（$\ln C,\ln\varepsilon$）或（$\ln C,\ln l$）关系；检查其线性相关性，若可认为二者近似呈线性关系，则可用最小二乘法计算出该线性关系式 $\ln C=-\underset{\sim}{D}_0\ln\varepsilon+b$ 中的"斜率项"，即得模糊时空分维 $\underset{\sim}{D}_0$。

由式（1）可得出以下几种特殊情况：

1. 若令所有 $\mu_i=1$，则模糊分维 $\underset{\sim}{D}_0$ 化为普通的清晰分维 D_0。

2. 若整个地区，整个时段内只有一次强震或中强震事件 j，$\mu_j\leqslant 1$，则有 $\underset{\sim}{D}_0=0$。

3. 若每个小盒子（立方体）内都有 $\mu=1$ 的强震，则有 $\underset{\sim}{D}_0=3$，这是它的极大值。

4. 若整个地区，整个时段内都没有 $\mu>0$ 的中强震，则数学上对应着 $\underset{\sim}{D}_0\to-\infty$，物理上已无意义。

5. 我们在每一个小盒子内只取一个最大地震对应的 $\mu_i\leqslant 1$ 值，而不是把所有 $\mu_i>0$ 的地震都相加；这样，在盒子的尺寸变大之后，原先在小盒子内已取中的地震在更大一些的盒子内

就不一定能取上而有可能被抛弃；其结果是，在某些情况下 $\tilde{D}_0$ 可能出现负值。

最后应该注意的是，我们研究的(λ,ψ,t)空间是数学上的三维空间，而不是几何上的三度空间。

三、强震及中强震模糊时空分维分析及其应用

现在以四川炉霍地区(28.5°—34.5°N,98.0°—104.0°E)为例来进行强震及中强震模糊时空分维分析。该地区有一个6°×6°的范围。先用1°的间隔来划分成36个正方形面积面积单元，再把一个6年的时间段划分成6个以年为单位的时间单元。这样便有6×6×6个时空小盒子，在每个小盒子内寻找出最大地震震级M并按表1查出 μ_i，然后把所有小盒子的 μ_i 相加即得 C_1，它对应着小方盒的边长为 $L_1=1$。接着，把小方盒的边长扩大一倍，即取 $L_2=2$，此时就只有3×3×3个小盒子，求出每个小盒子的 μ_i 并相加，即得对应的 C_2。依此类推，直到 $L_j=6$ 时，整个地区和整个6年时段构成一个大的时间小盒子，其中的最大地震震级M对应的μ值即为C值；j≥4。最后便可根据(LnC,Lnε)的逼近直线的斜率来确定出该时间段内强震及中强震模糊时空分维 $\tilde{D}_0$ 的数值。为分析方便起见，把每6年的 $\tilde{D}_0$ 值与其最后一年相对应。再把时间段往后滑动一年，求出下一个 $\tilde{D}_0$，依此类推，便可得出一条随时间变化的 $\tilde{D}_0(t)$ 曲线，如图1所示。

由图1可以看出，在1925年以来炉霍地区发生过的三次 $M_s\geq6.8$ 大地震之前，模糊时空分维 $\tilde{D}_0$ 都要出现大于0.5的高值，前兆异常形态非常明显。

对于四川松潘地区及华北唐山、邢台等发生过大地震的地区，也都得出了完全类似的结果。因此，强震及中强震的模糊时空分维 $\tilde{D}_0$ 可作为一项较好的中长期地震预报指标。

若把研究地区也不断向上、下、左、右滑动1°或2°，就可以对 $\tilde{D}_0$ 值进行空间扫描，从而寻找出来未来大地震的危险地区。

四、结束语

模糊分维分析是对诸如地震活动性与地震前兆这一类不严格具有分形结构，但又近似具有分形结构的自然现象进行分析研究的新方法，它吸收了分形理论的基本思想与方法，但又突破了一些难于满足的限制条件。据以前对地震活动性和地震前兆的模糊时间分维 $\tilde{D}_0^{(1)}$，模糊空间分维 $\tilde{D}_0^{(2)}$ 和本文对模糊时空分维 $\tilde{D}_0^{(3)}$ 的分析研究结果，模糊分维分析至少在地震危险性估计与地震预报方面已有较好的应用前景。当然，从理论上看，模糊分维的概念、定义与确定方法等都还可能存在一些问题，有待进一步深入探讨。

参考文献

[1]冯德益、林命周等，大地震活动的模糊时间分维特征，中国地震，vol.7，No.1，1991。

[2]冯德益、刘喜兰等，模糊分维及其在地震研究中的某些应用，地球物理学报，vol.35，No.4，1992。

[3]刘喜兰、冯德益，模糊空间分维在地震活动时空演化研究中的应用，地球物理学进展，vol.7，No.3，1992。

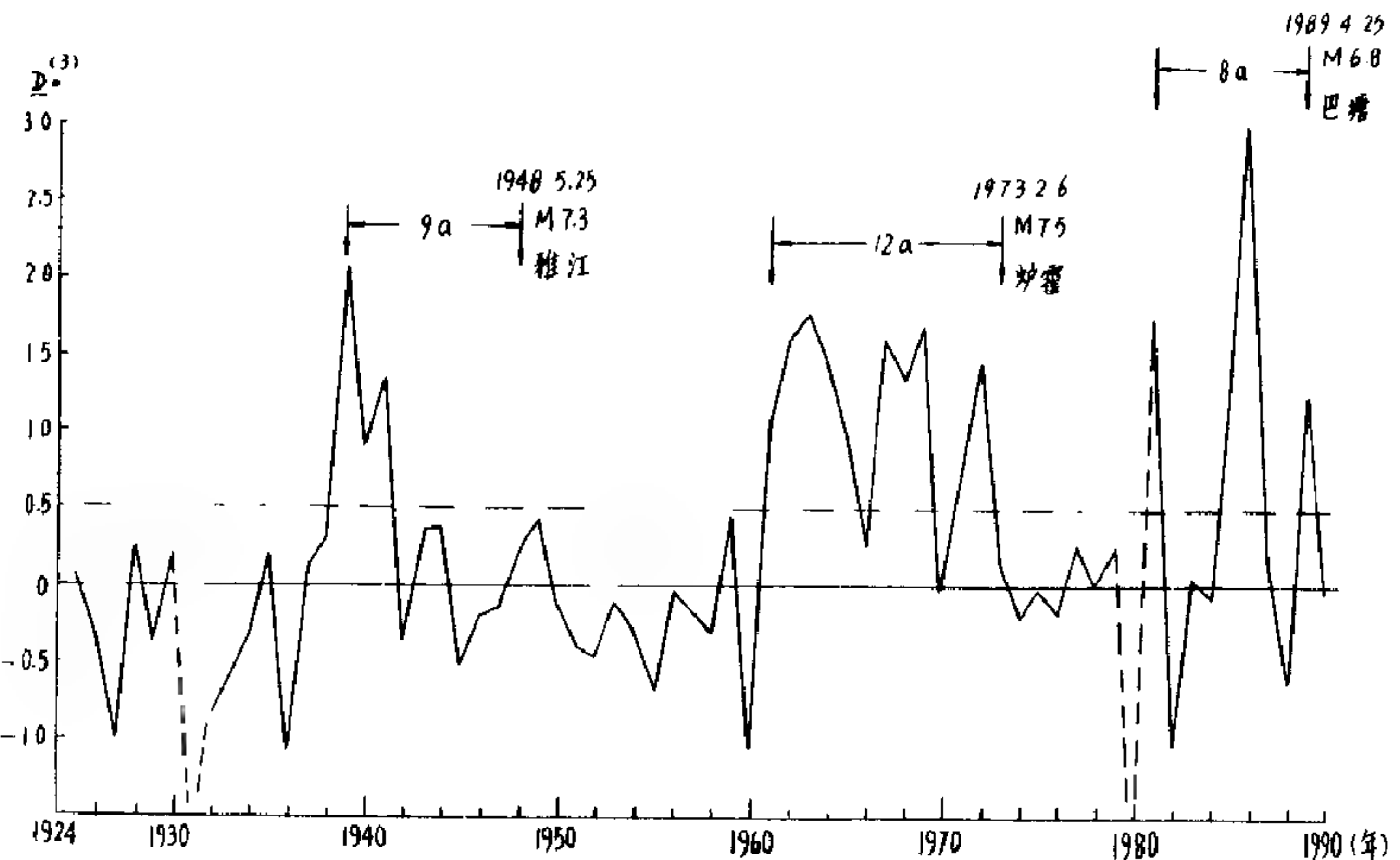


图 1　炉霍地区强震及中强震模糊时空分维 D_0 随时间变化曲线

地震强度分形结构的谱值分析法

冯德益　蒋淳　田山　（中国　天津地震局）
大内彻　（日本　神户大学理学部）
陈照景　（中国　南开大学数学系）

一、前言

不同地区地震震级 M 与频次 N 的统计结果，一般都满足以下古登堡公式，简称 GR 关系式：

$$\lg N = a - bM \tag{1}$$

式中 a、b 为常数。震级 M 与地震能量 E 的关系为

$$\lg E = cM + d \tag{2}$$

而能量 E 又与等价震源半径 r 的立方成正比例，即：

$$E = \alpha r^3 \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)容易导出：

$$N = \beta r^{-D} \tag{4}$$

式中 $D=\frac{3}{c}b$，β 为依赖于 a、b、c、α 的常数。因常数 $C\approx1.5$，故 $D\approx2b$。显然，式(4)表明地震强度分布具有分形结构，其容量维为 $D=2b$。因此，GR 关系式(1)也是地震分形结构的一种表达形式。

目前，b 值已广泛应用于地震预报研究当中，通常在大震前出现 b 值下降，亦即分维 D 下降。但是，大量实际统计资料表明，GR 关系式(1)一般都不能完全满足，而有不同程度的偏离。为进一步深入研究地震强度的分形结构，本文介绍两种谱值计算法，即矩方法和广义信息量方法，二者都可用于估计实际结构与分形结构的偏离程度。显然，这两种方法也可用于其他一些自然界分形结构现象的分析研究当中。

二、计算 b 值谱的矩方法及 b_γ 谱

设震级——频度关系近似满足 GR 关系式(1)，并用 M_1、M_2...M_N 来表示按减小的顺序排列的 $M\geqslant M_0$ 震级序列，其中 N 为地震次数，M_0 为所取得震级下限，则通过按 GR 关系式对 M 求积分，并用求和代替积分，便可得出的震级的 γ 矩的以下近似关系式：

$$\sum_{i=1}^{N}(M_i - M_0)^\gamma \approx \frac{N\Gamma(\gamma+1)}{(b\ln10)^\gamma}$$

由上式便可得出随 γ 变化的 b 值，亦即 b 值谱：

$$b_\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)^{1/\gamma}}{\ln10 J_\gamma^{1/\gamma}}, \qquad J_\gamma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(M_i - M_0)^\gamma \tag{5}$$

当 $\gamma=1$ 时，式(4)化为宇津提出的用矩方法计算 b 值的公式。若震级—频度关系完全满足 GR 关系式，则所有 b_γ 均相同并与 γ 无关，反之则 b_γ 依赖于 γ。即是说，只有当 $b_\gamma=b_1=b\approx\frac{1}{2}D$ 时，地震强度分布才具有完全的分形结构；而 b_γ 曲线偏离 $b_\gamma=b_1$ 直线的程度也就是该分形结构被破坏的程度。

三、计算 b 值谱的广义信息量方法及 $b(\alpha)$ 谱

Kullbuck Leibler 平均信息量（简称 KL 信息量）可表示为：

$$K(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log(p_i/q_i) \tag{6}$$

式中$\vec{P} = \{P_i\}$，$\vec{q} = \{q_i\}$分别表示实际的(后验的)和模型的(先验的)分布。对于地震的震级频度关系来说，P_i和q_i可看成震级介于M_i与$M_i + \Delta M_i (i = 1,2,\ldots,m)$之间的实际观测到的地震与按GR关系式推测出的地震的发生概率，即$P_i = n_i/N$，$q_i = B\exp(-BX_i)\Delta M_i$，$X_i = M_i - M_0$，$B = b\ln 10$使$K(\vec{p},\vec{q})$达到极小值的$b$值就是$GR$关系式中的$b$值，这样求得的$b$值与最大似然法给出的结果等价。由于信息商$S = -K$，故$b$值的最小KL信息量估计法也就是最大熵估计法。

广义信息量可用以下两种公式来表达：

1)川田表达式：

$$I^{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i (p_i/q_i)^{\lambda} - 1\right)/\lambda, \quad (-1/2 \leqslant \lambda < \infty) \tag{7}$$

2)Renyi表达式：

$$R^{a} = \left(\log \sum_{i=1}^{m} P_i (p_i/q_i)^{a-1}\right)/(a-1) \tag{8}$$

二者间有以下简单关系式：

$$\lambda R^{a} = \log(\lambda I^{\lambda} + 1) \qquad \lambda = a - 1 \tag{9}$$

当$a \to 1$及$\lambda \to 0$时，Ra和$I\lambda$简化为KL信息量。为了求出b值谱$b(\lambda)$或$b(a)$，无论根据式(7)或(8)，都只需要求出使以下函数达到极小值的b值：

$$\lambda^{\lambda}(b) = \sum_{i=1}^{m} p_i (p_i/q_i)^{\lambda} \tag{10}$$

用上述方法计算出的$b(a)$谱同样可以反应实际结构偏离于分形结构的程度。若$b(a) = b(1)$，即b值谱为一并行于a轴的直线，则对应的地震强度分布具有完全的分形结构；$b(a)$曲线偏离直线越远，相应的分布结构与分形结构相差就越大。

四 b值谱在地震预报的应用

初步研究结果表明，b_γ谱及b(α)谱在大震前均要出现一定的形态异常变化，因而可用于地震预报当中。例如，对华北地区b_γ谱的分析计算结果表明，1973下半年及1974上半年、1976上半年、1980上半年、1982下半年、1983下半年、1988下半年的b_γ谱曲线呈现出随γ非单调上升变化(见图1)，其后的半年至一年半内都发生了接近于6级或更强一些的地震，即：1975年二月海城7.3级、1976年7月唐山7.8级、1981年8月兴和5.8级和11月隆尧5.8级、1983年11月荷泽5.9级、1984年5月黄海6.2级、1989年10月大同5.8级地震；后面一年内无大震发生的正常期内的b_γ曲线则随γ呈明显的快速单调上升形态。又如，大内彻把日本分为A、B、C三区，分别对应太平洋一侧的东部地区、本岛西部地区及日本海一侧地区，计算出各区的b(α)谱，结果表明：大地震很多的A区的b(α)谱线随α变化较慢，而大地震较少的C区的b(α)谱线则随α变化较快，b区的谱线正好居中，各区的谱线的基本形态都是b随α上升而下降。

降。

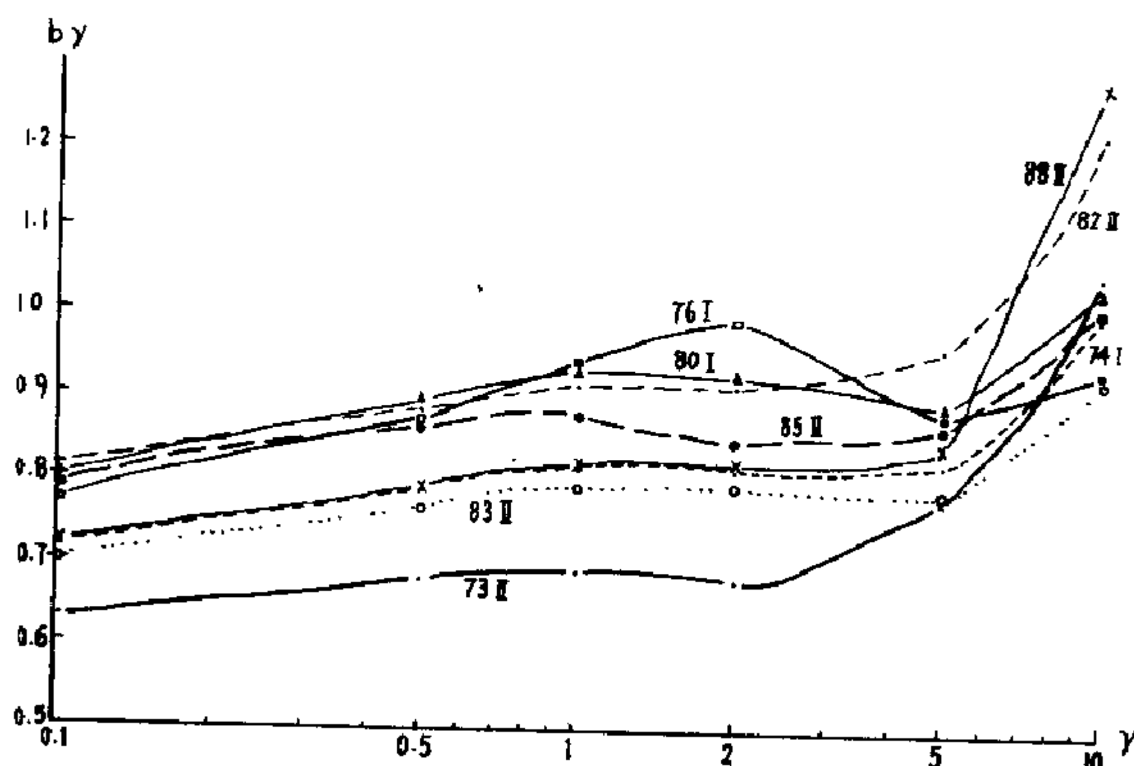


图1. 华北地区具有异常形态的 b_γ 谱曲线

Ⅰ.Ⅱ分别表示上半年和下关年

五、结语

目前,分形理论及其应用研究已涉及到许多学科领域,包括地震科学。在实际应用研究当中,我们经常遇到一个难题,就是所研究复杂现象只是近似地具有分形结构,但并不完全具有这样的结构。因此,有时很难定出"无标度区",或者说,无标度区很窄,严格的分维也难于定出。本文讨论的地震强度分布就是一例。为了用分形理论研究这一类"近似自相似结构"或"模糊自相似结构",我们考虑了两种途径。第一是引进模糊自相似与模糊分维概念,这在地震活动性研究中已取得较好的应用结果,见文献[1]。第二是研究复杂现象的实际结构与严格的分形结构的偏离度,本文介绍的谱值分析法就属于这一类。该方法最先由大内彻引进地震研究当中,见文献[2],本文作了进一步分析研究与开拓应用,得出了较为满意的结果。

参考文献

[1] 冯德益等,模糊分维及其在地震研究中的某些应用,地球物理学报,vol. 35, No. 4,1992。

[2] Toru Ouchi ,Analysis of the fractal structure of earthquake size distributions, Mathematical Seismology ,1993,in press。

模糊分维与模糊自相似性在地震前兆异常识和分析中的应用

郑熙铭 冯德益 朱杜兰
（天津市地震局）

1. 前言

自然界的自相似现象可以分为两在类：一类是确定性的，一类是不确定性的，不确定性的现象又可分为随机的和模糊的两种。

但是，自然界中许多具有自相似性的复杂结构，实际上并不都“相似”，而仅仅是“相象”，我们把这种“相象”的结构称之为“模糊自相似”结构。因为“相似”具有自反性，对称性和传递性，而“模糊相似”（即“相象”）只有自反性和对称性，不具有传递性。“相似”是清晰概念，“模糊相似”（“相象”）是模糊概念。

模糊相似现象可用一个模糊集合来描述，其相似程度则用相似从属度 $\mu_s \in [0,1]$ 来表示，μ_s 值越大，表示相似程度越高，$\mu_s=1$ 时则表示为完全地相象（相似）。亦即相似是模糊相似的一种特例。

同样的道理，“模糊自相似”和“自相似”的关系也是“自相似”是“模糊自相似”的一种特殊情况。因为“模糊自相似”是指把一个大的图象（现象或结构）经过若干步的分细后的大部分放大，再与原图作比较，看是否相象。其相象的程度用模糊自相似从属度 $\mu_r \in [0,1]$ 表示。μ_r 越大则相相象程度越高，显然，$\mu_r=1$ 时就是清晰的“自相似”。

模糊自似又可分为两大类：一类是有序的，另一类是无序的。它们之间的主要区别在於：将分细后的小图象（结构）与原来的图象（结构）作对比时，小图象与原图象内部的元素是否按一定顺序排列，若按顺序排列后再来考察其相象的程度则象的程度，则属于有序模糊自相似，即我们常说的“模糊自相似”；否则属于无序模糊自相似。无序模糊自相似可用模糊分维理论来描述。

本文从有序和无序两个方面来论述地震前兆异常的模糊自相似特征，结果表明，采用模糊自相似的方法来识别地震异常比用原始观测值图象识别异常的效果要好，并且明显地看出在震前，震源及其附近地区的地震前兆有明显的模糊自相似性和模糊维数的下降，下降幅度最大的地区可能就是未来的震中区，下降过程结束后的时间即为发震时刻，这对地震孕育和发生过程的研究及地震预报都有积极的意义，而且说明了模糊数学方法在研究复杂事件的领域中可以发挥重要的作用。

2. 方法

①有序模糊自相似（以下简称“模糊自相似”）

把原标度定为1，新标度为 ε_i，假定 μ_i 为第i个小图象和以 ε 为标度构成的单位标度图象“相象”的程度，即模糊自相似的从属度，则可把 $\ln\sum\mu_i$ 和 $\ln\varepsilon$ 之间的相关系数 μ_s 定义为整个复杂结构（现象）的模糊自相似从属函数，其体计算公式为：

$$\mu_s=\frac{\sum\ln\varepsilon_i\ \ln\sum\mu_i-(1/n)\sum\ln\varepsilon_i\sum(\ln\sum\mu_i)}{\{[\sum(\ln\varepsilon_i)^2-(1/n)(\sum\ln\varepsilon_i)^2][\sum(\ln\sum\mu_i)^2-(1/n)(\sum\ln\sum\mu_i)^2]\}^{1/2}}$$

具体做法如下。

设某种随时间而变化的地震前兆观测值的序列为$t_1,t_2,t_3,\cdots\cdots t_m,\cdots t_n$，则首先建立一个相嵌矩阵

$$y_1=(t_1,t_2,\cdots t_m)$$
$$y_2=(t_2,t_3,\cdots t_{m+1})$$
$$y_3=(t_3,t_4,\cdots t_{m+2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然后求距离

$$d_{12}=(y_1,y_2)=\sqrt{\sum_{1}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)^2}$$

$$d_{23}=(y_2,y_3)=\sqrt{\sum_{1}^{m-1}(t_{i+2}-t_{i+1})^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

再给定若干个标度ε_i，统计$d_{ij}<\varepsilon_i$的个数占全部d_{ij}的比例，即为$\sum\mu_i$，值，再按公式计算$\mu_m[0.1]$，我们是用地震前兆观测值的五日均值为基本数据(t_i)，取m=6，即每个月计算一个μ_m，以此类推，即可得到一个μ_m的时间序列值。这个序列值就是地震前兆观测值的有序模糊自相似程度随时间变化的值可由此来研究它与地震活动的关系。

②无序模糊自相似(以下简称“模糊分维”)

在模糊集理论与分形理论的基础上，引进模糊分维的概念，即把容量维推广到具有模糊自相似结构的复杂现象之中。其计算公式为，设用新标度ε去度量原图象时，第i个图象从属于原单位标度图象的从属度为μ_i，则模糊容量维D_o为.

$$Do=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\sum\mu_i}{\ln\varepsilon}$$

式中 $\mu_i=[1+\frac{1}{|k_j|}\cdot\frac{}{|r_j|}]^{-1}$

k_j为地震前兆观测值Y(t)的斜率，它的计算式为.

$$k_j=\frac{\sum t_j\sum y_j-n\sum t_jy_j}{(\sum t_j)2-n\sum t_j^2}$$

r_j为观测值的自相似相关系数，它的计算式为

$$r_j=\frac{\sum t_j\sum y_j-(1/n)(\sum t_j\sum y^j)}{[\sum t_j^2-(1/n)(\sum t_j)^2]^{1/2}[\sum y_j^2-(1/n)(\sum y_j)^2]^{1/2}}$$

一般情况下取n=5。

求得μ值以后，即可按公式计算Do值。

具体步骤是:

取ε_i为1,2,3,4,6,12，μ_i分别取该时间段内的最大值。ε_i=1时，$C1=\sum_{1}^{12}\mu_i$ ε^2=2时，($C^2\sum_{1}^{6}\mu_i$，ε_3=3时，$C_3=\sum_{1}^{4}\mu_i$，ε_4=4时，$C_4=\sum_{1}^{3}\mu_i$，ε_5=6时，$C_5=\sum_{1}^{2}\mu_i$；ε_6=12时，

$C_0=\mu_{max}$，然后用最小二乘公式计算出这6组lnC和lnε之间直线的斜率，即为Do，同上面一样Y，取前兆观测值的五日均值，每五个计算一个Do，以此类推，即可求得Do随时间变化的序列值。这就是地震前兆观测值的几何模糊自相似程度随时间变化的值，也可以由此来研究它与地震活动的关系。

3. 资料处理结果

我们采用上述方法处理了首都圈地区1988～1991年五大类地震前兆、60多个台(项)和该地区1973～1977年断层位移测量的20多个台(点)的共约2万多个观测数据。

现将主要结果分述如下

(1) 用模糊自相似性识别地震前兆，主要结果见表1，其变化与地震活动关系见图1。

表1

观测项目	台(点)名称	μ 基值	μ(min)	Δμ	t(min)	对应地震	ΔT(月)	观测点到震中距离
短水准	张道口	1.0	0.71	0.29	1975.7	1976.7 唐山7.8	12	100公里
			0.37	0.63	76.2	1976.7 唐山7.8	5	
			0.66	0.34	77.3	1977.5 宁河6.3	2	60
	易县EW	1.0	0.50	0.50	1977.2	1977.5 宁河6.3	3	175
	红山SN	1.0	0.80	0.20	1976.3	1976.7 唐山7.8	4	340
			0.40	0.60	1977.5	1977.5 宁河6.3	0	300
	沧州EW	1.0	0.50	0.50	1976.8	1977.5 宁河6.3	9	120
			0.75	0.25	1977.3	1977.11 宁河5.5	2	
	香山EW	1.0	0.66	0.34	1977.6	1977.11 宁河5.5	5	175
断层位移测量	范庄子	1.0	0.54	0.46	1976.12	1977.5 宁河6.3	5	170
	燕家台1	1.0	0.63	0.37	1976.4	1976.7 唐山7.8	3	235
			0.66	0.34	1976.9	1976.11 宁河6.9	2	200
	小水峪NE	1.0	0.45	0.55	1975.11	1976.7 唐山7.8	8	250
			0.41	0.59	1976.5	1976.7 唐山7.8	2	
	施庄	1.0	0.83	0.17	1976.11	1976.11 宁河6.9	0	210
			0.88	0.12	1977.3	1977.5 宁河6.3	2	210
	宁河SN	1.0	0.29	0.71	1976.6	1976.7 唐山7.8	1	60
	墙子路SN	1.0	0.80	0.20	1976.6	1976.7 唐山7.8	1	120
			0.51	0.49	1976.10	1976.11 宁河6.9	1	130
			0.42	0.58	1977.2	1977.5 宁河6.3	3	130
			0.52	0.48	1977.7	1977.11 宁河5.5	4	130

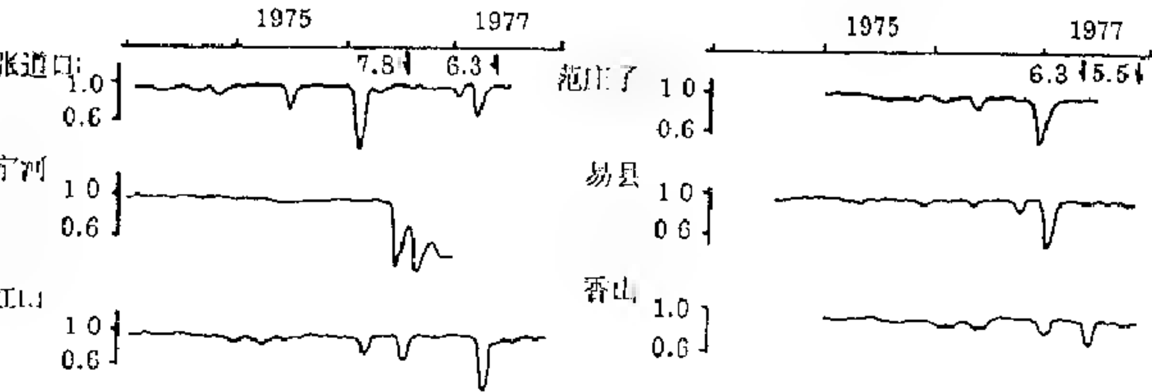


图1 地震前兆模糊自相似性与地震活动的关系

(2) 用模糊分维识别地震异常，主要结果见表2，其变化与地震活动关系见图2。

表2

观测项目	台(点)名称	D_0 基值	D_0 min	ΔD_0	D_0 min	对应地震	ΔT (月)	台(点)到震中距离
地电	阳原NE	0.74	0.58	0.16	1988.9	1989.10 大同6.1	13	25(Km)
			0.55	0.19	1989.8	1989.10 大同6.1	2	
	阳原NW	0.78	0.54	0.24	1989.3	1989.10 大同6.1	7	25
			0.55	0.23	1989.8	1989.10 大同6.1	2	
	大同SN	0.94	0.60	0.34	1989.8	1989.10 大同6.1	2	50
	大同EW	0.90	0.83	0.07	1989.8	1989.10 大同6.1	2	
	平谷NW	0.88	0.74	0.14	1989.7	1989.10 大同6.1	3	250
	通县EW	0.74	0.31	0.43	1988.4	1989.10 大同6.1	18	240
			0.54	0.20	1989.8	1989.10 大同6.1	14	
	大兴EW	0.84	0.61	0.23	1989.3	1989.10 大同6.1	7	200
	大兴SN	0.84	0.76	0.08	1989.2	1989.10 大同6.1	8	200
			0.72	0.12	1989.9	1989.10 大同6.1	1	
水位	增4	0.96	0.86	0.10	1989.6-7	1989.10 大同6.1	4	300
	双桥	0.96	0.81	0.15	1989.5	1989.10 大同6.1	5	220
	万全	0.94	0.79	0.15	1989.6	1989.10 大同6.1	4	120
	马17	0.93	0.88	0.05	1989.2	1989.10 大同6.1	8	240
地磁总强度	昌黎	0.58	0.48	0.10	1989.8	1989.10 大同6.1	2	440
	平谷	0.60	0.39	0.21	1989.5	1989.10 大同6.1	5	280
	延庆	0.60	0.36	0.24	1989.5	1989.10 大同6.1	5	190
水氡	文安	0.78	0.51	0.27	1989.4	1989.10 大同6.1	6	240
	王四	0.80	0.64	0.16	1989.2	1989.10 大同6.1	8	300
			0.62	0.18	1989.7	1989.10 大同6.1	3	
短水准	香山EW	0.92	0.81	0.11	1989.5	1989.10 大同6.1	5	180
	易县SN	0.92	0.74	0.18	1989.7	1989.10 大同6.1	3	140
	南孟	0.80	0.66	0.14	1988.12	1989.10 大同6.1	10	200

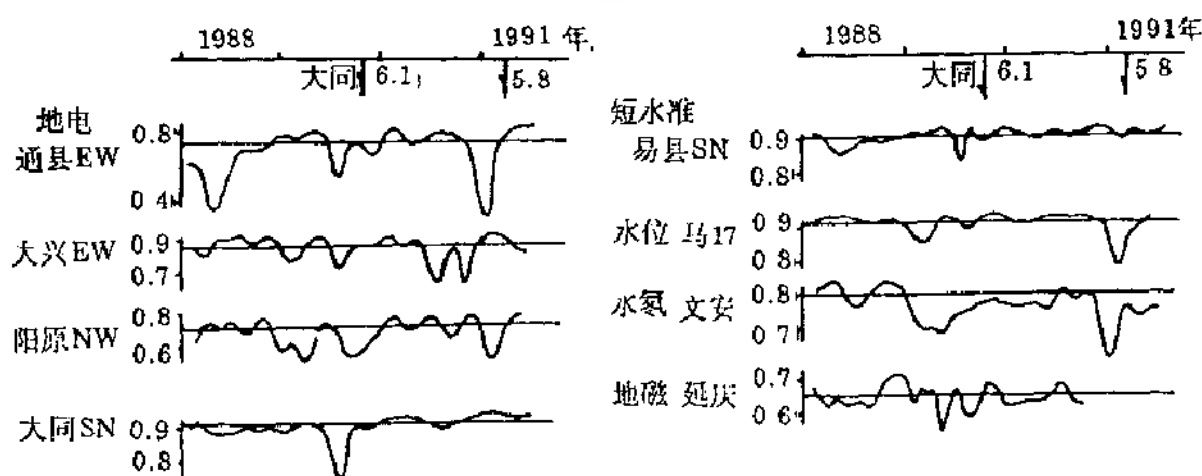


图2 地震前兆的模糊分维变化与地震活动的关系

4. 分析和讨论

(1) 地球演化史表明，地震活动是地壳内多次重复发生的破裂现象，地壳本身是不稳的，加上它和岩石圈与地幔之间存在着能量和物质的交换，而且还受到太阳幅射和大气不稳定运动的影响。所有这些不稳定和非均衡性都导致地壳内存在着许多个“孕震区”。但是，这些“孕震区”却各具个性，几乎不存在完全一样的“地区”。在这些“地区”，地壳断层从变形到发生断裂，出现了无数的随时间而变化的物理、化学因子，这些因子是千变万化，也几乎没有完全一样的东西，所有这些都说明地震的孕育——发生过程具有强烈的复杂性。非线性理论的诞生为地震预报研究带来了生机，我们利用其中的普适性概念，利用模糊分维与模糊自相似来探索地震前兆的相似性，取得了较好的效果。

从图1和图2可看到，前兆模糊分维和模糊自相似在震前都出现了低值，说明无论从有序，还是从无序来分析这些前兆观测值，在地震前，都呈现出自相似性的降低，亦即，在地应力的作用下，这些观测值在震前改变了它们原有的结构关系，这就为从复杂的前兆观视值中识别提取地震异常提供了新的方法。

(2) 我们把表1和表2中，μ_0(min) 或 D_0(min) 出现时到地震发生之间的时段△T，统计于表3，从表中可看到，由本文方法识别出的地震异常47.8%都是在震前3个月以内出现的，78%的异常是在震前半年以内出现的。这就为突破地震预报中难度最大的短临预报闯出了一条新路。

表3

地震	3个月以内	4-6个月	7-12个月	12个月以上	合计
唐山7.8级	4	2	2	0	8
宁河6.9级	3	0	0	0	3
宁河6.3级	6	1	1	0	8
宁河5.5级	0	2	0	0	2
大同6.1级	9	7	6	3	25
合　　计	22	12	9	3	46

(3) 我们设 $\Delta D_0 = D_0$ 基值 $- D_0$(min)，$\Delta \mu_0 = \mu_0$ 基值 $- \mu_0$(min)，则从表1和表2可看到唐山地震前以张道口台和宁河观测点的 $\Delta \mu_0$ 最大，张道口、宁河距离唐山分别为100和60公里，大同6.1级地震前以大同和通县的 ΔD_0 为最大。大同观测点距离大同地震震中仅50公里。说明震源区是一个前兆自相似变化最大的地区，是一个维数下降最明显的地区。

参考文献

[1] 冯德益等，模糊地震学，地震出版社，1992。
[2] 郑熙铭等，地震前兆模糊分维特征的研究 西北地震学报，Vol,14,No 3,1992。
[3] 郑熙铭等，强震前兆异常的模糊识别与地震预报，地震,No.3,1991。

阔克沙勒--吉萨尔地震活动时间的多重分形研究

朱令人　　　周仕勇

（新疆维吾尔自治区地震局　乌鲁木齐）

我们已知，分形可分两大类　几何自相似或均匀分形及统计自相似或非均匀分形--又称多重分形、复分形。自然界中的分形体一般不是几何自相似而是统计自相似的，地震分形就是如此。

对均匀分形通常用简单分维D0（容量维），D1（信息维），D2（关联维）就可以充分地描述。对多重分形则需用分形谱Dq--q或f（α）～α来描述。

近年来关于地震对空分形的研究取得了一定的进展，但多限于简单分形。然而对地震时间分布或空间分布这类非均匀分形，单一的D0或D1是不足以描述其性质的。为此我们分别计算了不同Dq及其Legen　dre变换f（α）谱，试图从中得到更多的信息，为大震预报提供新的启示。

1．研究区地震时间的f（α）谱

阔克沙勒- 吉萨尔地震带是天山地震带最重要的一部分，东起天山主峰托穆尔峰，西达塔吉克斯坦首都杜尚别以西，绵延1300km，地跨中国新疆、吉尔吉斯斯坦、塔吉克斯坦三国。部分还涉及乌兹别克斯坦共和国，包括柯坪断块、乌恰地震区、阿赖山区、加尔姆及杜尚别地震区。历史上曾发生过1902年阿图什8 1/4大震和十多次七级以上大震。是典型的内陆地震活动带。

我们选择一是阔克沙勒 -吉萨尔全区，二是乌恰震区进行研究。其范围见图1，资料选取见表1．

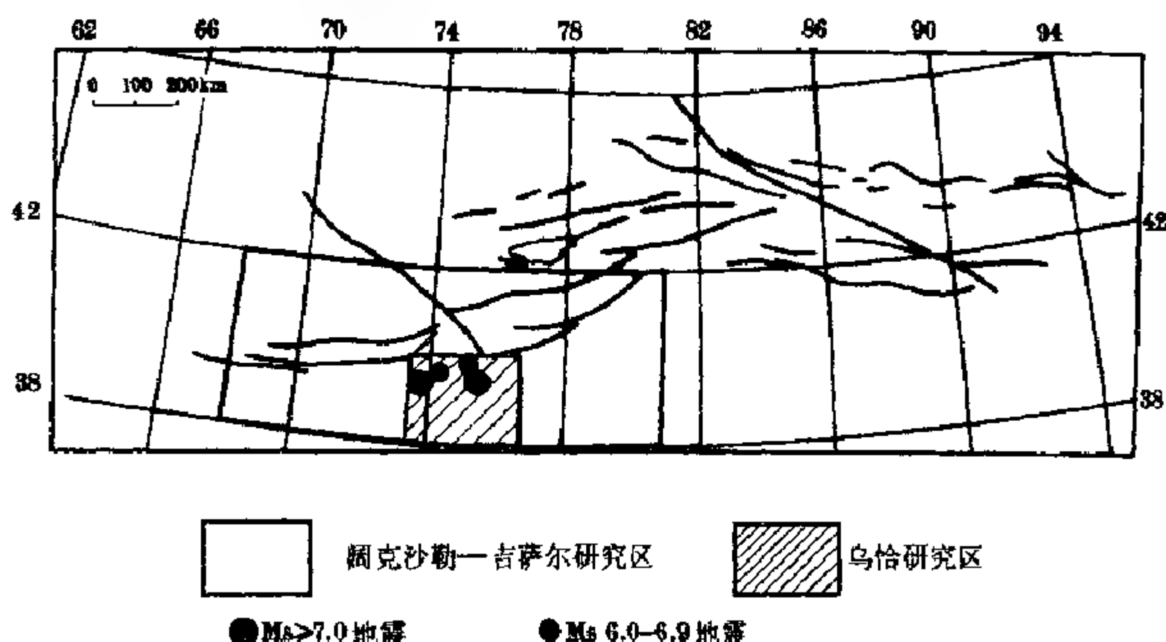


图1．研究区范围及1970—1989年乌恰地区地震位置

表1 资料选取

研　究　区	纬　度(N)	经　度(E)	时　　段	起始震级
阔克沙勒- 吉萨尔	38° 18′ 42° 00′	68° 00′-81° 42′	1970--1989	Ms3.0
乌　恰	38° 00′ 41° 00′	73° 30′-76° 40′	1970--1989	Ms3.0

1970～1989年乌恰 地区发生6.0级以上地震4次(不计强余震)参数如下：

1974.8.11	Φ 39° 14′	λ 73° 50′	Ms7.3,
1978.10.8	39° 30′	74° 48′	6.0
1983.2.13	40° 08′	75° 20′	6.8
1985.8.23	39° 24′	75° 36′	7.4

计算标度指数谱f(α)采用直接计算法[1][2]，q取值为[-4，4]。分析表明此时f(α)-α能基本反映q在[-∞，∞]取值的f(α)性质。

为保证有一定的样本容量，又避免把信息平滑掉，时间窗长取512天，用4月～1年为步长进行滑动，取子时段L=2天计算广义分维，从而避免无标度区确定对结果的影响。得到38幅f(α)-α图。

下面展示1983年2月13日乌恰6.8级地震前后两研究区各三幅f(α)--α图(图2，图3)。

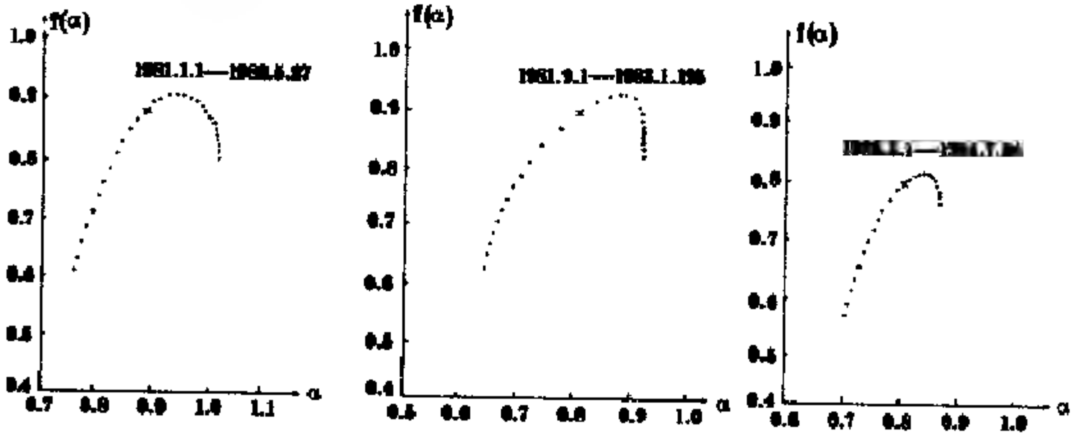


图2. 铜克沙勒—吉萨尔研究区不同时段f(α)-α图

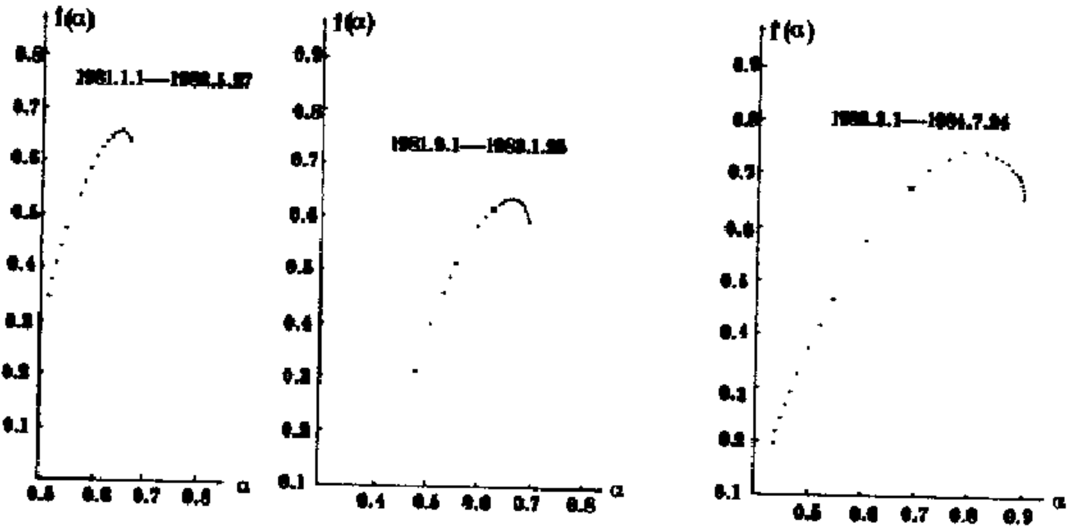


图3. 乌恰研究区不同时段f(α)-α图

分析f(α)--α图，有下列认识：

1.地震时间的f(α)-α曲线顶点是右偏的，说明密集是地震时间分形结构的主要特征。

2.在地震活动正常情况下，f(α)--α取得值一定范围内，研究对象不同，范围也不同。

3.大震发生前，f(α)--α往往有较大变化，乌恰研究区的f(α)左端点下移，α的左端点值变小，取值范围变宽。大震发生后，余震很多情况下，α取值变得甚宽。这两点与渤海地震、唐山地

震前后f(α)~α变化相似[2]，但没有那么典型。

4.阔克沙勒--吉萨尔研究区的f(α)~α在乌恰大震前后几乎不发生变化，这是因研究区范围大，把局部地区的奇异性平均掉了。

2 结论与讨论

1.描述不均匀分形有两套语言，除f(α)~α之外还可用Dq~q曲线。为了反映分形谱维数在时间上的变化，图4展示了乌恰研究区不同q的Dq动态曲线。由图可以看到大地震发生前Dq的下降是比较普遍、明显的。这一点无疑为大震预报提供了信息。

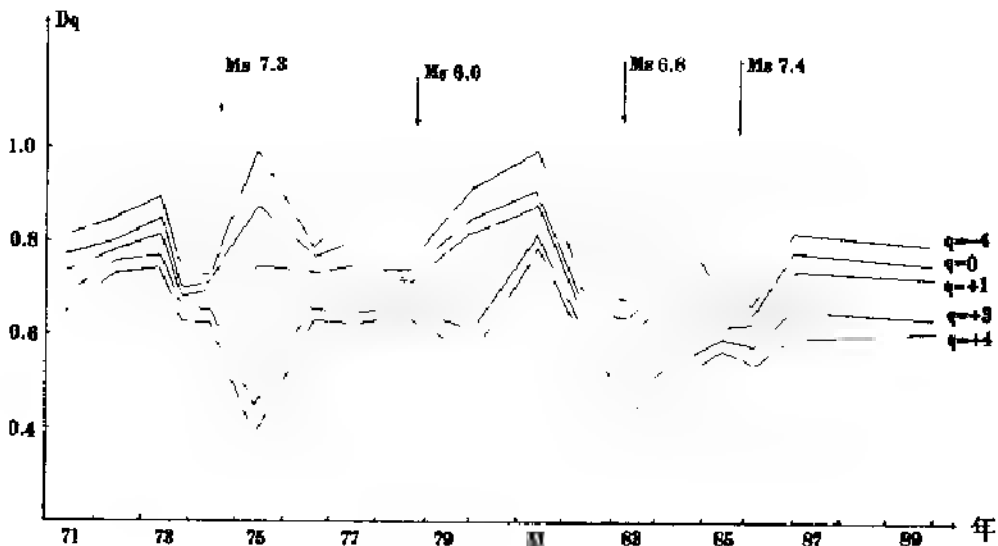


图4. 乌恰研究区Dq动态曲线

另外还可看到，Dq的变化并不总是同步的，有的相同，有的相反，可见用一个维数来刻划地震分形，特征是不够的.用标度指数谱f(α)表征地震分形是一种实用、简便、有效的方法，有可能成为发现大震前各种地震活动图象异常的普适性方法。

3.大震前f(α)左端点下降表示了地震分布密集异常增大了。

α是刻划具有一定概率的子区域的奇异性强度，α值的宽窄表明不同奇异强度分布的宽窄，如同谱分析中频率范围的宽窄一样，反映了分形体的均匀程度(或丰富程度)。对均匀分形来说，α仅为一个值。大震前α值变宽，说明地震分形体中包容了更多不同奇异强度的子分形体。换言之，地震分形集的不均匀程度增大了，即更复杂了，而复杂性的增加恰恰是具有普遍前兆意义的[3]。

4.f(α)计算中，概率$P = N_i/\sum N_i$。当$N_i=0$时，就不参与计算。这样只有有震时段分布的奇异特性在f(α)~α中才能反映出来，在实际震例中许多无震平静的特征没有得到反映。显然这是方法本身的局限性，需要进行一步研究。

参 考 文 献

[1] Tamas Viesex, Fractal Growth Phenomena, World Scientific, Singapore, 1989. 48 55

[2] 朱令人、周仕勇 地震多重分形标度指数谱f(α)的研究 西北地震学报 Vol.14 No.2 1992

[3] 陈 地震预报中几个科学问题的讨论 中国地震 Vol.4 No.2 1988

唐山1976年大地震震中分布多重分形维数谱的变化特征

汪秉宏
（中国科学技术大学非线性科学中心）

李东升　　郑兆必
（安徽省地震局）

地震震源分布的研究已经充分显示地震的空间分布具有自相似的分形结构。因此，对于地震活动性空间分布的分形特征变化的分析，有可能揭承出震中的前兆特征。为了刻划地震分布的精细结构，仅仅停留在震中分布纯粹几何性质的分析是不够的，还应该考察各个震域的震中出现概率。震中出现概率因地而异，反映了地震空间分布的分形结构的非均匀性。因此，地震震中分布，一般来说具有多重标度的分形特性。为了完整和敏感地揭示震中分布的分形特征的变化，就必须从地震数据计算其多乘分形的广义维数谱和奇异性谱。

1976年唐山大震造成的特大灾害，人们至今记忆犹新。对这次大震前后的地震资料的进一步分析是有必要的。我们采用推广的G-P法计算唐山震区1976年大震前后震中地面分布的广义维数谱D_q的变化。

设一个地区的地震事件总数为N，第i次地震事例对应于第i个震源点X_i，则以震源点X_i为中心，半径为r的圆形地区内发现另一震源点的概率为

$$(1/n)\sum_{j=1}^{N}\Theta\left(r-|X_i-X_j|\right) \tag{1}$$

其中$\Theta(X)$为Heaviside阶跃函数。由此可计算半径为r的圆内发生地震的q阶关联积分$C_q(r)$：

$$C_q(r)=\left\{(1/N)\sum_{i=1}^{N}\left[(1/N)\sum_{j=1}^{N}\Theta\left(r-|X_i-X_j|\right)\right]^{q-1}\right\}^{1/(q-1)} \tag{2}$$

于是，广义维数谱D_q可以通过q阶关联积分C_q算得

$$D_q=\lim_{r\to 0}\log C_q(r)/\log r \tag{3}$$

这种计算地震空间分布多重分形广义维数谱D_q的方法可以看作Grassberger-Procaccia通过关联积分$C_2(r)$计算关联维数D_2的方法的推广[1,2]，是固定质量法与固定半径法的统一，便于直接从地震记录的时间序列进行计算。[3]

我们根据国家地震局测震功关地震目录及磁盘数据，选取从1972-1979年期间唐山地区（38°—41° N，117°—120° E），震级$M_L>1.0$的全部震中数据点。把所有数据点分成三个时段：

第Ⅰ时段：1972年6月1日－1974年6月30日，为地震相对活动平静期；

第Ⅱ时段：1974年7月1日—1976年7月27日，为唐山大地震的孕震期；

第Ⅲ时段：1977年1月1日—1979年1月31日，为大震后的相对平静期。

三个时段的Dq值计算结果如表1所示。所得到的唐山震区震中分布的广义维数谱D_q-q曲线如图1所示。

计算结果表明，地震的空间分布的确是非均匀的，它们具有明显的多标度分形结构。第Ⅱ时段的D_q谱曲线与第Ⅰ，Ⅲ时段的D_q谱比较，在整体上是下降的。这表明从多乘分形观点考察所得到的唐山1976年大震的最主要的前兆特征仍然是整体降维。负q值的D_q在大震前后的差别尤为显著，$D_{-\infty}$从3跃升到6。这表明大震的孕震期中明显地加剧了地震空区的群集程度。这一计算结果也显示出地震空区分布的变化是地震前兆特征的一种更灵敏的反映。地震密集区群集程度的标度特性则由D_{∞}刻画。计算结果显示相对平静期（第Ⅰ时段）的$D_{\infty}\approx1.20$在大震前（第Ⅱ时段）降至$D_{\infty}\approx0.9$。这表明在唐山大震的孕震过程中，无论是稀发震空区还是多发震密区，都朝着更加群集的方向发展。图1所示的唐山震中分布广义维数谱D_q曲线随时间的变化提供了唐山大震震中空间分布的多乘分形模式的信息，显示出一种典型的强震前兆特征：多乘分形广义维数谱的整体下降。

参考文献

[1] Grassberger P and Procaccia I (1983) Phys. Rev Lett 50, 346
[2] Hao B L (1989) Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems, World Scientific
[3] 汪秉宏(1992)："地震时间序列的非线性分析"《非线性科学在地震预报中的应用》，地震出版社

表 1　唐山地区震中地面分布广义分维值 D_q 的计算结果

时段 \ D_q \ q		−5.0	−4.0	−3.0	−2.0	−1.0	0.0	1.10	2.0	3.0	5.0
Ⅰ	1972.6.1−1974.6.30			3.48	3.23	2.73	1.91	1.54	1.33	1.29	
Ⅱ	1974.7.1−1976.7.27			2.99	2.82	2.45	1.71	1.25	0.97	0.91	
Ⅲ	1977.1.1−1979.1.31	4.62	4.47	4.36	3.65	2.81	1.87	1.36	1.13	1.08	1.03

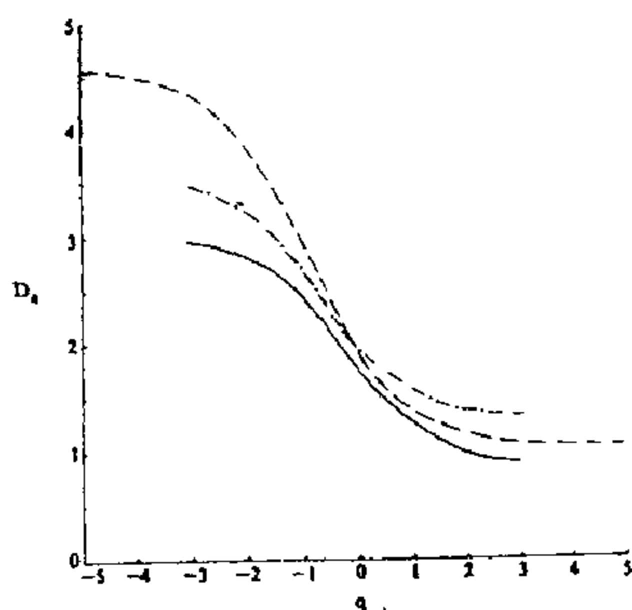


图　唐山地区震中空间分布广义分维谱的变化（广义 G–P 法）

点划线对应时段Ⅰ（1972.6.1−1974.6.30），实线段对应时段Ⅱ（1974.7.1−1976.7.27），

虚线段对应时段Ⅲ（1977.1.1−1977.1.31）

地震蕴震过程中地壳形变场的分形研究

周硕愚[1]　吴　云[1]　王若柏[2]　杨国华[2]

(1.国家地震局地震研究所,武汉,430071;
2.国家地震局第一形变监测中心,天津,300180)

摘　要　地震蕴震过程中的地壳形变场具有分形特性,分数维随时间而演变,强震发生在降维与减熵过程之后,震后维数与熵值恢复到正常基准,反映了地壳形变场由均匀变形 —— 不均匀变形 —失稳——均匀变形的过程。分数维、信息熵可作为地壳形变图象动力学参数使用。

一、岩石圈地壳形变结构的静态与动态分形

岩石圈具有层次结构,它由板块边界带一亚板块边界带 —— 断层 —— 裂纹 —— 微裂纹 —— 晶体界面等多层次的边界带嵌套不同尺度的块体组成,尺度范围为 $10^5 - 10^{-6}$公里;因此岩石圈中的地壳形变可能具有分形特征。地球科学家们研究过岩石圈地壳形变的两种分形,一种是岩石圈中断层系的分形,其分数维 D:1.01≤D≤1.60(Scholz 和 Aviles,1986;Taksyuki Hirata,1989;石耀霖,1990);另一种是天然岩石表面地形的分形,1≤D≤1.68(Brown 和 Scholz,1985)。它们反映了与时间无关的分形,或者说反映了作为地壳动力学过程结果的分形;可视为地壳形变结构的静态分形。

地震的蕴育与发生是一种岩石圈动力学过程,可将发震断层(震源区)及其周围相关的断层网络(近源区)视为一个具有多层次结构的非线性的蕴震动力学系统,在蕴震过程中系统内将产生出随时间而演化的地壳形变,呈现出一幅幅十分复杂的动态图象(周硕愚,1984,1988,1992)。需要研究和证实:1,这种动态的地壳变形是否也具有分形特征? 2,若具备分形特征其分数维是否随时间变化并可作为一种刻划蕴震系统动力学过程的参量来使用? 现已发表的文献中,尚无对此问题的实际研究。

二、地震蕴育过程中地壳形变场的分形

为验证上述设想,在以北京为中心的 3°×2°范围内(东经 114°30′—117°30′,北纬 39°00′—41°00′),以 1965—1991 二十六年间七期精密水准重复测量为基础,编制六幅随时间而演化的地壳垂直形变系列图(王若柏、杨国华,1991)。

这一套系列图表达了该区由三条 NNE 向断裂带(紫荆关、八宝山和夏垫断裂带)及一条基本与它们相垂直的贯穿此区的 NW 向断裂带(南口至宁河、渤海一线)交互作用所构成的断层块体网络系统垂直形变场廿六年间的实际演化过程。时空演化图象十分复杂,我们希望每一幅图用一个图象动力学参量定量描述:

信息熵　$$H(t)=I(t)=-\sum_{i=1}^{N(r)}P_i(t)\cdot\log P_i(t) \quad (1)$$

有序度　$$R(t)=1-H(t)/H_{max} \quad (2)$$

信息维　$$D_1(t)=\lim_{r\to 0}\frac{I(t)}{\log(1/r)} \quad (3)$$

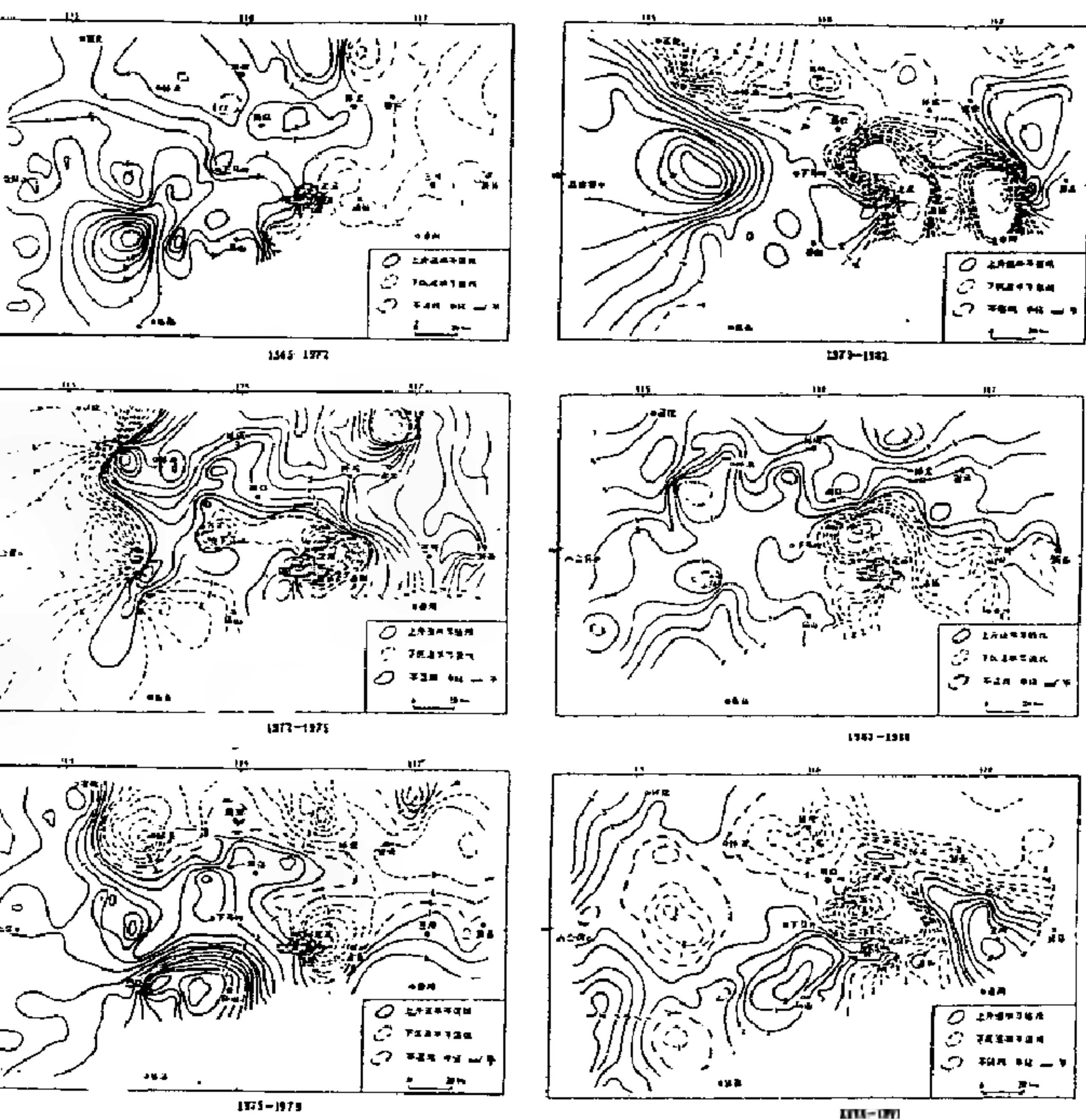


图1：首都圈地壳垂直形变场动态演化系列图(1965--1991)

将每幅等变线图划分为大小相等的 N 个量测单元，量测每个单元中的线条数并求出相应的概率 P_i（用频率代替，$P_i = n_i / \sum_{1}^{N} n_i$）。$r$ 是量测单元边长缩小的倍数。$N(r)$ 为量测单元数。H_{max} 为最大熵。

由(1)式可见，信息熵 $H(t)$ 反映了形变场空间分布的不均匀程度。当分布完全均匀时 $P_i = 1/N(r)$，则(1)式之值为最大：

$$H_{max} = \log N(r) \tag{4}$$

当变形极度不均匀，所有变形均集中于某一个单元内时，$H_{min} = 0$，可见信息熵 $H(t)$ 越小，则变形分布越不均匀，即形变局部化越强烈。

有序度 $R(t)$ 是 $H(t)$ 的归一化，反映了 $H(t)$ 对 H_{max} 的相对变化率。$0 \leqslant R(t) \leqslant 1$。归一化有利于在不同样本之间进行对比。

信息维 $D_1(t)$ 与信息熵 $H(t)$ 不同之处在于，前者考虑了量测单元的尺度变换。因此它不仅能刻划形变场空间分布的不均匀性，还揭示了形变场统计自相似特征，反映了其分形结构性质。

信息熵、有序度、信息维越大，表示变形局部化(不均匀化)程度越高；反之亦然。因此，$H(t)$、$R(t)$ 和 $D_1(t)$ 可作为变形局部化参量使用。用以跟踪与定量刻划形变场空间分布不均匀度和分形维数随时间的变化。

根据式(1)－(4)对图1中的每一幅图分别计算其图象动力学参量——信息维 $D_1(t)$、信息熵 $H(t)$ 和有序度 $R(t)$，计算结果列于表1和图3中。

经过多次尺度变换由六个时区分别中求得的信息维 $D_1(t)$，每个均具有良好的线性无标度区(见图2)；且 $D_1(t)$ 随时间变化的形态与由单一尺度(量测单元固定为 0.°5×0.°5)求得的信息熵 $H(t)$ 的形态十分相似(见表1与图3)，说明地震蕴育过程中的动态的地壳形变具有显著的统计自相似特性，和静态地壳形变一样也具分形特征。

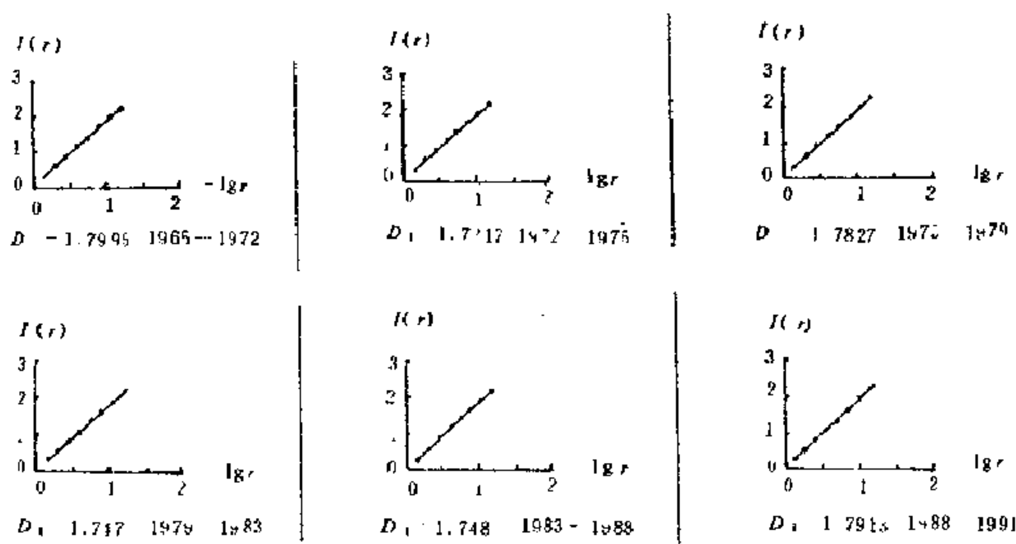


图2：首都圈垂直形变场系列图的分数维--信息维D1(t)

表1 首都圈地壳垂直形变场图象动力学参数

参数名称＼时区	1965—1972	1972—1975	1975—1979	1979—1983	1983—1988	1988—1991
信息维 $D_1(t)$	1.7995	1.7217	1.7827	1.7477	1.7481	1.7913
信息熵 $H(t)$ (bit)	4.1982	3.9382	4.2022	4.1334	4.1659	4.2752
有序度 $R(t)$	0.0442	0.1034	0.0433	0.0436	0.0381	0.0267

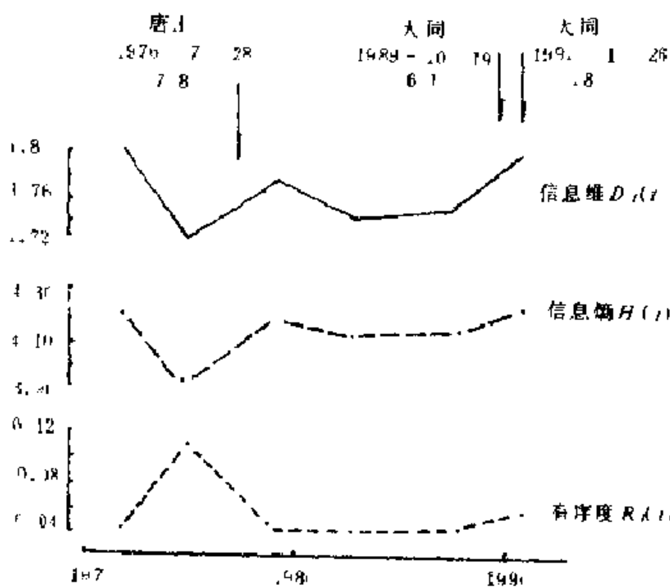


图3: 首都圈地壳垂直形变场图象动力学参量演化与地震关系

三、蕴震过程的地壳形变图象动力学参数——分数维、熵与有序度

以上对首都圈二十六年间(1965—1991)的地壳形变演化图象作了研究。在此时间域中恰好经历了地壳运动与地震活动的两个相对活跃段(1976年唐山7.8级地震前后;1989年大同6.1级、1991年大同5.8级地震前后)和它们之间的一个相对平静段。从表1与图3中可以看出,在唐山和大同强烈地震之前均出现了信息分数维 $D_1(t)$ 和信息熵 $H(t)$ 的下降以及有序度 $R(t)$ 的上升过程,强震发生在此过程终结并反向之后。

地震蕴育过程中的地壳形变具有分形特征,$1.72\leqslant D\leqslant 1.80$,其分数维随时间而变化。在强烈地震之前会出现地壳形变场的降维、减熵和有序化过程。它们反映了蕴震过程中地壳形变场时空分布由较均匀化向非均匀化(局部化)的演进。岩石断裂力学和实验启示我们,一个岩石系统的变形均匀化意味着柔性和处于较稳定状态;而变形局部化则意味着局部应变率增高,微裂隙在局部集中,有可能导致宏观破裂发生,即处于较不稳定状态。因此变形局部化可能是地震地壳形变中期前兆的一项基本特性。从复杂的时空图象中直接计算分数维、信息熵

和有序度，是定量描述和跟踪地壳变形局部化过程的有效途径。

地震蕴育过程中地壳形变场的分形特征表明，震前的变形局部化（不均匀分布）关系，不仅是震源区主破裂面对蕴震系统而言，也存在任一局部区域中。本研究区域东西长度约 330 公里，南北长度约 220 公里，区域的中心距唐山 7.8 级和大同 6.1 级地震的震中分别为 300 公里和 350 公里，整个区域位于此两次地震的震源区之外的“近源区”中。说明在强震蕴育过程中，在源外的近源区内也会出现可观测到的地壳形变局部化过程，表现了蕴震系统震源区和近源区的整体联系，这对地震监测预报是有利的。强震蕴育过程中近源区内会出现一些空间上彼此分散具有形变高梯度特征的“形变孤岛”、应变（应力）相对集中的“类似震源区”。它们也会在自己的周围激发出多种前兆异常现象，从而使前兆的分布范围远大于震源区的范围。强震发生之后，这些“变形孤岛”会自动解体，整个地壳形变场调整，重新趋于与正常继承性运动相应的准均匀化。分数维和信息熵将返回到本区域的基准值（本例中 $D_1(t)$ 和 $H(t)$ 的基准值大约是 1.80 和 4.20）。表现了地壳形变场在强震发生后仍要自动地回复到基准态（继承性构造运动平衡稳定态）的自组织特性。

信息量、信息熵和有序度可直接由复杂图象算出，具有明确的物理意义，可望作为地壳形变系统动力学（周硕愚，1989）和图象动力学（陈颙，1992）的参量来使用，具有现今地壳动力学和地震前兆标志意义。

参 考 文 献

[1]周硕愚，非线性理论在地震预报中的应用，地球物理学进展，7 1，36—44，1992

[2]吴云、龚凯虹，孕震前兆场图象演化的整体特征，地壳形变与地震，13 3，1993

[3]C. H. ，肖尔茨，B. B 曼德尔布罗特等著，刘根荫、皇甫岗等译，地球科学中的分形，中山科学技术出版社，1991

[4]陈颙，图象动力学，中国地球物理学会 1992 年年刊，地震出版社，1992

[5]D Schertzer and S. Lovejoy, Non -linear variability in Geophysics, scaling and Fractals, Kluwer Academic publishers, 1991

时间序列的空间相关分维与时间分维遍历问题*

王 文 均

（武汉电视大学）

摘要 本文定义相关维数 D_2 与相空间最小嵌入维数之比为空间相关分维，讨论了它与分数布朗运动的指数 H 的遍历问题.

关键词 空间相关分维，时间分维，遍历性

1. **引言** 混沌动力学中有两个重要问题，一 映射迭代过程对初条件的大样本分布怎样，二、映射迭代过程实现序列光滑函数的空间平均和时间平均的关系怎样？这两个问题已经有较为圆满的解答]。我们由已有的遍历理论，证实了时间序列空间相关分维和时间分维的遍历性 明确了 G－P 算法中的几个维数的确定原则，即最小嵌入维数应选取在 D_2+1 到 $2D_2+$ 间最满意的最小值。

2. **空间分维** 以往定义的动力系统的吸引子分维，都是在确定性映射情况下得出的。作为时间序列，系统又往往是确定性和随机性兼而有之。因此，我们对系统的 切动力学定义，仍保留和使用，只是将映射的确定性和随机性统 起来，至于系统的确定和随机程度，通过对时间序列的 Lyapunov 指数的测算我们可以得出认识[6]。时间序列的相关分维所度量的，则是动力系统由确定性向随机性演化的耗散速度[7]。

时间序列都可看作是微分动力系统生成的，而微分动力系统必定要定义在一个 m 维的相空间中，这里 m 是最小的，因为 m＋1 维相空间必会使系统状态自由度太宽松，导致吸引子维数 D_2 不便使吸引子张成空间图形，而 m 1 维相空间又会使吸引子出现线性相关，轨线交叉重迭。对于时间序列，这 维数即最小嵌入维数，它是十分重要的决定微(差)分方程个数的数量。

在此基础上，G－P 算法是计算时间序列的相关维数 D_2 和重构相空间维数 m 的重要武器。D_2 的计算过程说明，D_2 是相空间中状态变量之间相关距离发散的指数速度，是这 速度关于空间距离的总体平均的不变量。为比较不同系统的这 分维即指数发散速度，我们定义相关(相对)分维为 $W=D_2/m$，显然有 $0<W<1$。

具体计算时，我们点出 D m 图象，对 D 的水平方向的点先“掐头去尾”给出平均值(为稳健计)，得到 D 的良好估值。然后找使 D 接近水平时的 m，其至要考虑左边靠近的使

* 国家自然科学基金 49271020 资助项目

D 掉下去的那个点，如掉得不太厉害，则这时的 m 还得保留。否则，我们取不到真正的最小嵌入维数，使得时间序列建立的微(差)分方程模型多几个方程，增多了不必要的自由度。

3. **时间分维** 分数阶布朗运动是[4]提出的半随机模型，其时间序列的相关分维 H 由极差算法 R/S 分析给出。[7]证实在极限情况下，极差与自相关具有同等功效，许多文献也都说明了这一点。值得注意的是，极差满足关于时间滞后步长的标度律，即 $R_n/S_n \sim (Cn)^H$，因而 H 是时间序列自相关的时间分维。容易看出，R/S 分析计算出的 H，是关于时间步长充分大或时滞充分小情形的时间平均，或者说 H 是状态间关于时间相关的指数发散速度的平均值。

R/S 分析算法的具体处理可见[6]。由于我们是由时间序列数据对时间分维 H 作出估计，也会遇到一些不确定因素，时滞 n 不可取得太大，也不可取得太小。好在时间序列样本长度较大时，不同的 n 下估计出的 H 的统计稳定性也比较好。

4. **遍历问题** 由[1]给出的遍历定理，我们知道，混沌运动轨道的点集即时间序列实现，满足通常的遍历性，即对状态变量 x 的任一函数 G(x)，有时间平均等于空间平均：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G(x_i)=\int dx P(x)G(x)$$

这里 P(x)为 x 的分布密度函数。

由上述遍历性定理，很容易得出，前述时间序列的空间相关分维 $D_2/m=W(0\leqslant W<1)$，与时间序列的时间相关分维 $H(0\leqslant H<1)$是遍历的，即除开一个零测集同一时间序列的空间相关分维等于时间相关分维，用统计学的写法我们有 $H=W$(a.e.)进而混沌动力系统的时间序列实现也与分数阶布朗运动遍历。

实际上，D_2 维奇怪吸引子构成的分形集在 m 维相空间中的投影是一 Cantor 集，其维数为 $W=D_2/m$。这样，奇怪吸引子集正好是维数为 W 的 Cantor 集，与 m 维相空间的 $m-1$ 维流形的直积[5]，因此，奇怪吸引子的密度的维数 W，刚好是由奇怪吸引子的相关分维 D_2 与相空间维数 m 之商构成的。

我们定义了相关分维 D_2 为相关分形测度关于空间距离测度的对数测度导数[7]。因为混沌动力学认为 D_2 是相关轨道分离的指数速度，恰好物理上的指数速度与数学上的对数测度导数是对应的。熟知，分形集是几乎处处不存在切线的，只可能在零可测的孤立点集有导数存在，分维就可能是分形集在某个孤立点处的导数，并且这点处的导数存在的充要条件是：分形集在这点处关于空间距离的导数，与分形集在这点处关于时间步长的导数都存在，而且除开某个零测集外它们俩是相等的。由 W 与 H 的遍历性，我们可以很快看出，奇怪吸引子的一个重要特性是，它与分数阶布朗运动一样具有长程相关性。稳定定态解是最简单的吸引子，它的维数 $D_2=0$，因而其分形密度 $W=0$；纯随机解也是一种平庸的吸引子，其维数 $D_2=\frac{1}{2}m$，对应于 $H=\frac{1}{2}$的整数阶布朗运动；维数在 0 到$\frac{1}{2}m$ 之间的解为负效应吸引子，它对应于分数阶布朗运动的反持续性，即有负的自相关函数；维数在$\frac{1}{2}m$ 到 m

之间的解为正效应吸引子，它对应于分数阶布朗运动的正持续性，即有正的自相关函数。

自然界和动力系统中遇到的分形，几乎都是正持续性的，除开计算错误获得的分维以外，几乎只获得一些大于二密度的分维，很可能是因为我们通常所用的处理方法都只得到了凸分形集，因而很可能反持续性情形的分形集是凹分形集，当然，这一猜测还需要证实。

5. **数值结果** 我们计算了长江年径流序列的五个测站的数据和熟知的太阳黑子年序列数据及加拿大山猫年序列数据。这些数值结果验证了我们的结论。

上述计算结果，是长江水利委员会水文测验研究所叶敏工程师和陈显维工程师分别独立作出的。

序列名	D_2	m	W	H
屏　山	2 338	3	0.78	0.77
寸　滩	3.706	5	0.74	0.76
宜　昌	4.568	6	0.76	0 75
汉　口	5 025	7	0.72	0.72
大　通	5.702	8	0 71	0.69
太阳黑子	2.26	3	0.753	0.75
加拿大山猫	2.24	3	0.746	0 74

参 考 文 献

[1] Eckmann, J. —P. ,D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Reviews of Modern Physics, 57(3), 1985.

[2] Farmer, J. D. ,E. Ott, J. A. Yorke, The dimension of chaotic attractors, Physica 7D, 1983.

[3] Grassberger, P. ,I. Procaccia, On the characterization of strange attractors, Physica 9D, 1983.

[4] Mandelbrot,B. B. , J. W. Van Ness, Fractional Brownian motions, fractal noises and applications, SIAM Review 10,1969.

[5] 陈式刚，映象与混沌，国防工业出版社，1992.

[6] 王文均，叶敏，陈显维，长江经流时间序列混沌特性的定量分析，水科学进展，1993.

[7]王文均，测度导数，相关测度与长相关混沌正态过程，第二届国际非线性力学学术讨论会论文集，科学出版社，北京，1993.（英文）

不等间距地震序列的分维计算

陈子林
(国家地震局地震研究所,武汉,430071)

一、引言

普遍认为,地震是岩石破裂或断层错动的结果,而岩石圈中的破裂模式在很大的几何尺度范围内,均呈现出分形结构,同样地,地震发生的时间、空间与强度分布也存在着复杂的形式—分形,这些均已被揭示.

然而,地震事件的发生在时间轴上的分布是不等间隔的,在空间分布上也是不均匀的,对这种不等间距的地震时空分布序列的分维计算,以往是这样考虑的:

(1).将每个地震事件看成一个点,然后来讨论时间轴上地震分布(类似于一维康托集合)或空间中的地震分布结构.

(2) .将地震震级转换成能量或地震距等数据,然后分析以此组成的时间序列是否具有分形结构.

这里存在两个问题,在(1)的讨论中把不同震级的事件都当作一个点来处理,忽略了地震震级本身的分布结构;在(2)中又遇到一个在某些时间段或空间区域中缺震从而数据为零值的问题.为此,我们如何将地震的能量分布与地震的时空分布结合起来,以探讨地震活动性的时、空、强的分布结构呢?本文提出了一种对不等间距地震序列的时空强三维分布的分析方法,以全面地研究和分析地震发生的时间、空间和强度的复杂分布中的某种有序结构,以及地震发生在时间和空间上大循回.

二、计算方法

我们知道,一个地震序列一般给出了每个地震的发震时间、发震地点(经纬度)和震级(地震能量释放)三种参数,这样我们得到一个地震序列为:

$$\{t_i,\lambda_i,\varphi_i,Ms_i\} \qquad (i=1,2,...)$$

(其中,t 为发震时间,λ,φ 为震中经纬度,Ms 为里氏震级)

为分析地震活动的时间、空间和强度三维联合分布结构,采用的具体作法如下:

(1).为避免同一时刻、同一地点出现若干个地震的情况,将震级折合成总能量释放;同时为计算分析方便,再将其取对数.

(2).将以上序列再转化为:

$$(e_i,\Delta t_i,\Delta d_i) \qquad (i=1,2,3....)$$

其中 $e_i=\ln E_i,\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\Delta d_i=d_i-d_{i-1}$ (E 为由震级折合的总能量释放,Δt 为两次地震的发震时间差,Δd 为由两次地震的震中经纬度折合的球面弧度差)

(3)计算 D_0、D_1 或 D_q

取 $e_{max}=max(e_1,e_2,...)$， $\Delta T=max(\Delta t_1,\Delta t_2,...)$， $\Delta D=max(\Delta d_1,\Delta d_2,...)$，然后分别以 $e(0<e<e_{max})$，$\Delta t(0<\Delta t<\Delta T)$和 $\Delta d(0<\Delta d<\Delta D)$为三个坐标点图,则可得出震中的时空强三维联合分布图,用数盒子方法(固定质量法,固定半径法或推广的 G−P 方法等)即可求得地震活动的时间、空间和强度的三维联合分布维数 D_0、D_1 或 D_q:

$$D_q=\frac{1}{1-q}\lim_{r\to\infty}\frac{\sum p_i^q}{\ln r}$$

(4).同时以上序列也即:

$$(e_1,\Delta t_1,\Delta d_1 1,e_2,\Delta t_2,\Delta d_2 2,...)$$

此即形成一个等效的等间隔序列,用重建相空间的方法,取延迟时间为 τ,将该序列进行重建,即得到:

$$(e_i,\Delta t_i,\Delta d_i,e_{i+\tau},\Delta t_{i+\tau},\Delta d_{i+\tau},...,e_{i+(m-1)\tau},\Delta t_{i+(m-1)\tau},\Delta d_{i+(m-1)\tau})$$

求关联函数 C(r),即可从 lnC(r)−lnr 图的收敛值得到地震活动的时空强三维联合分布关联维数 D_2。这里 D_2 则为相空间重建后得到的三维分布维数。

对于具有震源深度 H 值的地震序列,我们还可以仿以上方法组成五维空间(即能量、时间、经度、纬度和震源深度)：

$$(e,\Delta t,\Delta\lambda,\Delta\varphi,\Delta h)$$

$$(其中\ 0<e<e_{max},0<\Delta t<\Delta T,0<\Delta\lambda<\Delta\Lambda,0<\Delta\varphi<\Delta\Phi,0<\Delta h<\Delta H)$$

并以此来计算 D_0,D_1,D_q,或重建相空间为:

$$(e_i,\Delta t_i,\Delta\lambda_i,\Delta\varphi_i,\Delta h_i,...,e_{i+(m-1)\tau},\Delta t_{i+(m-1)\tau},\Delta\lambda_{i+(m-1)\tau},\Delta\varphi_{i+(m-1)\tau},\Delta h_{i+(m-1)\tau})$$

以此来计算 D_2,这样我们就能更充分完整地探讨地震的时空强分布的复杂结构,这里的 e,t,和 λ,φ,H 正相当于物理学上气体分析中的 p,t,v ,因此它为为我们了解地震发生的规律(如时空循回,临界现象等)提供一个更全面的方法。

三、算例分析与结论

首先我们选取中国大陆 1950 年 1 月 1 日−1988 年 11 月 7 日 Ms>4.7 级地震(共 2951 个地震)进行分析,其三个侧面的二维吸引子图如图 1 所示(其中每个小圈代表一个地震)。

从图中我们得到其三维分布结构也具有复杂的分形结构，表明地震发生的时间、空间与强度之间不存在某种良好的规律性，而是落入一种分形的结构之中,从 D_0 与 D_1 图上分别拟合得到时空强三维分布的 $D_0=2.03,D_1=2.21$。

其次,我们利用中国大陆 1946 年 1 月 1 日到 1987 年 8 月 30 日的 Ms>4.0 级地震为例(共 7398 个震例)进行计算,根据马宗晋等的地震活动的期幕观点,这期间正好包含两个活跃阶段(1946 年−1957 年,出现 21 个大于 7 级地震,1966 年−1976 年,出现 22 个大于 7 级地震)和两个平静阶段(1958 年−1965 年,其中出现 8 个 7 级以上地震,1977 年−1987 年,其中出现 8 个 7 级以上地震),分别计算地震活动的三维分布的 D_0 及 D_1(如图 2 所示)。

从图与表中我们可看到:在两个地震活动阶段,其 D_0 与 D_1 均较小,且 $D_0>D_1$;而在两个地

震平静阶段,其 D_0 与 D_1 均较大,且 $D_0<D_1$,这初步反映了地震活动的时间循回的变化特征,且其 D 值本身的大小变化是否反映出地震的活动与平静时其时空强的不同结构,这些还有待于作进一步的深入研究。

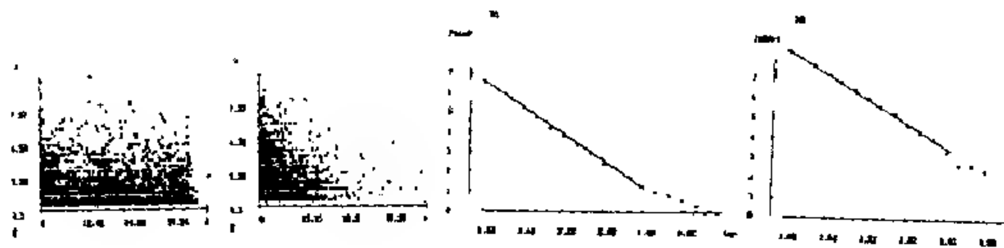
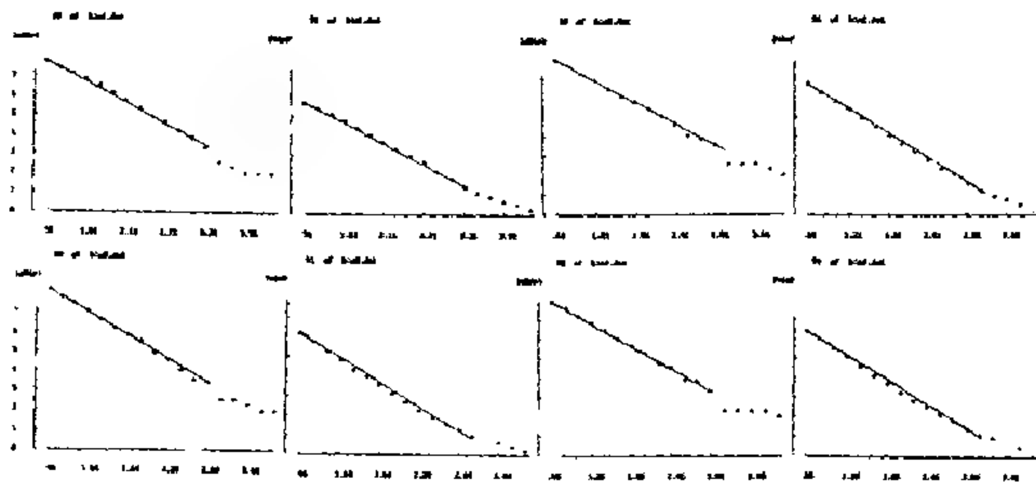


图 1 1950—1988 中国大陆 Ms≥4.7 地震活动的时空强分布的吸引子及 D_0,D_1



	1946—1957 (1291 个震例)	1958—1965 (1173 个震例)	1966—1976 (3067 个震例)	1977—1987 (1867 个震例)
D_0	1.83	1.87	2.06	1.92
D_1	1.81	2.14	2.04	2.08

图 2 四个地震活动阶段的 D_0 与 D_1 值

参考文献

1.陈颙等,非线性科学在地震预报中的应用,地震出版社,1992

2.马宗晋等,中国九大地震,地震出版社,1982

GP 法计算关联指数的误差分析[①]

吴 云 周硕愚 孙建中 施顺英

(国家地震局地震研究所，武汉 430071)

摘 要

根据关联指数的定义，推导了 GP 法计算关联指数时，观测数据误差与关联指数误差的关系，以及任意两个嵌入空间维上的关联指数之互差的表达式；提出了一种新的确定样本容量限的方法。

关键词：关联指数，GP 法，样本容量。

1. 引 言

P. Grassberger 与 I. Procaccia (1983) 在 Whitney 的"嵌入定理"和 Packard 重建相空间理论的基础上，提出了一种由时间序列数据求其动力系统吸引子的关联维的方法，通常称为"嵌入空间法"，也简称 GP 法。这一算法能从一个观测数据集中提取其动力学机制信息，因而受到地震工作者的重视，并得到实际应用。一个值得注意的问题是 GP 法对样本(数据集)的容量有一定的要求。J.P. Eckmann 与 D. Ruelle (1990) 指出，GP 法不会产生大于 $D_2 = 2\mathrm{Log}\, n / \mathrm{Log}\,(1/\rho)$，的维数，式中，n 是样本容量。在此前，L.A. Smith (1988)给出了在 5%的信度下，计算一个非空集的关联指数所要求样本容量的下限为 $N_{min} > 42^M$，式中 M 是不小于这个集的维数的最大整数。显然，M = 3 时，$N_{min} = 74{,}088$，而 M = 6 时，竟有 $N_{min} = 5{,}489{,}031{,}774$。朱照宣教授(1991)指出："Eckmann 的结果只能用来否定不正确的计算，Smith 的结果却有可能用来肯定正确的计算，因而是很重要的"。但是，要满足 Smith 的样本容量限存在两方面的困难：1. 在有限的时间进程内，难于取得如此大量的数据；2 即使有足够的数据，也由于计算量的迅速增加，而难于付诸实际。

在本文中，我们将从关联指数的定义出发，推导使用 GP 法计算时，关联指数误差与观测数据误差的定量关系和任意两个嵌入空间维上关联指数的互差；并给出新的样本容量限。

2. 关联指数的误差 σ_v

关联指数 v 的定义为

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Log}\,C(\varepsilon)}{\mathrm{Log}\,\varepsilon} \tag{2.1}$$

式中的 C(ε) 是关联积分，根据 GP 法

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^{M} \theta(\varepsilon - \|X_{i,j}\|) \tag{2.2}$$

式中

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$M = n - (m-1)p \tag{2.4}$$

θ(x)称为单位阶跃函数或 Heaviside 函数，M 是向量数，n 是时间序列样本的容量，m 是嵌

---

①地震科学联合基金(青年基金)资助项目

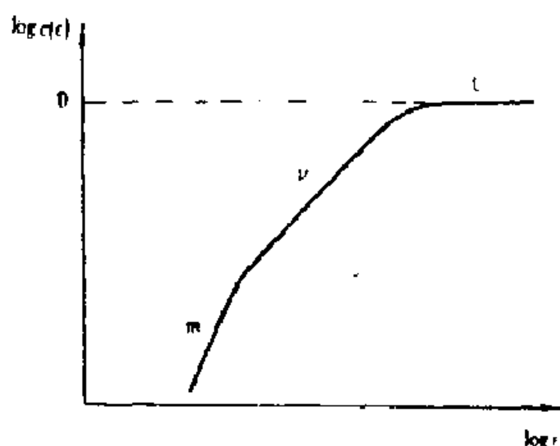


图 1. 计算关联维时的无标度区.

入空间的维数，p 是时间延迟数，$p=\tau/\Delta t$，Δt 是取样间隔，τ 是延迟时间，由最小互信息原理确定。在实际计算对象的关联指数时，是将 Log C(ε) 和 Log ε 标绘在双对数图上，其直线部分的斜率就是 ν。如果从这一点考虑，把观测尺度为 ε 时的关联指数定义为该点在 Log ε -Log C(ε)曲线上的斜率，那显然是自然的，这样就有下式

$$\nu(\varepsilon)=\frac{dLogC(\varepsilon)}{dLog\varepsilon} \tag{2.5}$$

只要 C(ε) 是平滑的函数，(2.5)式就任何时候都是正确的。求解(2.5)式，得

$$C(R)=C(r)exp(\int_r^R\frac{\nu(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon) \tag{2.6}$$

这一方程把任意两个尺度 R 和 r 的关联积分 C(R) 和 C(r) 同关联指数联系起来了。图 1 是关联指数计算的理想情况，我们就此理想情况来推导关联指数的误差以及互差。

设：R_0 和 r_0 是对象吸引子几何尺度的上限和下限，$[r, R]\in[r_0, R_0]$是无标度区，于是方程(2.6)就成为

$$C(R)=C(r_0)exp(\int_{r_0}^r\frac{m}{\varepsilon}d\varepsilon+\int_r^R\frac{\nu}{\varepsilon}d\varepsilon) \tag{2.7}$$

由关联积分(2.2)可知

$$C(R)\approx C(R_0)=1,\qquad C(r_0)=\frac{2}{M^2} \tag{2.8}$$

将(2.8)代入(2.7)，再两边取对数，顾及(2.4)式，得

$$Ln(\frac{n^2}{2})+2Ln(1-\frac{(m-1)p}{n})=\nu Ln(\frac{R}{r_0})+mLn(\frac{r_0}{r}) \tag{2.9}$$

其中，$0<\frac{(m-1)p}{n}<1$，$\frac{r}{r_0}>1$，$\frac{R}{r}>1$，将(2.9)式中有关项用级数展开，只取线性项，得

$$Ln(\frac{n^2}{2})-2\frac{(m-1)p}{n}=\nu(1-\rho_1)+m(1-\rho_2) \tag{2.10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\rho_1&=\frac{r(X,m)}{R(X,m)}\\ \rho_2&=\frac{r_0(X,m)}{r(X,m)}\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

并且

$$\rho=\rho_1\rho_2=\frac{r_0(X,m)}{R(X,m)} \tag{2.12}$$

式中 X 表示由 GP 法构建的 m 维向量。由(2.10)式解出

$$\nu=\frac{1}{1-\rho_1}[Ln(\frac{n^2}{2})-m(1-\rho_2)-2p\frac{m-1}{n}] \tag{2.13}$$

由(2.11)式和(2.13)式可知

$$\nu = \nu(\rho_1(X,m),\rho_2(X,m),m) \tag{2.14}$$

对于任一确定的 m，m≥2，应用全微分形式的不变性，得

$$d\nu = \frac{\partial \nu}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial \nu}{\partial \rho_2} d\rho_2 \tag{2.15}$$

顾及 ρ_1、ρ_2 不是独立变量，应用误差传播定理，得

$$\sigma_\nu^2 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial \rho_1}\right)^2 \sigma_{\rho_1}^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \rho_2}\right)^2 \sigma_{\rho_2}^2 + 2\frac{\partial \nu}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \rho_2} \sigma_{\rho_1} \sigma_{\rho_2} \tag{2.16}$$

由(2.11)，(2.12)和(2.13)式得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \nu}{\partial \rho_1} &= \frac{1}{1-\rho_1}\left(\nu - m\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \\
\frac{\partial \nu}{\partial \rho_2} &= \frac{1}{1-\rho_1}\left(m - \nu\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\
\sigma_{\rho_1}^2 &= \frac{2\sigma_x^2}{R^2}(1-\rho_1)^2 \\
\sigma_{\rho_2}^2 &= \frac{2\sigma_x^2}{r^2}(1-\rho_2)^2
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

其中 σ_x 是观测数据误差。将(2.17)式代入(2.16)式，得

$$\sigma_\nu^2 = \frac{2\sigma_x^2}{(1-\rho_1)^2}\left[\left(\nu - m\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{1-\rho_1}{R} + \left(m - \nu\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{1-\rho_2}{r}\right]^2 \tag{2.18}$$

于是

$$\sigma_\nu = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_x}{1-\rho_1}\left[\left(\nu - m\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{1-\rho_1}{R} + \left(m - \nu\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{1-\rho_2}{r}\right] \tag{2.19}$$

这就是观测数据误差 σ_x 所引起的关联指数误差 σ_ν。可以看出，这部分误差与样本容量 n 无关，但与嵌入空间维数 m 有关。因此，在不同的嵌入空间维上，关联指数误差是不相同的，换句话说，不同的嵌入空间维上，关联指数的精度是不同的。

3. 任意两个嵌入维上关联指数的互差 $\Delta\nu$

下面讨论任意两个嵌入维上关联指数的互差，并给出在给定互差条件下，应满足的样本容量限。由(2.13)式，得

$$\frac{d\nu}{dm} = \frac{1}{1-\rho_1}\left[\nu\frac{d\rho_1}{dm} + m\frac{d\rho_2}{dm} - (1-\rho_2) - \frac{2p}{n}\right] \tag{3.1}$$

由于 $m \in \{2,3,\ldots,m_{max}\}$取正整数，因此(3.1)式只有近似式

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta m} = \frac{1}{1-\rho_1}\left[\nu\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m} + m\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m} - (1-\rho_2) - \frac{2p}{n}\right] \tag{3.2}$$

于是

$$\Delta\nu = \frac{\Delta m}{1-\rho_1}\left[\nu\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m} + m\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m} - (1-\rho_2) - \frac{2p}{n}\right] \tag{3.3}$$

这就是任意两个嵌入维上关联指数互差的表达式。令：$\Delta m = 1$，这时的 $\Delta\nu$ 即为两个顺序相

连的嵌入维上关联指数之差，即

$$\left.\begin{aligned}\Delta v_1 &= v(3) - v(2)\\ \Delta v_2 &= v(4) - v(3)\\ &\cdots\cdots\\ \Delta v_i &= v(m_{max}) - v(m_{max}-1)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

一般情况下

$$\sum_{i=1}^{i} \Delta v_i = v(m_{max}) - v(2) \neq 0 \tag{3.5}$$

因此 Δv 是系统性的误差，它不可能被排除，而只可能被限制在一定的范围内。对于(3.2)式，一般情况下有，$\frac{\Delta \rho_1}{\Delta m} \geqslant 0$，$\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m} \leqslant 0$，那么，(3.2)式两边取绝对值

$$\left|\frac{\Delta v}{\Delta m}\right|(1-\rho_1) = \frac{2p}{n} + (1-\rho_2) + m\left|\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m}\right| - v\frac{\Delta \rho_1}{\Delta m} \tag{3.6}$$

于是

$$\left|\frac{\Delta v}{\Delta m}\right|(1-\rho_1) \leqslant \frac{2p}{n} + (1-\rho_2) + m\left|\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m}\right| \tag{3.7}$$

如果存在这样的 ε，使得下式成立

$$\varepsilon(1-\rho_1) = \frac{2p}{N} + (1-\rho_2) + m\left|\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m}\right| \tag{3.8}$$

那么

$$N = \frac{2p}{\varepsilon(1-\rho_1) - \left[(1-\rho_2) + m\left|\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m}\right|\right]} \tag{3.9}$$

当 n>N 时，则 $\Delta v \leqslant \varepsilon \Delta m$。但是，由(3.9)式知，要使 N 有意义，必须使

$$\varepsilon > \frac{m\left|\frac{\Delta \rho_2}{\Delta m}\right| + (1-\rho_2)}{1-\rho_1} \tag{3.10}$$

可见，ε 不能是任选的正数，这就是说，当观测数据受随机噪声影响严重时，无法事先选择一个 ε，来确定一个样本容量 N，使关联指数的互差被控制在某一确定的范围内。

如果不存在随机噪声的影响，即 $\rho_2=1$，$\Delta\rho_2/\Delta m=0$，那么(3.10)式就简化为

$$\varepsilon > 0 \tag{3.11}$$

这样，就可以预先任意选定一个正数 ε，求出

$$N = \frac{2p}{\varepsilon(1-\rho_1)} \tag{3.12}$$

当 n>N 时，必有$|\Delta v| \leqslant \varepsilon\Delta m$。这就达到了控制 Δv 的目的。令 $\varepsilon=E/\Delta m$，E 仍是任选正数，$\Delta m_m = m_{max}-d$，d 为大于对象真实维数的最小正数，相应地，$\Delta v_m = v(m_{max}) - v(d)$，于是

$$N_{min} = \frac{2p\Delta m_m}{E(1-\rho_1)} \tag{3.13}$$

当 $n>N_{min}$ 时，$|\Delta v_m| \leqslant E$。

我们把(3.13)式作为控制 Δv 的样本容量的下限。E 和 Δm_m 根据计算需要预先给定，ρ_1 也预先给定，一般情况下，ρ_1 在 0.001—0.5 之间变化。

4. 讨论与结论

先讨论一下关联指数误差 σ_v。(2.19)式是一般的情况，现在考虑两种极端情况：

1) 观测数据是随机噪声，这时，$r=R$，$\rho_1=1$，由(2.19)式知，$\sigma_v \to \infty$。实际上，不可能定量考察一个随机噪声的关联指数误差问题。

2) 观测数据无随机噪声影响，这时，$r=r_0$，$\rho_2=1$，由(2.19)式知，

$\sigma_v \approx \sqrt{2}\, m\sigma_x / r_0$。这时关联指数的误差主要取决于嵌入维 m。

下面再讨论控制关联指数的互差 Δv 问题，在第三节的分析中，我们知道，一般情况下，(3.8)式中的 ε 必须满足(3.10)式，因而不是任选的正数。(3.13)式是在假定无随机噪声作用的条件才成立。然而，客观实际中随机噪声的影响是无时无处不在的，为了近似满足假设的条件，一种变通的做法是在计算关联积分时，距离等份间隔不要取的太小，使双对数图上斜率为 m 的段不明显显示出来。应该指出，(3.13)的 N_{min} 是样本容量的下限，实际计算时样本容量 n 必需大于 N_{min}。假设：$p=2$，$\Delta m_m=10$，$\rho_1=0.5$，$E=0.01$，那么，由(3.13)式得 $N_{min}=8000$，如果使无标度区增大到 $\rho_1=0.01$，则 $N_{min}=4040$。这仍然是个不小的数，并随嵌入空间维增大而增加。如果降低对 Δv 的要求，则可大大减小 N_{min}。例如：令 $E=0.1$，其他条件不变，则当 $\rho=0.5$ 时，$N_{min}=800$；当 $\rho_1=0.01$ 时，$N_{min}=400$，再若 $p=1$，则 $N_{min}=200$。这样小于 10^3 量级的样本容量限在地震领域是可以得到满足的。

我们的结论是：对观测数据应进行随机噪声影响程度的检验；在肯定影响不显著的条件下，即小于数据的观测误差 σ_x，根据预先给定的互差限 E 和初步估计的无标度区的宽度 ρ_1，用(3.13)式来确定样本容量的下限 N_{min}，为了使计算结果靠近对象的真实的关联指数，应尽可能地增大嵌入空间维 m_{max}。看来要从观测数据中提取动力学机制信息，需要付出很高的代价。

感　谢

对于本文所讨论的有关问题，安镇文付研究员曾与作者多次进行富有建设性的讨论，并给予了学术上的指导，在此，我们表示衷心感谢。

参考文献

[1] 陈　　等，分形与混沌在地球科学中的应用，学术出版社，1989。

[2] Hao Bailin, ELEMENTARY SYMBOLIC DYNAMICS, World Scientific Publishing Co., 1989.

[3] 高安秀树著，沈步明等译，分维数，地震出版社，1989。

[4] J.P. Eckmann and D. Ruelle, Fundamental Limitation for Estimating (Preprint), 1990.

[5] L.A. Smith, Intrinsic Limits on Dimension Calculations, Phys. Lett. A, 6, 133, 283-288, 1988.

[6] 洪时中，洪时明，地震分形研究中应注意的几个问题，地震，No. 2，1992.

[7] Andrew M. Fraser and Harry L. Swinney, Independent Coordinates for Sttractors from Mutual Information, Phys. Rev. A, Vol.33, No.2, Feb. 1986.

分维测算中“无标度区”的客观判定与检验

洪时中（成都市地震局 610015）

洪时明（成都科技大学 610065）

一、引言

在研究自然界中实际分形的时候，首先必须判断所研究的对象是否确实是分形，它是否存在“无标度区”[1]（scaling range）；其次要确定“无标度区”的范围；然后才能测算出该范围内的分维值。然而，对于实际的自然现象而言，一方面，究竟应当如何判断它是否真正是分形（即是否真的存在“无标度区”），似乎至今仍然缺乏一种公认的客观判定标准和判定方法；另一方面，在很多情况下所测算的分维值高度依赖于所选取的“无标度区”的范围，往往只要所选的“无标度区”略有变化，求出的分维值就可能出现比较显著的差异。因此，如何客观地、准确地确定“无标度区”，就成了分形的应用研究中不可回避的关键问题之一。

我们认为，一种好的判定“无标度区”的方法，应当具备以下条件：

1、客观，不因人而异；

2、统计意义明确，能给出置信水平；

3、能有效地区别统计分形与非分形；

4、适用面广，实用性强。

据此，我们对已有的方法进行了评述，并探索出了一种符合上述条件的新方法。

二、现有方法的评述

仅据笔者所知，国内外学者在判定与选取“无标度区”时，所采用的方法大致有以下几种：

1、人工判定法

即用肉眼在双对数坐标图上确定一段线性关系最好的区间为“无标度区”，再用最小二乘法计算其斜率，从而求出分维值。在“无标度区”很宽，该区内线性关系很好的情况下，人工判定还问题不大。如果情况不那么简单，采用这种方法就会因人而异，缺乏客观标准，显然不好。

2、相关系数检验法

即对双对数坐标系上所有可能的点的组合都进行相关系数检验，取其置信度最高（α值最小）或在一定置信度下线性范围最宽的一段为“无标度区”。事实证明，这种检验太宽松，尤其是对系统性弯曲的鉴别能力很差。某些根本不具备自相似性的图象（例如完全随机的点事件在时间轴的分布——Poisson 分布）居然也能在较高的置信度下通过检验。所以，这种检验实际已流于形式，无法鉴别一种图象是否真正是分形，因而是不适用的。

3、强化系数法[2]

为了避免相关系数检验法失之过松的问题，可以引入强化系数 m（在 α=0.05 时，通常取 m=6），将检验标准提高。即将线性回归中回归系数 b 的 t 检验标准

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-2) \qquad (1)$$

改为

$$|t| > m t_{\alpha/2}(n-2) \qquad (2)$$

这种方法比相关系数检验法有很大改进，具有一定的实用性，在许多情况下可以取得较好的效果，成功地解决了一些实际问题。但是，它本质上仍然是一种经验性的方法，当检验的标准人为地提高了以后，它无法给出[illegible]的置信水平 α；同时检验标准的提高是不平等的，

r因及 f−n ？越大，其r，的α越小（标准越严格）。同时，这一方法对系统弯曲图象的鉴别能力仍不够高，在Poisson分布那种根本不具有自相似性的图象中，居然也能找出相当宽的一段"无标度区"，这显然不合理的。

4、拟合误差法

设回归拟合后的剩余标准差为s，对双对数坐标系上所有可能的土点的组合都计算出s，取既能通过相关系数r检验又最小的一段为"无标度区"，这种方法可称之为（最小）拟合误差法。

其实，s不仅与相关系数r有关，也与因变量y的均方差有关，单凭s的大小未必能选择到最为合适的"无标度区"。实践证明，这种方法选定的往往是点数较少（宽度较窄）、斜率最缓的一段，而且由于相关系数检验过于宽松，它同样无法区别Poisson分布一类的完全随机图形。

5、分维值误差法

在用双对数坐标上的线性回归计算分维值D时，D的中误差

$$\triangle D = S_b = s/\sqrt{l_{xx}} = \sqrt{\frac{(1-r^2)}{n-2}} \cdot \frac{b}{r} \qquad (3)$$

对于所有可能的点的组合都计算出△D，取既能通过相关系数检验而△D又最小的一段为"无标度区"，这种方法可称之为（最小）分维值误差法。

由（3）式即可看出，△D不仅与相关系数r有关，而且与拟合直线的斜率b（即分维值D）有关，在r、n等条件不变的前提下，它选出的总是斜率最缓的一段，加之它同样无法区别Poisson分布一类的图形，因而也不理想。

6、总体拟合法[3]

对双对数坐标图上所有的点作m段直线的拟合，找出总逼近误差（总拟合误差）最小的方案，除去两端的饱和区外，即可找出一段或几段"无标度区"。这种方法相当严格，统计意义明确，有一套行之有效的递推算法，也有一定的实用性，曾被用来成功地解决过一些实际问题。但是，它要求图象中每一个点必须属于某一段"无标度区"或饱和区，不允许任何过渡点或中介点的存在，而实际资料往往并非如此，过渡点是经常出现的。因此这种方法仍然有局限性。

由此看来，现有的方法都不同程度地存在缺陷，不能完全达到前述的要求，有必要探索一种上更好的方法。

三、新的客观确定分形"无标度区"的方法——自相似比法

我们认为，上述各种方法都是建立在双对数坐标系上的，由于对数函数的压缩特性，削弱了"无标度区"与其它区间的差别，如果去掉对数，还原为自相似图象的"自相似比"，可能会有助于这一问题的解决。同时，应当引入"统计诊断"的思想，对实际数据进行检验。

在这种思路下，我们提出了一种新的客观确定分形"无标度区"的方法——"自相似比法"[4]。最近，我们又对它作了进一步的推广。现将推广后的该方法简述如下：

设第i次的标度为ε_i（它可以是盒子的尺度或距离r，也可以是"质量"m），相应的测度为Y（ε_i）（在数盒子法时Y（ε）为N（ε）或exp［I_q（ε）］，在固定半径法时Y（ε）为M（ε）[7]，在固定质量法时为R（ε）[9,10]，在G—P法与推广G—P法时为C_q（ε）等等，构成图象的基元（unit）的维数为du，图象所在背景空间的维数为ds，同时，设标度每次扩大A倍，即

$$A = \varepsilon_{i}/\varepsilon \qquad (4)$$

注意：A_i 不再局限为常数，每一次的 A_i 可以不尽相同，这是一个重要的推广。定义标准化的（计算为 ε 每次扩大倍数均为 2 时的）自相似比

$$R = \begin{cases} \frac{y(\varepsilon_{i+1})}{y(\varepsilon_i)} \cdot \left(\frac{2}{A}\right)^{d_n}, & (y(\varepsilon_{i+1}) \geq y(\varepsilon_i) \text{ 时}) \\ \frac{y(\varepsilon_{i+1})}{y(\varepsilon_i)} \cdot \left(\frac{2}{A}\right)^{d_s}, & (y(\varepsilon_{i+1}) < y(\varepsilon_i) \text{ 时}) \end{cases} \quad (5)$$

且 $R_n = 2^{d_n}$，$R_s = 2^{d_s}$

显然，在“无标度区”内的 Ri 应当比较一致，且与 R_n、R_s 均有显著性差异。为此，需对两个饱和段之间的 Ri 所有可能的组合方式作以下两种统计检验：

检验 I　设 $\bar{R}$ 为连续的 n 个 Ri 的均值，S_R 为其样本的均方差，令：

$$R - R = \min\{|\bar{R} - R_n|,\ |\bar{R} - R_s|\}$$

初始假设 H_0：$R = R_n$ 或 $R = R_s$

求　$t_I = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\bar{R} - R}{S_R}$　　(6)

给定显著性水平 α，若 $t_I \geq t_\alpha$，则否定 H_0，认为该段的 R 与 R_n、R_s 均有显著性差异，我们称为“通过了检验 I”。

检验 II　设 R_i 的一阶差分 $\triangle R_i = R_i - R_{i-1}$，并设 $\triangle\bar{R}$ 为连续的 n 个 $\triangle R_i$ 的均值，$S_{\triangle R}$ 为其样本的方差。

初始假设 H_0：$\triangle R = 0$

求　$t_{II} = \sqrt{n-1} \cdot \frac{|\triangle\bar{R}|}{S_{\triangle R}}$　　(7)

给定显著性水平 α，若 $t_{II} < t_\alpha$，则没有理由否定 H_0，该段的△R 与 0 没有显著性差异，我们称为“通过了检验 II”。换句话说，在这种情况下可以认为该段的 R 是“平”的，不存在显著的系统倾斜。

在实际操作时，取 α＝0.01，α＝0.20，先作检验 I，再作检验 II，先取能同时通过上述两种检验而 n 又最大者为最佳区间。若 n 最大的区段不止一个，则取 t_I 最大者为最佳区间。

设这样选出的区间为 $[\varepsilon i_1, \varepsilon i_2]$，则“无标度区”$[\varepsilon i_1, \varepsilon i_2]$，再在该“无标度区”内用最小二乘法算分维 D 即可。

这一方法统计意义明确、简便、客观、适用性广，求出的“无标度区”范围合理，而且能成功地区别统计分形与完全随机的图象（如 Poisson 分布），是一种比较理想的方法。我们曾成功地用它来研究人造金刚烧结体[5]和地震序列，还可望得到更广泛的应用。

参　考　文　献

[1] 郝伯林，分形与分维，科学杂志，38 卷，1 期，1985 年。

[2] 谢和平等编译，分形几何 —— 数学基础与应用，重庆大学出版社，1991 年。

[3] 罗朝盛等，识别无标度区的算法及其在油气勘探中的应用，中国科协首届青年学术年会四川卫星会议论文集，成都科技大学出版社，1992 年。

[4] 洪时中、洪时明，一种客观确定分形“无标度区”的方法 —— “自相似比法”，大自然探索，1993 年 2 期。

[5] 洪时明等，金刚石烧结体截面图象的分形与合成压力的关系，成都科技大学学报，1993 年 2 期。

地震能量分布的自仿射分形特点及其物理机制的初步讨论

张晓东　　马文静

（青海省地震局）

通过对地震序列资料的处理，提出了地震能量分布是自仿射分形的，其自仿射分维数有两个DE_1、DE_2。两段直线（斜率为DE_1和DE_2）的交界点对应的震级或能量有其特殊的含义，它对应地球断层的平均尺度，此种现象在地震尾波持续时间上和岩石实验中也存在。从统计数据中看到DE_1同DE_2并不是独立的，存在着简单的相关关系，其关系为$DE_1 \times DE_2=1.0$，此关系的内在含义和其交界点的物理机制对研究地震成因以及地震预报都有一定的参考价值。它对重新认识G-R公式有一定的指导作用。

关键词　地震能量　自仿射分形　相变

一、引　言

目前地震学界已开始对地震的时、空、强分维及其多分维进行研究。普遍认为地震是分形的，并且具有多重分形特征，其中也包括对断层以及岩石实验中的破裂分布的研究。本文基于近年来人们对小震级地震的认识，计算时充分应用能记录到小震级地震，发现某一震级地震的总能量W同这一震级的能量尺度e-1/E存在自仿射分形特点。存在两段维数DE_1、DE_2。一般情况下$DE_1 \times DE_2$为一普适常数，对于完整的地震序列其特点更加明显。

关于对小震级地震的认识，简单的论述如下：

自从1944年Gutenberg Richter发现了地震频度与震级之间存在对数关系

$$\log N=a-bM \tag{1}$$

以后的几十年中地震学家们一直没有间断对(1)式的研究，特别是对b值的研究更是日益深入，文献[1 5]可以说明这种情况。李全林等在文献[1]中特别提到了G-R公式统计中小震级一侧的“低头”问题，并认为此现象不一定是因为漏记而引起的。在讨论b值物理含义时大体可分为三种基本的观点，即：(1)、认为b值的大小只同应力有关；(2)、认为b值的大小只同岩石的几何条件有关，如不同尺度的断层等；(3)、认为b值的大小同应力和岩石的几何条件都有关。特别是1991年文献[6、7]中明确提出小地震的偏少并不是由于漏记的观点，并认为震级 频度关系的客观分布暗示着介质破裂过程中一种更深刻的统计规律，与震级 频度分布的峰值对应的震级或破裂尺度或许同介质的宏观统计平均状态有关。

二、能量分布的现象论述

为了保证统计的可靠性，基本上选取了大样本的地震序列。样本特征如表1：

表1　　地震序列样本特征表

序列号	序列名称	样本量(地震频次)	备注
1	共和余震序列	3755	独立序列
2	唐山余震序列	20000	独立序列
3	门源余震序列	752	独立序列
4	青海70.1—92.1序列	3995	非独立序列

计算每个序列每一级地震(以0.1级为计算间隔)释放的地震波总能量W'：

$$\log E=4.8+1.5M$$

$$W'=nE=n\times10^{4.8}\times10^{1.5M}\quad(\text{焦耳})$$

M为震级，n为每一级地震的总次数。设$W=W'/10^{4.8}=n\times10^{1.5M}$，将logW和M画在直角坐标系下，上述序列计算结果见图1.1—1.4和表2。从图中可以明显看出来，logW—M曲线是两条斜率不同直线，两条直线的交点对应的震级是M_0，$M<M_0$时的斜率大于$M>M_0$时的斜率。

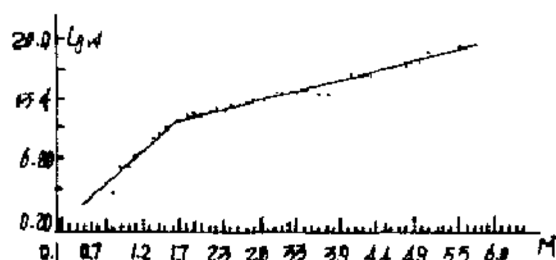


图1.1　共和余震序列logW—M曲线

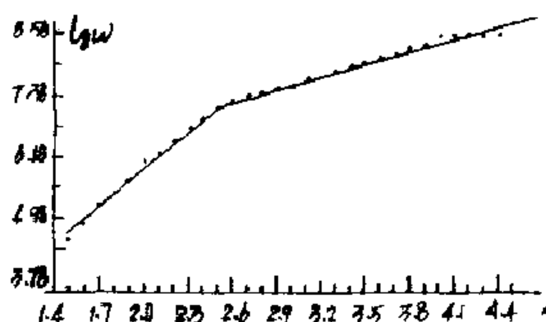


图1.2　唐山余震序列logW—M曲线

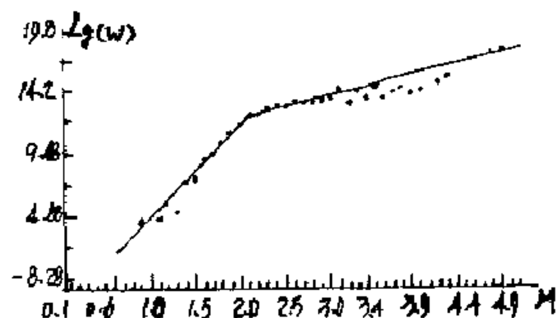


图1.3　门源余震序列logW—M曲线

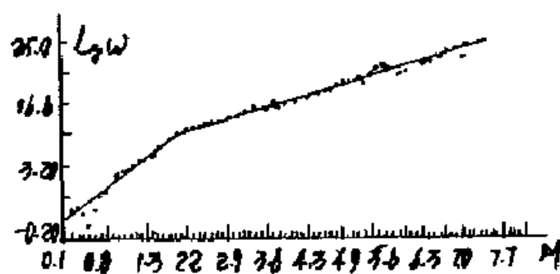


图1.4　青海70.1—92.1地震序列logW—M曲线

表2 中列出了图1.1－1.4的各段斜率，以及两段斜率的乘积。为了增加统计中的稳定性和可靠性，对能量进行了累加处理，设$U(M_j)=\sum_{i=j} W(M_i)$将logU-M画在直角坐标系中，结果表明统计的稳定性和可靠性得到了改善

表2 微分方法计算结果

序列名称	第Ⅰ段斜率 (k_1)	第Ⅱ段斜率 (k_2)	$K_1 \times K_2$	特征震级(两段交界点对应的震级)
共和余震序列	2.90	0.80	2.32	1.7
唐山余震序列	2.62	0.87	2.28	2.5
门源余震序列	3.20	0.73	2.34	2.1
青海70.1 92.1	2.27	1.00	2.27	2.1

从上述曲线所描述的现象来看，logW－M图中两段线性直线的分布是客观的，并不是由于漏记下引起的。就拿唐山余震序列和共和余震序列来说二者的特征震级分别为2.5 和1.7，但測震精度基本上都达到1.0级以上地震不漏记。M-M_0的线性段可对应于G R 关系，所以要充分认识M M_0线性段的意义以及它所隐含的物理机制。

三、能量分布的分析推导

1、震级频度关系及自仿射分形维数的推导

图1.1－1.4中所示的线性直线，可表示成下式：

$$\log W=\alpha+\beta M$$

当$M\leqslant M_0$时

$$\log W=\alpha_1+\beta_1 M \tag{2}$$

当$M\geqslant M_0$时

$$\log W=\alpha_2+\beta_2 M \tag{3}$$

取$M=M_0$，有

$$\alpha_1+\beta_1 M_0=\alpha_2+\beta_2 M_0 \tag{4}$$

$$\because \quad W=n\cdot 10^{1.5M} \tag{5}$$

∴ (2)式、(3)式可变成

$$\log n=\alpha_1+\beta_1 M-1.5M \quad (M\leqslant M_0) \tag{6}$$

$$\log n=\alpha_2+\beta_2 M-1.5M \quad (M\geqslant M_0) \tag{7}$$

对照G-R公式从(7)式得

$$b=1.5-\beta_2 \tag{8}$$

由(6)式知$M\leqslant M_0$是正指数分布，设其斜率为b'则，

$$b'=\beta_1-1.5 \tag{9}$$

(6)、(7)两式可以表示成

$$n=A\cdot 10^{b'M} \qquad (M\leqslant M_0) \qquad (10)$$

$$n=B\times 10^{-bM} \qquad (M\geqslant M_0) \qquad (11)$$

因此$M\leqslant M_0$时频次n服从正指数分布，$M\geqslant M_0$时频次n 服从负指数分布，而不是文献[7]中所述的对数正态分布。对数正态分布在$M\geqslant M_0$时破坏了G R关系

2、自仿射分形特点

能量的自仿射分形的分布，可以从下述推导中得出：

当$M\leqslant M_0$时 $\log W=\alpha_1+\beta_1 M$

$\because \log E=4.8+1.5M \qquad \therefore M=2/3(\log E-4.8)$

$\therefore \log W=\alpha_1+2/3\beta_1(\log E-4.8)$

$\therefore W\propto E^{2/3\beta_1}$

取单位能量ε为尺度，则$\varepsilon=1/E \qquad W\propto\varepsilon^{-2/3\beta_1}=\varepsilon^{-DE_1}$ (12)

同理，当$M\geqslant M_0$时可以推导出 $W\propto\varepsilon^{-2/3\beta_2}=\varepsilon^{-DE_2}$ (13)

$\because \beta_1\neq\beta_2$，$\therefore DE_1\neq DE_2$，因此(12)、(13)式表示的是一种自仿射分形状态。也可以认为在$M=M_0$时状态发生突变(发生了相变)

$$DE_1=(2/3)\beta_1 \qquad (14)$$

$$DE_2=(2/3)\beta_2 \qquad (15)$$

四、可能的物理机制

一般情况下M_0在1.0～3.0之间，在文献[6]中称特征震级 而且对应的破裂尺度大致为

$$0.08\leqslant L\leqslant 0.72\ (公里) \qquad (M=2.1\log L+3.3) \qquad (16)$$

在文献[8]中列出了一些地球上的尺度范围，见表3 和图2.1。岩石圈由块体组成，块体间发生相互运动，块体由相当其大小的边界区分割，每个块体内部又包括许多更的块体，是一层状结构。1.0-3.0级地震的破裂尺度对应表3中断层尺寸的下限

表3

边界区	边界区所分割的块体大小(KM)
断层带	$10^{3}\sim10^{2}$
断　层	$10^{1}\sim10^{-2}$
裂　纹	$10^{-2}\sim10^{-5}$
微裂纹	$10^{-5}\sim10^{-7}$
晶体界面	10^{-8}

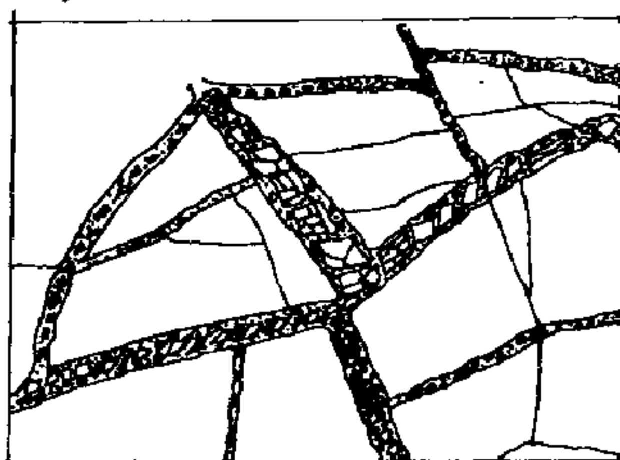


图4.1 岩石圈的层次结构

地壳中体波速一般为7.75Km/s，振动周期大体在0.1～10s之间。对于地方震周期小于3S大于0.1S，其波长λ≥0.775km，同L的上界十分一致（L≤0.72km）。当地壳块体的尺寸同其相当时，波就会发生衍射现象等。因此可以认为波长尺度是波传播性质的一个临界点，似乎也是波的波动性和粒子性的一个分界线。在计算持续时间同震级的关系时，一般情况下Log τ－M图可拟合成两段不同斜率的线性直线，交点处对应的震级同前文所述的特征震级M_0一致。青海1986年08月26日门源6.4级地震前交点处对应的震级是2.1级同特征震级非常一致。

M_0是否同背景应力有关，通过对比岩石实验可能有所启示。雷兴林、马瑾[10]发现粗晶花岗岩声发射分布具有自仿射分形（文中称多分形）特征，两条线性直线交点，对应岩石的平均颗粒粒度（尺度）Rc=5mm，在大于Rc尺度内的分维D_l和小于Rc尺度内的分维Ds各自具有不同的动态变化关系，并指出Ds、D_l的大小表示各自尺度内应力场的非均匀变化。而应力场的非均匀变化同岩石的粒度、微裂纹的分布、加载方式、边界条件等都有关系。可以认为平均颗粒尺度是岩石实验中的一个临界尺度。从表4中可以看出Rc=5mm=5.0×10^{-3}m，是裂纹的上界，它分割的块体大小在10^{-3}m的尺度。断层是孕育地震的场所，它分割的块体尺寸在10^1～10^{-2}km之间，可见这一层次的平均块体尺寸在10^1-10^{-2}Km，也正是M_0（特征震级）对应的尺度，也是体波波长λ=0.775～22.25Km对应的尺度，因此M_0对应的尺度或能量是一个临界尺度，它同样反应各自尺度内应力场的非均匀变化，因此M_0同应力场大小以及介质的几何条件都有关系。

五、一个可能的普适常数之讨论

从表2.3中可知，一般情况下logW－M两段直线斜率K_1、K_2的乘积大体为一个常数，目前尚不清楚控制此常数的内在机制，下面是对此普适常的一种解释，含有假设在内。

由(5)式、(10)式取对数得 当M≤M_0时

$$\log n=(b'/(1.5+b'))\log W+(1.5/(1.5+b'))\log A$$

设 $\eta=b'/(1.5+b')$

$$\therefore \log n=\eta\log W+(1-\eta)\log A$$

$$\therefore n=W^{\eta}\cdot A^{1-\eta}$$

当$M=M_0$时，$n=n_0$，$W=W_0$

$$\therefore n_0=W_0^{\eta}\cdot A^{1-\eta}$$

$$A^{1-\eta}=n_0/W_0^{\eta}$$

$$\therefore n=n_0(W/W_0)^{\eta} \quad (17)$$

同理，由(5)、(11)式取对数可得 当M≥M_0时

$$n=n_0(W/W_0)^{-\xi} \quad (18)$$

这里$\xi=b/(1.5-b)$，(17)式两边取对数，

$$\log n=\log n_0+\eta(\log W-\log W_0)$$

$$\because W=nE,\ E=10^{4.8+1.5M},\ W_0=n_0E_0,\ E_0=10^{4.8+1.5M_0}$$

∴ 上式可化为

$$(1-\eta)\log n=(1-\eta)\log n_0+1.5\eta(M-M_0)$$

$$\therefore \log n=\log n_0+(1.5\eta/(1-\eta))(M-M_0) \quad (19)$$

$$\log W=\log(nE)=\log n+4.8+1.5M$$

$$\therefore \lg \bar{n} = (\lg n_0 + 1.5\eta/(1-\eta))M_0 + 1.5/(1-\eta)M \quad (20)$$

同理，$M \geq M_0$时可推出

$$\lg n = \lg n_0 - 1.5\zeta/(1+\zeta)(M-M_0) \quad (21)$$

$$\lg \bar{N} = (\lg n_0 + (1.5\zeta/(1+\zeta))M_0) - (1.5/(1+\zeta))M \quad (22)$$

在分析、研究、计算中我们发现η和ζ不是独立的，它们之间存在以下关系

$$\eta = \zeta/(1+\zeta) \quad (23)$$

表4是4个序列的计算结果

表4

序列名称	实际η值	实际ζ值	由ζ推出η值 ($\eta=\zeta/(1+\zeta)$)	$DE_1 \cdot DE_2$
共和余震序列	0.483	0.877	0.467	1.0??
?山余震序列	0.427	0.724	0.420	1.013
门源余震序列	0.513	1.056	0.513	1.040
青海70年1月—92年1月	0.335	0.?	0.333	1.009

如果(23)式成立则可推出一些有趣的结果，(19)式可写成

$$\lg n = \lg n_0 - 1.5\zeta(M-M_0) \quad (24)$$

(21)式可写成

$$\lg n = \lg n_0 - 1.5\eta(M-M_0) \quad (25)$$

$$\because \eta = b'/(1.5+b'),\ \zeta = b/(1.5-b) \text{ 代入(23)式可得}$$

$$(1-b)(1+b') = 1.5 \quad (26)$$

由(8)式、(9)式和(26)式得

$$1/(1.5-\beta_2) = 1/(\beta_1-1.5) - 1/1.5$$

化简得：$\beta_1 \cdot \beta_2 - 1.5^2$ (27)

将(14)、(15)式代入(27)式得：

$$DE_1 \cdot DE_2 = 1.0 \quad (28)$$

这一结果十分有意义，它反映了自仿射分形两段维数之间的相互作用关系，它比G-R关系有更深刻的内含，也反应出平均块体(断层)尺度内外应力场的非均匀作用是相互关联的。表4列出了4个序列的$DE_1 \cdot DE_2$值的实际计算结果

可见$DE_1 \cdot DE_2$十分接近于1.0，可以认为$DE_1 \cdot DE_2$是一个普适常数，可能是地震能量按震级分布的一个控制参数

一般情况下，研究者都认为G-R关系中的b值全球统计为1，这也是大样本的统计结果。当b=1.0时，由(26)式得b'=3.0，再由(8)、(9)两式得$\beta_1=4.5$，$\beta_2=0.5$代入(14)、(15)式得：

DE₂ . . . (29)

29)式的结果是理想状态的统计结果

六 小结与讨论

本文提出在考虑低震级的情况下，地震的能量分布具有自仿射分形的特点，这一特征并不是因为漏记小地震而引起的。由前述特征推导出了比较客观的震级频度关系，它即没有破坏和高震级段 M > Mo 时的 G-R 关系，也完全可导出震级频度的客观分布。此种分布的物理机制中的四可能性 能够孕育地震的平均最小构造块体尺度界限，类似于平均颗粒尺度 应力场的非均匀程度，因应力场在块体间和块体内部的性质是不一样的。由于平均块体尺度对应的断层尺度同地震波的波长尺度相当，波的性质也会有质的变化，因此尾波持续时间等也有明显的变化。地震能量分布的两个自仿射分形维数是相关的即 DE₁、DE₂，它包含着十分丰富的内容，其价值也是很大的。

如果小地震的定位精度进一步提高，在计算地震活动的空间维数时，可能也会出现类似的自仿射分形特征，交界点对应的尺度同上述的尺度应该一致。

致 谢

在本文的工作中曾同秦保燕老师、夏玉胜同志讨论过一些问题，在此表示感谢。

参考文献

[1]李全林等，地震频度—震级关系的时空扫描，地震出版社，1979

[2]方兴等，岩石裂纹扩展过程中声发射b值的模拟实验，中国地震，Vol.3，No.3，1987

[3]吴小平，b值物理机制的再探讨，西北地震学报，Vol.12，NO.2，1990

[4]刘祖荫等译，地球科学中的分形研究，中国科学技术出版社，1991，P107—P116

[5]程德利、张裕中，b值的数值模拟，地震学报，1986.12

[6]孙文福、郦洁鼎，震级频度的客观分布及计算b值的要点，东北地震研究，Vol.7，No.

[7]郦洁鼎、孙文福，地震活动的自组织和演化，地球物理学报，Vol.35，NO.1，Jan.1992

[8]陈颙等，分形与混沌在地球科学中的应用，学术期刊出版，1989.6，P59—P84

[9]刘特培，山东台网持续时间在测定震级中的应用，地震地磁观测与研究，Vol. ，No.4

[10]潘人林、马瑾，三轴压缩下细晶花岗岩声发射空间分布及其分形特征，地震地质，Vol.13，No.3，Jan.，91

曼德布罗特景观和赫斯特现象

——分形理论引发的地理学革命①

艾南山

（四川大学物理系，成都，610064）

Richardson 发现欧洲相邻两国对其共同边界的长度量测结果大有径庭，Hurst 对尼罗河多年水量变化计算发现与传统水文统计的偏离，这些人文自然地理现象引发了 Mandelbrot 的分形理论的诞生。无怪分形理论的第一篇论文就是"英国的海岸线有多长?"，而第一本分形专著的法文本，在其被修改增订作为英文出版时，曼氏改为《大自然的分形几何学》。然而当这门学科已建立，在自身理论完善和在其他学科的应用方面获得长足发展之时，分形理论对大多数地理学家仍是陌生的。因而从地理学的角度，分析诞生于大自然和人类社会土壤中的新学科对研究自然和人文的地理学有什么作用，可能对分形学和地理学两方面的学者都不会是无意义的。

一、地表形态的分形特征

Mandelbrot 的分形理论，十分关注对大自然形态的描述。用分形函数人为"创造"出的自然形态，被称之为曼德布罗特景观。英文景观"landscape"一词来自德文 Landschaft，但两者的意义已有相当差异。作为学术名词，德文的景观指"地理综合体"，而在英文中，它几乎成了 landform 的同义词。曼德布罗特景观显然用的是英文含义。地貌学研究地表形态及其演化，而曼德布罗特景观描绘起伏的地表形态，它们研究的内容是相近的。这给地理学家第一个启示是：地貌形态及其演化，是可以用分形理论来研究。我们称之为分形地貌学[1]。对分形地貌学，流水地貌的分形研究可能成为一个启动点，它们的分形特征和自相似的演化，可能为地貌学的研究带来新的方法和引出新的理论[2]。

地貌现象是十分复杂的，用经典的几何学去描述它则过分简单化：山峰成了圆锥体、海岸变为圆弧形。但用分形函数"创造"出来的自然形态却十分逼真。人造地貌可由并不复杂的分形函数创造出来，这给地理学家又一个启示：尽管自然地貌千姿百态，但构成它们的函数并不需要十分复杂。它表明地貌形成的机理也是简单的。这与地理学家的传统观念十分吻合：地貌是内外营力相互作用的产物，在人类出现以后，人类活动对地表形态的影响逐渐增加，但它仍是通过对内外营力的作用来实施自己的影响。地貌动力学的研究，或许将为迄今为止分形理论在动力学机制上研究的不足带来一些新的推动。

曼德布罗特景观给地理学家的第三个启示是：地表形态是分形体，离开了它的分维值孤立地谈论诸如长度、面积等等，是没有意义的。其实早于 Richardson，在 1954 年 Steinhaus 就

① 国家自然科学基金资助项目

发现对 V.stula 河、随着测量的标度减小，该河被量出的长度比教科书上的长度 10 倍、100 倍、甚至 1000 倍地增加。这一发现被英国城市地理学家 Batty 称为"斯坦豪斯之谜"。但过去地理学家对这类现象都一律归之为测量误差。在实际运用上，为了使国家面积、边界长度、大江大湖等重大国土资源数据不致五花八门，限定由授权单位公布。因此国土数据的正确性有赖于它们的权威性。Mandelbrot 的研究，已揭示了这些数据不可能准确测量的实质，如果地理学家能够掌握分形理论这一普通结论，那么不时爆发出的许多"地理新闻"就会自然绝迹[3]。

二、Joseph 和 Noah 效应

Hurst 虽是牛津 Hertford 学院的物理学博士，但使他成名的却是他六十余年在埃及对尼罗河的水文测量工作。可以说他实在是一位地理学家。长期经验使他发现，尼罗河流域的干旱不是传统的水文统计所设想那样是一种随机现象。而是干旱越久，就越可能持续干旱。这一发现的意义被 Mandelbrot 充分肯定，并称之为赫斯特现象。

曼氏等还对赫斯特现象作了理论证明，确认他所创立的"自相似"模型可以应用于水文现象的研究。他借用《圣经》对大洪水和古埃及干旱的描述，将水文过程两种特有现象称为诺亚效应和约瑟效应。诺亚效应意味着不连续性，即极端的降水可能确实是非常极端的；约瑟效应意味着持续性，即强弱降水的时间可能持续得相当长。曼氏等还证明约瑟效应就是赫斯特现象的表现，而诺亚效应却不是解释赫斯特现象所必需的。他们的进一步研究还表明，诸如降水、温度、树木年轮、冰川纹泥以及地震频率、太阳黑子、曲流的流向等一系列地球物现象，都符合赫斯特现象[6]。

水文统计的假设是，如时间尺度无限长，每个观测值将是独立的或短程相关的，满足 Gauss 分布和 Markov 预测。独立意味着前一年若发生大降水，对继后一年无后效应；而短程相关则意味着这种后效应只能保持有限的几年。赫斯特发现，一个时间序列的极差 R（τ）和均方差 S（τ）之比，$R/S \propto (\frac{\tau}{2})^H$，H 被称为赫斯特指数，在 Gauss－Markov 过程中，H＝1/2，而在水文记录中 H 大于 1/2 而小于 1。H 与一个关联函数

$$C(t)=\frac{<\Delta(-t)\Delta(t)>}{<\Delta(t)^2>}=2^{2H-1}-1$$

有关。式中＜·＞表示求平均，△x(t)是未来的增量，△x(－t)是过去的增量。关联函数C(t)反映未来的状态与过去历史的相关特性。当 H＝1/2 时，C(t)＝0，意味着未来与过去无关或短程相关，符合 Gauss－Markov 假设，H＞1/2 时，C(t)＞0，意味着未来的趋势与过去一致，即该过程具有持久性；H＜1/2 时，C(t)＜0，意味着未来的趋势与过去正好相反，即该过程具有反持久性。根据有关资料，汇总一些自然现象的分维见表 1

表 1　自然现象的赫斯特指数和分维（资料由李后强教授提供）

自然现象	时间范围（年）	H 值的实际范围	平均 H	平均分维①
河湖水位	10～176	0.50～0.94	0.72	1.28
降　水	24～211	0.46～0.91	0.68	1.32
冰川纹泥	50～2000	0.50～0.95	0.74	1.26
温　度	29～60	0.46～0.92	0.68	1.32
气　压	29～96	0.51～0.76	0.63	1.37
太阳黑子	38～190	0.65～0.93	0.75	1.25
年　轮	50～900	0.56～0.94	0.79	1.21
海洋波高	20（天）～1 年	0.52～0.92	0.87	1.13

①盒子维数　$D_B=2-H$

为什么包括水文现象的许多自然现象都符合赫斯特现象，而且许多的分维值又接近Koch曲线的分维（=1.26），至今仍是未解之谜。但它反映出的这些自然现象具有长程相关性，却使由赫斯特现象建立起的R/S分析方法，将成为地理学的时间序列分析中一种重要的非线性科学方法[6]。

在地貌形态空间特征上，总的景观特征和局部微形态的特征是有层次上的差别，其间存在一个过渡带。日本学者引入一个类似赫斯特指数的标度指数H'，若H'=1，那么地貌是自相似的。实际地貌体是自仿射的，0<H'<1。若总的景观特征相似，局部微形态起伏越大，H'值就越小，如劣地地貌即是；若微形态相似，总的景观起伏越大，H'就越大，如火山和高山地貌即是[7]。

赫斯特现象给地理学家的启示是：地理过程一般不满足Gauss-Markov假设，即不是完全随机的布朗运动；而是如曼氏所称的分式布朗运动，具有长程相关性。这给传统的概率和统计学巨大的冲击，使地理学研究演化过程的地学统计学的理论基础发生了动摇。过去地理学家对自然过程按照随机现象去认识，其结论的可靠性不高，部分原因可能就在这里。如对干旱的预测若忽视了约瑟效应，必将低估干旱的持续性。

三、结　语

地理学和几何学在古代几乎都是研究地表的，Geography是地表的描述，Geometry是地表的测量。后来几何学发展成为数学学科，与"地"的现实越来越远。经典几何学研究的曲线和曲面都是光滑的、满足可微性。用它们来描绘现实的大自然，就显得那么乏力。Mandelbrot的《大自然的分形几何学》全书开始就是曼氏的一句名言："云彩不是球面，山峰也不是圆锥，而闪电并不沿直线传播"[8]。这使人们感到几何学又回到地球上来了。分形理论必将为研究地表现象空间分布和时间演化的地理学提供新的有力工具，由于它对传统数学的革命性，它被引入地理学，肯定会引发一场深刻的革命。

参考文献

1. 李后强，艾南山：分形地貌学及地貌发育的分形模型。自然杂志，15(7)：516－519. 1992

2. 高鹏、李后强、艾南山：流域地貌的分形研究。地球科学进展，8(5)，1993（待刊）

3. 艾南山，李后强：从曼德布罗特景观到分形地貌学。地理学与国土研究，9(1)：13－17. 1993

4. Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R.: Noah, Joseph, and operational hydrology. Water Resour Res. 4(5): 909－918. 1968

5. Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R.: Some long-run properties of geophysical records Water Resour. Res. 5(2): 321-340. 1969

6. 艾南山，李后强：第四纪研究的非线性科学方法。第四纪研究，(2)：109－120，1993

7. Ouch, S., Matsushita, M.: Measurement of self-affinity on surfaces as a trial application of fractal geometry to landform analysis, Geomorph。5: 115－130. 1992

8. Mandelbrot, B. B.: The Fractal Geometry of Nature。W. H. Freemar & Co. 1982

地理过程中弹性系数的分形研究*

陈嵘[1]　　刘斌[2]

四　大学物理系、[2]人口所，成都，610064）

人类活动对自然地理过程的影响越来越受到人们的普遍关注。徐建华、艾南山于1988年提出一种定量分析地理过程中人类活动影响程度的数学模型[1]。该模型原理简明、操作方便，但弹性系数的确定尚是有待深入研究的问题[2]，本文讨论弹性系数的分维意义，给出新的计算方法，并运用于两个实例——水土流失和人口问题。

1. 弹性系数与多分维[3]

有人类活动参与的地理过程可一般表达为如下响应形式：

$$y=Mf(x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n) \tag{1}$$

式中，M表示该过程中人类活动的强度，x1，x2，…代表一组自然投入要素，y代表输出。由（1）式可得：

$$\frac{dy}{y}=\frac{dM}{M}+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{dx_i}{x_i}, \quad \sigma_i=\frac{\partial y}{\partial x_i}\times\frac{x_i}{y} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots n) \tag{2}$$

σ_i 称第i种输入要素对输出y的输出弹性系数。只要根据实际资料定出 σ_i，就可以由（2）式求得人类活动相对增长率dM/M。这样，人类活动对输出y变化的贡献率就是m=（dM/M）/（dy/y）。

由（2）式弹性系数可定义为

$$\sigma=\left|\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}\right|=\frac{d\ln y}{d\ln x} \tag{3}$$

分维的微分定义式D（r）=dlnN（r）/dln（1/r）具有与（3）式相同的形式，可见弹性系数σ有分维的含义。另一方面，地理系统具有多分形结构，将其分成若干组份i，相应的标度为 ε_i（例如输入x作为标度），在此区域内的某种性质（该段输入x上"度量"出的输出y）为 p_i，则有标度关系

$$p_i \propto \varepsilon_i^{\alpha_i} \text{或} \alpha_i=\frac{d\ln p_i(\varepsilon_i)}{d\ln\varepsilon_i} \tag{4}$$

α_i 为多分形奇异指数，于是得到σ与 α_i 的等价关系，说明σ刻画了用输入x作尺度去"度量"输出y时所表现出的某种不规则性量度，即给出复杂程度的描述。在具有相近奇异指数（x充分小领域）的范围内，这种关系近似为 $y=Ax^{\alpha}$ 这样的幂形式，较之线性近似是一大提高。

我们知道，多分维Dq与奇异指数有如下关系

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}[(q-1)Dq]=Dq+(q-1)\frac{dDq}{dq} \tag{5}$$

若（5）式满足q=1或dDq/dq=0这两个条件，则奇异指数α（q）=Dq或σ=Dq。q=1时，弹性系数σ就是Renyi信息维。在一般的多分维谱中，q大于一定的数值，Dq随q的变化十分

---

* 国家自然科学基金资助项目

平缓，可近似认为$\sigma=D_q$。这样，比较（3），（5）两式，可得$\ln x=q$，$\ln y=(q-1)D_q$，于是

$$\sigma=D_q=\frac{\ln y}{\ln x-1} \tag{6}$$

2. 水土流失过程人类活动分析

水土流失量p与高度梯度dH/dL成比例，设$p\propto|dH/dL|^{\eta}$，当$\eta=1$时，可用2维DLA模型来近似，这样就给定水土流失过程的机制，σ只是x的函数。若取分形集团本身的豪氏维数$D_0=5/3$，则在$q\geq1$时有$D_q=2/3+(q+2)^{-1}$。我们用此值近似σ，进而分析甘肃境内黄河流域的祖厉河、渭河、泾河（分杨家坪、雨落坪两站所控制的）四个主要子流域从50年代至80年代期间水土流失过程中人类活动情况。此时，降水量H作为输入x，相应的输出y就为流量G，输沙量Y又是流量G的输出。弹性系数就有两个，H对G的σ_G，G对Y的σ_Y。观测数据引自[1]。计算结果见表1。

表1. 四流域弹性系数与人类活动效益计算

流域	时段	产流弹性系数 σ_G	产流弹性系数 平均值	产沙弹性系数 σ_Y	产沙弹性系数 平均值	产流增长率 $\frac{\Delta M_1}{M}$（%）	减水效益 M_G（%）	产沙增长率 $\frac{\Delta M_2}{M_2}$（%）	减沙效益 M_Y（%）
祖厉河	1955－1969	0.9448	0.9599	0.7935	0.7929	－25.3	87.41	－8.79	23.63
	1970－1985	0.9749		0.7933					
渭河	1955－1969	0.8335	0.8370	0.7884	0.7887	－18.40	86.00	－6.29	25.98
	1970－1985	0.8405		0.7890					
泾河（杨家坪）	1955－1969	0.8515	0.8560	0.7865	0.7869	－17.18	78.44	－2.55	11.99
	1970－1985	0.8604		0.7873					
泾河（雨落坪）	1955－1969	0.8797	0.8817	0.7883	0.7885	－4.13	67.68	－16.22	75.11
	1970－1985	0.8826		0.7886					

从表1中看出，人类活动对这四个流域的减水效益是非常显著的，几乎都在80%以上，主要原因在于这期间流域内兴修了大量水利工程，从而使水量明显减少。远远超过降水减少的作用。另一方面，减沙效益却不及减水效益。泾河（杨家坪）最低，仅11.99%，这与其含沙量增加有关，但输沙量减少，故减沙效益还是存在的。由于四流域中泾河（雨落坪）流量变化最小，但含沙量和输沙量减少却不低，故而减沙效益高达75.11%。以上说明计算结果与实际情况基本吻合。但同时也给予我们这样的启迪，在大力建设发电、灌溉等水利设施的同时也应加强防护林系等水保工程的建设，力争进一步提高减沙效益。就弹性系数σ而言，我们还看到随着流量的减小，σ更趋近于1。如果分维等于1，输入与输出间为线性关系，因此，结果同时表明：流域越小，系统相对简单，“响应”越快。

3. 计划生育政策对生育影响的评价

选用反映生育水平的已婚妇女生育指数I_g作为人口系统的输出，影响生育水平的已婚女

比指数 I_m 和平均初婚年龄指数 I_L（某年平均初婚年龄 L 与所选定的基准年份平均初婚年龄 L_0 的比值）则被视为输入。由（2）式微分差分化后得

$$\frac{\Delta I_g}{I_g}=\frac{\Delta p}{p}+\beta\frac{\Delta I_m}{I_m}+\gamma\frac{\Delta I_L}{I_L} \quad (7)$$

p 表示计划生育政策的影响，弹性系数 $\beta=\ln I_g/(\ln I_m-1)$，$\gamma=-\ln I_g/(\ln I_L-1)$，取负号是因为平均初婚年龄的延后抑制生育水平的提高。我们计算了 1964 年以来的一些情况（见表 2）。

表 2　计生政策作用效益评价计算结果

年　代	I_g*	I_m*	L（岁）**	β	γ	政策贡献率* m（%）	贡献值 m・△Ig
1964	0.60	0.83	19.55				
						38.23	0.015
1970	0.56	0.78	20.19	0.43	−0.51		
						70.00	0.084
1974	0.44	0.73	21.38	0.46	−0.58		
						59.76	0.066
1981	0.33	0.68	22.82	0.63	−0.83		
1987	0.32	0.69	22.16	0.80	−1.11	248.84	0.025

资料来源：＊宋瑞来，载《中国人口科学》1992 年第 5 期。＊＊《中国人口统计年鉴》（1989）。

表 2 结果表明，八十年代以来，计生政策对生育水平控制的贡献率 m 高达 248.84%，而且七十年代的 m 值也很高，说明计划生育工作的开展对我国的妇女平均生育指数的降低起着决定性的意义。但是，表 2 中贡献值 m・$\triangle I_g$ 告诉我们，计生政策对控制人口的绝对增长在刚开始推行时效果十分明显，以后逐渐减弱（由七十年代前期的 0.084 降到八十年代的 0.025），这是现今中国人口学上一个有待解决的突出问题，我们用非线性时序分析法也得到类似结论[4]。另外，对相同时期的弹性系数有 $|\beta|<|\gamma|$，由此根据弹性系数的分维含义可以知道，已婚妇女生育指数 I_g 与平均初婚年龄指数 I_L 之间的关系要比 I_g 与 I_m"复杂"，即 I_L 与 I_m 经过相同的递增，对输出 I_g 的影响前者为大。反映如下意义：平均初婚年龄的延后对降低已婚妇女生育指数所起的作用较控制已妇女比指数更有效。

除这些例子外，弹性系数的分维内涵还可用于其他的地理系统，体现了输出相对输入的不规则性和复杂性。但是，计算方法不只限于（6）式，可视具体情况将其转换成分维的计算，从而将地理系统的描述引入更为广阔的非线性天地。

感谢艾南山、李后强教授指导。

参考文献

[1] 徐建华、艾南山："水土流失过程的人类活动分析"，《水土保持学报》，2（4），1988。
[2] 樊胜岳、徐建华："水土流失和沙漠化系统中人文作用定量分析的通用数学模型初探"，《地理科学》，12（4），1992。
[3] 黄登仕、李后强："分形维数与经济弹性"，《数量经济技术经济研究》，（12），1989。
[4] 陈峰、王敏、艾南山、李后强："中国人口发展的 R/s 分析"，《中国人口科学》，（4），1992。

再生产过程的分形特征及其对经济波动的反映

张本祥　　牛　健
（黑龙江省社会科学院科研处）

本文以一个非线性迭代方程为基本方程，来考察再生产过程中"产值"、"增长率"、"价格"这些量的时间序列的分形特征。发现在一定条件下，这些序列存在无标度区，并且，无标度区的位置、大小及关联维D都具有一定的经济学意义，即可作为反映经济波动特征的一种指标。

一、基本方程及其分形特征

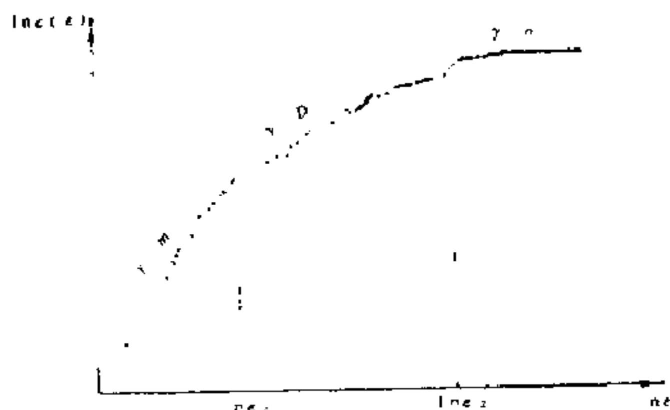
对于基本方程的说明，是为了表明这个模型是完全能够在一定程度上反映实际经济系统的，是有明确的经济意义的。

本文所用方程是二阶非线性迭代方程 $X_{n+1}=RX_n(1-X_n/M)$。R与M是方程的两个参数，X_n 代表第n次生产过程的产值，X_{n+1}代表下一个生产过程的产值，n取整数0、1、2……，此方程在n取较大值时可模拟再生产过程的某些长期行为。

R为线性条件下 X_{n+1} 与 X_n 的比例系数，反映经济实体本身的特征，如劳动生产率、积累率和发展后劲等，它的数值为单位 X_n 对应的 X_{n+1}的大小，无量纲，称为"再生产系数"。R大于一定数值时，方程将表现出混沌特征。为使经济学意义更明确，R可表示为投入产出比r和积累率C的乘积：R＝rC。

M在方程中与R共同决定了非线性项的系数，反映经济实体与外界相互作用的特征，与X具有相同的量纲，受市场经济发展程度、与经济有关的社会意识形态、政治、军事等经济系统外部诸多因素的综合影响，各种因素的变化会以一定方式改变M的数值，这里把M称为"有效市场"。

另外，R与M在一定程度上相关。例如R的因子之一C增大，即积累率提高，消费比重降低，则最后会使有效市场M变小；有效市场M变小，如原材料、能源、交通运输等紧张和市场饱和等，则会使经济发展程度受到制约，R值也就相应地变小。



当参数R、M处于一定范围时，方程经倍周期分叉进入混沌状态，这时对时间序列{X_n}进行相空间重构，寻找无标度区间，并计算关联维D，由于大家都熟悉对时间序列的处理方法，这里就不详述相空间重构及关联维计算过程，只作出其图形，如左图

$[\ln\varepsilon_1, \ln\varepsilon_2]$段的斜率 r=D 是对关联维的很好的逼近,无标度区的存在说明基本方程所代表的再生产过程确实具有分形特征。

除产值外,经济学中还有很多数量化的参数,适于以类似的方法来研究,下面就选取常见的增长率和价格这两个参数来简单地加以考察。

二、增长率{P_n}及价格{J_n}序列的分形特征

以基本方程:$X_{n+1}=RX_n(1-X_n/M)$ ……(1)

为基础推导关于增长率及价格的方程:

由(1)式得第 n+1 年的增长率:

$$P_{n+1}=(X_{n+1}-X_n)/X_n=R(1-X_n/M)-1 \quad \cdots\cdots(2)$$

由(2)式有 $P_n=R(1-X_{n-1}/M)-1$

则: $X_{n-1}=M(1-1/R-P_n/R)$ ……(3)

由(3)与 $X_n=RX_{n-1}(1-X_{n-1}/M)$ 得:

$$X_n=M(1+P_n)(1-1/R-P_n/R) \quad \cdots\cdots(4)$$

由(2)、(4)得:

$$P_{n+1}=P_n(2-R-P_n)$$

这里假定了相临两个再生产过程的各参量相等,这样所得增长率的迭代方程中没有了有效市场 M。

价格(单价)J_n=产值 X_n:产量 N_n 　所以 $X_n=J_nN_n$

代回基本方程(1)式,有: $J_{n+1}N_{n+1}=RJ_nN_n(1-\frac{J_nN_n}{M})$

所以 $J_{n+1}=R\frac{N_n}{N_{n+1}}J_n(1-\frac{J_nN_n}{M})$

对{P_n},{J_n}这两个序列进行相空间重构,寻找无标度区间,计算关联维 D,过程与对序列{X_n}的处理完全一致,由于篇幅有限,且略。

三、对经济波动特征的反映

对波动问题的研究是经济学中一个重要部分,但是由于经济现象所固有的复杂性,虽然已有大量的研究成果,仍然没能彻底回答经济波动到底有无规律及人们在多大程度上能把握这种规律等问题。各种波动理论对"过去"的研究似乎能够解释一些现象,但当用来对"未来"进行预测时,往往是失败的,鉴于此,我认为,对经济系统波动特征的研究应该着眼于波动理论的预测功能。前面我们已看到,由基本方程模拟的再生产过程中,产值、增长率、价格序列存在着无标度区间,这就为我们借助分形理论来把握经济规律、研究波动现象提供了可能,为建立波动预测理论打下基础。

1、$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$、D、m 与经济波动

在上图中,ε 代表距离,m 为所构造的相空间的维数,r 为 $\ln c\sim\ln\varepsilon$ 曲线的斜率,$C(\varepsilon)$为距离小于 ε 的点对在一切"点对"中所占的比例。由图可见,$\ln c\sim\ln\varepsilon$ 大至可分为三段:

(1)$\varepsilon<\varepsilon_1$ 段,斜率 r=m。ε_1 大致反映数据序列的噪声背景的大小。

由于经济系统不断受到内外各种因素的影响,而发生随机扰动,所以存在着背景噪声。既然 ε_1 反映着系统噪声的幅度,是有规律波动和无规噪声的分野,那么,在 $\varepsilon<\varepsilon_1$ 时系统噪声便会表现出来,并且噪声在任何一维上都起作用,所以 m 维空间中就测得 r=m。m 是所构造的嵌入空间的维数,它的值还反映模型中驱动经济系统的独立变量个数的信息。

(2)$\varepsilon > \varepsilon_2$ 段，斜率 $r=0$。ε_2 是最大的“点对”距离，反映了经济系统最大的起伏度(注意不是最大振幅)。

$r=0$，即 $\ln c \sim \ln\varepsilon$ 曲线与横轴平行，随 ε 增长 $C(\varepsilon)$ 不再增加。在 ε 太大时，当然一切“点对”的距离都不会超过它，因此 $C(\varepsilon)$ 总等于 1，取对数后有 $\ln C(\varepsilon)=0$，这样的 ε 当然反映不了所研究经济系统的内部性质。但是，从 D 到 0 转折处的 ε_2，是有规波动的另一个边界，在一定程度上反映了此经济系统最大波幅的信息。

(3)$\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ 段，斜率 $r=D$。实际上，D 是对关联维的很好近似，是一种反映经济波动特征的指标。

$r=D$，即 $\ln C(\varepsilon)=D\ln\varepsilon$，$C(\varepsilon)=\varepsilon^D$，就是说，在区间 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 中，距离小于 ε 的“点对”数在点对总数中所占比例为 $C(\varepsilon)=\varepsilon^D$。这实际上是一种分布函数，即 $C(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}C'(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon}D\varepsilon^{D-1}d\varepsilon=\varepsilon^D$，其密度函数为：$C'(\varepsilon)=D\varepsilon^{D-1}$，表示距离为 ε 的点对的数目在一切“点对”中所占比例为 $D\varepsilon^{D-1}$，D 是唯一的参数。可见，对于经济系统的波动性质，关联维 D 反映了“波动谱”的整体特征。

由以上三种情况可见，经济系统的波动特征，其尺度变换在大小两头都受到限制，$\varepsilon < \varepsilon_1$ 时 $r=m$ 和 $\varepsilon > \varepsilon_2$ 时 $r=0$，都与所研究的经济系统的内在波动本质没有关系，只有中间一段 $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$，$r=D$ 才对应无标度区，这个无标度区的存在，不取决于主观愿望及处理方法，而是由此基本方程所代表的经济系统的内在客观性质决定的，这个内在客观性质就是我们所研究的经济系统的波动特征。这里利用相空间重构方法使我们从单一数据序列中取出了系统波动特征的信息，在重构的相空间中，相点的疏密程度是对波动的一定程度上的反映，且是更全面的反映(由于取的是两两相点间的距离，没有信息损失)，所取出的信息要比单纯波动信息更多。代表相点疏密程度的分维 D，就反映了一个经济系统整个时间序列的波动特征。

对于更一般的经济波动，多重分形则可能反映更一般的波动分布及分布细节。

总之，经济系统的波动特征即不同“波幅”处波动频率的分布，是定义在 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 上的密度函数 $C'(\varepsilon)=D\varepsilon^{D-1}$，它是 ε 的函数，且只有一个参数 D，D 反映着不同波动类型的波动特征。进一步地利用 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$、D 值对序列的新数据的可能取值进行估计，进行一定精度和一定方式的预测，是个值得深入研究的方向。

2、对不同波动类型的考察

无标度区间的位置、分维 D 在一定程度上可作为反映经济波动特征的一个指标，也可以说，对于不同种类的经济波动状态，$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 与 D 会表现出不同的特点。依据对波动特征的理解，下面把经济波动大致分为两大类来考察。

(1)周期波动。

这里所说的周期波动，特指单一模式的波动，即大致上可看作具有单一波长、频率的波动。包括停滞经济(波长很长，振幅很小)和极不稳定经济(波长很短，振幅很大)两种极端情况。这种单一模式的周期波动，用波长(频率)，振幅来表示就足以反映波动的特征，并且简捷、明了。若用无标度区间 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$、分维 D 来表示，反而繁琐、不便，虽然它们也完全能反映这种波动特征。

(2)一般波动。

现实的经济波动一般包含着多种周期成分，经济学家从各自的研究角度和方法，已发现了具有不同波长的多种周期成分，例如：基钦周期(三年左右)，朱格拉周期(九年左右)，库兹涅茨

周期(二十年左右)和康德拉季耶夫周期(五十年左右)等等,但是经济学家们还远没有发现构成一般经济波动的所有周期成分。这里所说的一般经济波动,就是指由多种频率的波动(线性)叠加、(非线性)耦合成的复杂波动,包括两种易于识别的特殊类型:在一段时间内持续增长(增幅基本稳定)和持续衰退的波动,它们是一种特殊类型的多频率谐波。在各种长波、中波、短波等周期成分叠加或耦合下,具有这些不同频率成分的整个一个波动过程,用单一的波长(频率)、振幅是无法反映整体波动特征的。这时,以无标度区间$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$、分维 D 来表示经济系统整体波动特征就显示了其优越性。

参考文献:

[1] [美] 詹姆斯·格莱克,混沌:开创新科学 上海译文出版社 1990 年

[2] 董连科,分形理论及其应用 辽宁科学技术出版社 1991 年

[3] 郝柏林,分形与分维 《科学杂志》38 卷 1 期

[4] [美] 萨谬尔逊,经济学 商务印书馆 1988 年

[5] [美] 阿瑟. 刘易斯,增长与波动 华夏出版社 1987 年

[6] [英] 琼·罗宾逊、约翰·伊特韦尔,现代经济学导论 商务印书馆

[7] 张守一、葛新权,对经济混沌的初步分析, 大自然探索,1992 年 3 期.

产品信息含量分布的康托集合质量分布特征

王穗伟

黑龙江省社科院社会与科技发展研究所

（一）

1、产品(Product)的含义

就现代产品而言，它是人有意识的作用于自然界而产生的满足人的使用和需要的第二自然物。从这个意义上讲，构成任何一件产品都要包括物质，能量和信息这么三个要素。

在这里，材料是指能够承受和发挥产品功能的物质，它的一般的原始形式是取自自然界的。能量是指可以使材料转化为产品的消耗能与结合能。而这里所指的信息是指表征和被表征紧密相联的一个范畴，即物质运动的状态与方式。

2、产品信息(Product Information)含义

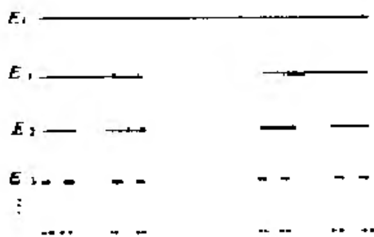
任何一件现代产品都是人运用劳动资料，通过脑力劳动和体力劳动作用在劳动对象后获得的。而劳动资料本身又是人类劳动的一种物化形式。所以，产品是活劳动和物化劳动的结果。这样，产品信息就是指产品在生产中凝聚的活劳动和物化劳动的状态和方式。

由于产品信息是人类劳动在物质中的一种表征，而人类劳动的状态和方式又必然受到科学、技术、经验和社会文化知识的影响和左右，所以，产品信息主要是指使产品获得满足需要的科技知识和社会文化知识。

（二）

1、康托集合

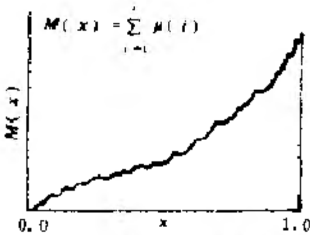
康托(Georg Cantor)于1883年在史密斯(Henry Smith)1875年发现的基础上，提出了集合理论。康托三分集是这样构造的，取一欧氏长度L_0直线段，并记为E_0 [0.1]区间。将该区间三等分，去掉中间一段，保留两个分点，剩下的两段还是闭区间。将剩下的区间再分三个区间，操作与上相同并继续进行下去，得一离散点集，这就是康托集合。见图一。康托集合的最大构造特点是具有周期特征的自相似性。



2、康托集合质量分布特性

假设在区间E_0 [0.1]上具有均匀分布的物质，取密度$P(X)=P_0$，按康托集合特点，将E_0中的质量均匀地集中到每个E_i(i=1、2…)上。当n趋于无穷大时，可得当$X\in E$时，P(X)的值为无穷大，当$X\notin E$时，$P(X)=0$这样，在区间E[X,0]上的质量为：

$$M(X)\int_0^x P(t)dt$$



通常称M(X)函数为lebesgue异常函数，见图(二)，其中，在En上每一部分的质量为$M_i=L_i^{\alpha}$，L_i为第i段长度，$\alpha=\ln 2/\ln 3$叫标度指数。

在康托三分集合中，如果对去掉的线段以及线段长度进行随机处理，那么，得到的将是

一个随机康托集合。随机分形的非一致性的外观通常更接近于自然现象。

（三）

作为产品要素之一，产品信息的主要部分是科学，技术。而科技知识的积累过程又离不开人们对自然界的认识推理过程和实践。其中科学推理模式将影响产品的进化过程。

1、科学推理模式

美国科学哲学家夏佩尔(Dudley Shapere)提出了一个科学发展的新模式。他认为，科学发展的过程就是一个信息域(或知识域)的中心问题不断改变，信息域的项目不断变化，扩大以及信息域的不断合并，分化的进化过程。

在信息域的变化，扩大过程中，有些信息项是有序排列并呈现周期性，顺序是非连续的。这种有序性、周期性具有普遍性和精确性。而且如果一个信息域是有序性的，这种顺序可以看作是某个构成因素的递增递减，那么就有理由推测这个顺序是一个演化的结果。

这一理论在脉冲星、中子星，以及元素周期表的发现过程中获得了支持。从元素周期表看，所谓周期性就是不同层次的自相似性。这说明，科学推理的周期演化模式具有分形特征。

2、自然物空间结构的周期性

物质结构具有层次性。从一个物质结构的层次转变到另一物质结构的层次时，象征转变的那些物体就是"关节点"，如原子、行星系、太阳系等。在各关节点之间，又有一些过渡的实物形式，这些叫中间环节，如原子团、分子团、晶胞等。

关节点往往具有一个质量密集的核心，核心之外，有比它更低一级的点集绕核心运动，这就是关节点的绕核式结构。处在中间环节的物质往往具有"非绕核式"结构。

按照实物本身固有的结构序列展开如下：

原子	分子 晶胞 物体 天体	太阳系	双星 联星 系团	银河系	星系群 星系团 系团	总星系
关节点	中间环节	关节点	中间环节	关节点	中间环节	关节点

可见，实物空间结构的每一次周期变化都不是在旧层次的简单重复。如果将总星系作为E。{0,1}区间，将各关节作为剩下的区段，并将中间环节去掉，则这一结构的周期性就是康托集合构造过程的自相似性。

（四）

材料作为产品三要素之一，它不仅是产品自然属性的载体，而且也是产品增加信息含量的基础。

1、材料科学的进步

在刚性链分子的统计物理学，材料组织，流变学，再结晶以及松驰行为研究取得进展后，包括制造集成电路器件的石印聚合物材料将获得高灵敏度和高分辨率。

在界面分析，控制技术和最佳组元分配工艺学的发展中，由高模量纤维和几种类型的基体组成的复合材料将具有较高的强度质量比和韧性，良好的疲劳性能和抗蚀性。

目前，包括倾斜功能材料，C60及其化合物材料，纳米级材料的涌现，都是在物理学，化学，生物学，材料科学，信息科学，机械学以及计算机，扫描隧道显微镜与加工，微电子、电子束、激光束、等离子、核分析的综合技术进步和协同作用下取得的。

2、材料产品的时代划分

对人类进化史的划分，通常采用工具法，其实，用材料产品的进化来划分也是可以的。

在远古时期，由于人类对自然界认识程度的低下，在生存中只有借助自然物，这时期就是自然材料时代，也就是石器时代。

过了很长时间，在火山爆发的启发下和漫长实践过程，人类掌握了冶炼经验。这时，人类进入了初步摆脱自然束缚的冶炼材料时代，那就是金属材料和非金属材料二大材料并存的时代，也就是铜器、铁器、陶器和瓷器时代。

随着科学，技术的出现和发展，人们对自然的认识由浅入深，由表及里，并掌握了控制物质分子团的技术，这时，人类进入了合成材料时代，比如有些国家制成品的合成材料占材料产品的50%以上。

随着人类对掌握“小量”原子系统如表面、界面、晶面系统控制技术的完善，我们开始走向复合材料时代。其中，复合材料焊接技术的成熟和广泛应用将是这一时代到来的标志。

在各领域频繁渗透和交叉综合下，在人类认识和改造自然的能力迅速提高下，一个使人类生活会发生巨大变化的时代，融合材料时代将会到来。超导材料在各领域的应用将是这一时代的重要标志。

（五）

提高产品的科技含量，就是提高产品的信息含量。产品信息含量增加的过程，以历史的角度看，就是产品的进化过程。而产品进化的实质就是信息在产品中的含量分布。

1、产品中信息积累分布

比如，具有隔离与联系小空间与大空间作用的门窗产品，在更新换代中，就是信息积累的过程。从木制门窗到钢窗，再到铝门窗，再到塑料门窗，再到具有复合材料性质的玻璃墙门、窗等。

目前，无论在工业、农业、军事，还是在轻工业等领域，很难找到没有人工痕迹的产品，而且，随着人们对自然界的观测能力和控制能力的增强，信息在产品中的积累速度也加快了。

2、产品中信息周期分布

视听产品的更替就是信息在产品中周期分布的结果。在关键元器件研制出来后，电视机就出现了由黑白向彩色，再到高清析度，大屏幕方向发展。收音机也是这样，从单波段向多波段，单声道向多声道方向发展或改进。

其特点就是原技术信息在新技术、新材料、新元件的基础上重又发挥新功能的情况。

3、产品信息含量分布特征

(1)信息在产品中的分布是一个人工过程；(2)这一过程是漫长的、随机的也是积累的；(3)积累结果是产品功能上升，产品材质重量下降。

日本人高安秀树用人生过程来形容这一特征时指出，人每一天的变化很小，象同一件事反复进行那样，当突然看见几年前的照片时，就会发现自己的变化，在不知不觉中登上了人生的阶梯，而且随年龄的增加，感觉登上阶梯的速度也变得加快了。实际上，产品的信息含量分布（产品进化）又何偿不是如此呢？

总之，产品信息含量分布最大特征用四个字概括就是周期积累。导致这一特征的原因我们已从科学的推理模式，实物结构的规律，材料的进化等方面做了初步探讨，如果用数学语言来描述的话，它的表现形式具有随机康托集合质量分布特征。

研究产品信息含量分布特征，对调整产业结构，提高产品质量，开发新产品，分析和揭示产品信息指标结构等具有实际和理论方面的意义。